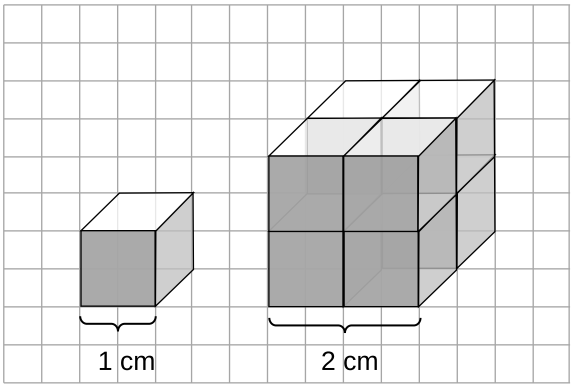
Folgen mit Termen beschreiben

Zu: „Terme und Gleichungen“, Jahrgangsstufe 7

Kommentare:
Zahlenfolgen lassen sich durch konkrete Objekte anschaulich darstellen. Neben Punktmustern eignen sich dazu auch Würfel und Würfelbauten. Es ist auch möglich, diese Würfel aus Holz in großer Anzahl im Lehrmittelhandel zu erwerben und den Schülerinnen und Schülern in die Hand zu geben, was die Anschaulichkeit nochmal deutlich erhöht. Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm haben sich als handlicher erwiesen.
Die nachfolgenden Aufgaben sind nach Ideen aus folgendem Lehrbuch gestaltet:
Affolter, Walter et al.: Mathbuch, 2003 Schulverlag plus AG.

Aufgabe 1: Würfel



Ein großer Würfel kann aus kleinen Würfeln gebaut werden.
Das ist in der Abbildung dargestellt.

a) Zeichne solche zusammengesetzten Würfel mit einer Kantenlänge von 3 cm und mit einer Kantenlänge von 4 cm.

b) Fülle die Tabelle aus.

Vorderkante	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm		10 cm
Anzahl der kleinen Würfel in der untersten Schicht	1	4						
Anzahl aller kleinen Würfel im großen Würfel	1							

Gib einen Term an, der die Anzahl der kleinen Würfel in der untersten Schicht eines beliebig großen Würfels mit der Kantenlänge x beschreibt.

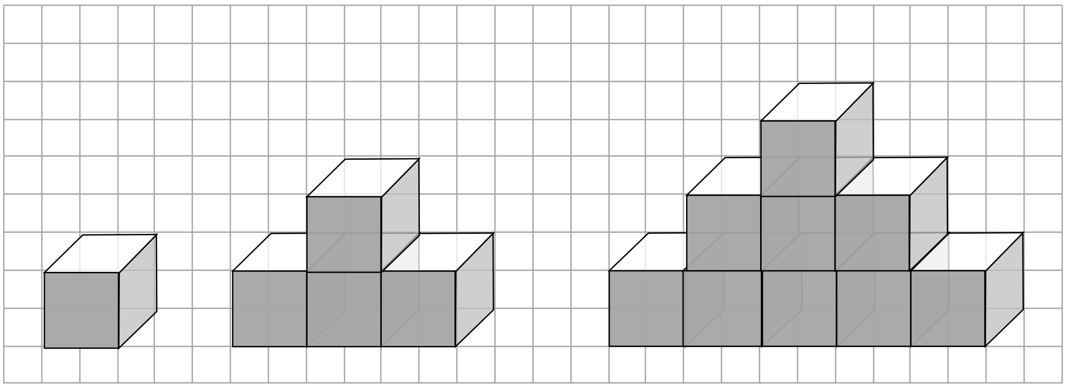
____

Gib einen Term an, der die Gesamtzahl aller kleinen Würfel in einem beliebig großen Würfel mit der Kantenlänge x beschreibt.

____

Aufgabe 2: Würfelmauern

Mit kleinen Würfeln kann man auch andere Bauwerke errichten. In der Abbildung sieht man eine Folge von Würfelmauern, die sich fortsetzen lässt.



a) Zeichne die zwei nachfolgenden Würfelmauern auf kariertem Papier.

b) Fülle die Tabelle aus.

