1 Kurvendiskussion /40

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x + 2 \;;\; x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Untersuchen Sie den Graphen von f auf mögliche Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen. **/3**

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen von f. **/8**

1.4 Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse. **/1**

1.5 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f . **/17**

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $\left[-0,5;\, 4,5\right]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/4**

1.7 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen des Graphen von f im Punkt $P(2\,|\,f(2))$ und zeichnen Sie diese in das unter 1.6 erstellte Koordinatensystem ein. **/5**

2 Rekonstruktion von Funktionen /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f 3. Grades hat im Punkt $P(0\,|\,0)$ die Steigung -2 und einen Extrempunkt im Punkt $Q(2\,|\,-4)$.

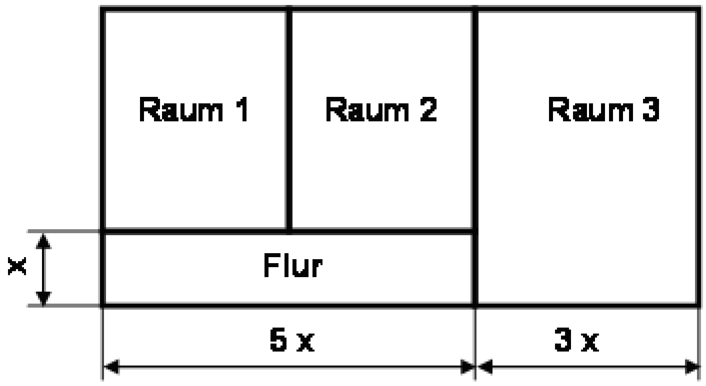
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktion. (Es handelt sich zwar um ein anderes Gleichungssystem als das, das sich aus den obigen Bedingungen ergibt, führt aber zum selben Ergebnis für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
18a & + & 6b & & & & & = & 3 \\
4a & + & 2b & + & c & & & = & -2 \\
-4a & - & 4b & + & 2c & & & = & -2 \\
 & & & & 3c & + & d & = & -6
\end{array}
$$

3 Extremalproblem /15

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Grundriss eines Hauses, bestehend aus drei Räumen und einem Flur der Breite x. Die Gesamtlänge aller Wände soll 90 Meter betragen.



3.1 Wie ist x bei den gegebenen Proportionen zu wählen, damit die Grundfläche der drei Räume zusammen möglichst groß wird? **/13**

3.2 Welche Abmessungen hat die Grundfläche des Hauses? **/2**

4 Integralrechnung /30

Gegeben sind die Funktionen f und g mit:

$$f(x) = 2x^3 - x\,;\, x \in \mathbb{R} \text{ und } g(x) = -x^2 + 2x\,;\, x \in \mathbb{R}.$$

4.1 Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g. **/7**