Höhe der Mauer	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	10 cm	20 cm
Anzahl der Würfel in der untersten Schicht	1	3						
Anzahl aller Würfel	1	4						

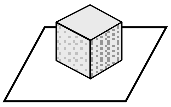
Gib einen Term an, der die Anzahl der Würfel in der untersten Schicht einer beliebig hohen Würfelmauer beschreibt.

____

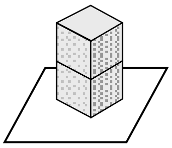
Gib einen Term an, der die Gesamtzahl aller Würfel in einer beliebig hohen Würfelmauer beschreibt.

____

Aufgabe 3: Würfeltürme



Ein Würfel liegt auf dem Boden. Man kann ihn von allen Seiten betrachten. So sind fünf quadratische Flächen sichtbar. Das Quadrat am Boden ist verdeckt.



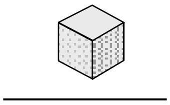
Bei einem zweistöckigen Turm sind ringsherum und oben insgesamt neun Quadrate sichtbar. Am Boden und im Innern sind drei verdeckt.

Bei einem dreistöckigen Turm .... .
Welche Zahlen findet man, wenn man immer weiter baut?

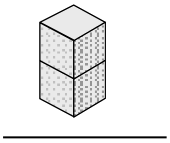
- Lege eine Tabelle an, in der du zu verschiedenen Turmhöhen die Anzahl der sichtbaren und verdeckten Quadrate notierst.
  Erkennst du Gesetzmäßigkeiten?

Aufgabe 4: Würfeltürme II

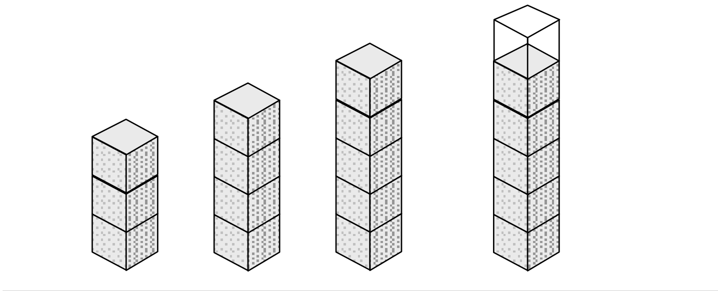
Stapelt man Würfel zu einem Turm, dann sind einige Flächen verdeckt und einige sichtbar.



5 Quadrate sind sichtbar, 1 Quadrat ist verdeckt.



9 Quadrate sind sichtbar, 3 Quadrate sind verdeckt.



Zwischen der Zahl der Stockwerke und der Zahl der sichtbaren Quadrate besteht ein Zusammenhang.

Stockwerke	sichtbare Quadrate		
1	5	=	4 · **1** + 1
2	9	=	4 · **2** + 1
3	13	=	4 · **3** + 1
4	17	=	4 · **4** + 1
...	...		

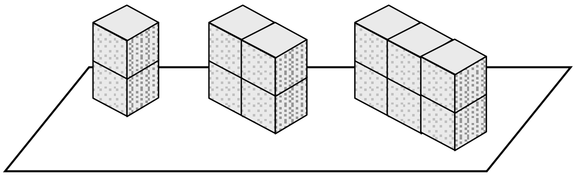
Für einen x-beliebigen Turm gilt:

Bei x Stockwerken sieht man $4 \cdot x + 1$ Quadrate.
Der Ausdruck $4 \cdot x + 1$ liefert die Anzahl sichtbarer Quadrate, wenn man für x die Zahl der Stockwerke einsetzt.
Einen derartigen Ausdruck nennt man „Term“.

a) Erkläre an zwei verschieden hohen Türmen, wie der Term $4 \cdot x + 1$ zustande kommt.

b) Notiere in einer Übersicht die Anzahl der <u>nicht</u> sichtbaren Quadrate in Abhängigkeit von der Turmhöhe.
Beschreibe diese Anzahl für einen x-beliebigen Turm mit einem Term.

Aufgabe 5: Würfelmauern II



a) Stelle Untersuchungen über sichtbare und unsichtbare Quadrate bei zweistöckigen Mauern an.

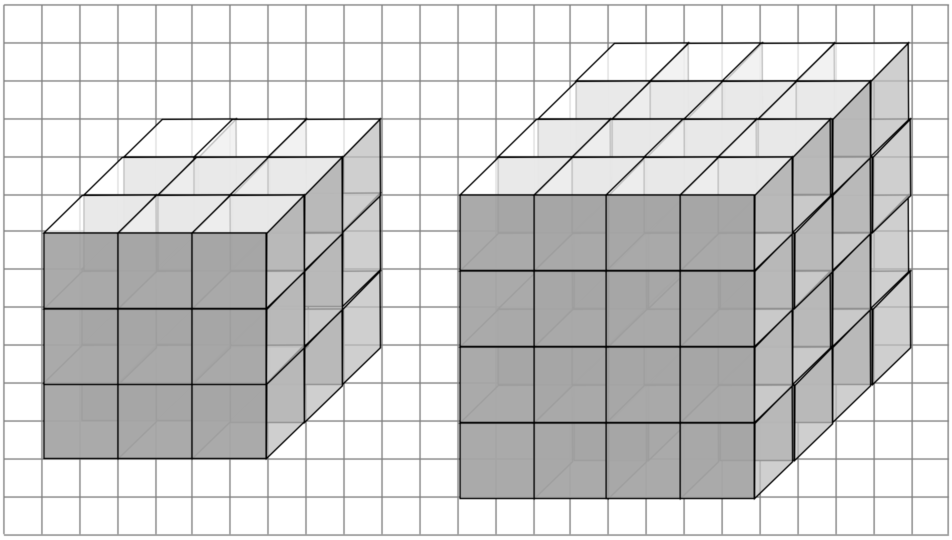
- Nutze Tabellen.
- Finde passende Terme.

b) Finde passende Terme für sichtbare und unsichtbare Quadrate bei höheren Mauern.

c) Was ergibt sich, wenn du bei höheren Mauern anstelle von Flächen nur die Würfel zählst?

Lösungen zu **Folgen mit Termen beschreiben (Jgst.07)**

Zu **Aufgabe 1: Würfel**

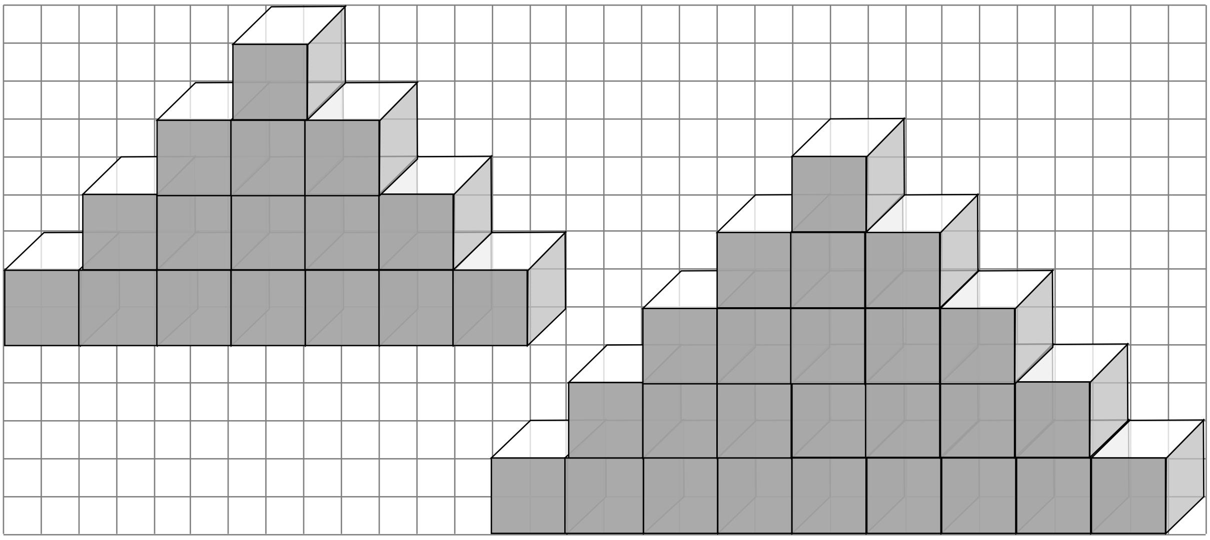


Vorderkante	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm		10 cm
Anzahl der Würfel in der untersten Schicht	1	4	**9**	**16**	**25**	**36**		**100**
Anzahl aller kleinen Würfel	1	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**		**1000**

… Anzahl der Würfel in der untersten Schicht eines beliebig großen Würfels …: _ x^2 oder $x \cdot x$ _

…. Gesamtzahl aller kleinen Würfel ….: x^3 oder $x \cdot x \cdot x$ _

Zu **Aufgabe 2: Würfelmauern**



Höhe der Mauer	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	10 cm	20 cm
Anzahl der Würfel in der untersten Schicht	1	3	**5**	**7**	**9**	**11**	**19**	**39**
Anzahl aller Würfel	1	4	**9**	**16**	**25**	**36**	**100**	**400**

… Anzahl der Würfel in der untersten Schicht …: ___ $\mathbf{2 \cdot x - 1}$ ________

… Gesamtzahl aller Würfel …: ______ x^2 ___

Zu **Aufgabe 3: Würfeltürme**

Höhe des Turmes	1	2	3	4	5	6	7	
sichtbare Quadrate	5	9	13	17	21	25	29	
verdeckte Quadrate	1	3	5	7	9	11	13	

z. B.: - bei den sichtbaren Quadraten kommen immer 4 hinzu,
- bei den verdeckten kommen immer 2 dazu

Zu **Aufgabe 4: Würfeltürme II**

a) z.B.: - beim Zweierturm sieht man von jedem Würfel die 4 Seitenflächen (Wände) → insgesamt 8. Hinzu kommt die Deckfläche (das Dach) des obersten Würfels → also 8 + 1 = 9

b) siehe Aufgabe 3: - Am Anfang war es nur eine verdeckte Fläche, mit jedem Würfel kommen 2 hinzu.

- $2 \cdot x - 1$

Zu **Aufgabe 5: Würfelmauern II**

a)

Länge der Mauer	1	2	3	4	5	6	7	x
sichtbare Quadrate	9	14	19	24	29	34	39	$5 \cdot x + 4$
verdeckte Quadrate	3	10	17	24	31	38	45	$7 \cdot x - 4$

b) 3 Etagen

Länge der Mauer	1	2	3	4	5	Muster	x
sichtbare Quadrate	13	20	27	34	41	- immer 7 dazu	$7 \cdot x + 6$
verdeckte Quadrate	5	16	27	38	49	- immer 11 dazu	$11 \cdot x - 6$

4 Etagen

Länge der Mauer	1	2	3	4	5	Muster	x
sichtbare Quadrate	17	26	35	44	53	- immer 9 dazu	$9 \cdot x + 8$
verdeckte Quadrate	7	22	37	52	67	- immer 15 dazu	$15 \cdot x - 8$

Verallgemeinerung für n Etagen:

- sichtbare Quadrate: Mit jeder Etage steigt die Zahl der sichtbaren Quadrate um 2 mehr, sowohl in der Zuwachsrate als auch im Bestand → $(2n + 1) \cdot x + 2n$

- verdeckte Quadrate: Mit jeder Etage steigt die Zahl der sichtbaren Quadrate um 4 mehr in der Zuwachsrate, im Bestand werden zusätzlich 2 abgezogen → $(4n - 1) \cdot x - 2n$

c) Es ergeben sich die Malfolgen:

$n = 1 \rightarrow 1 \cdot x,\ n = 2 \rightarrow 2 \cdot x,\ n = 3 \rightarrow 3 \cdot x$ ....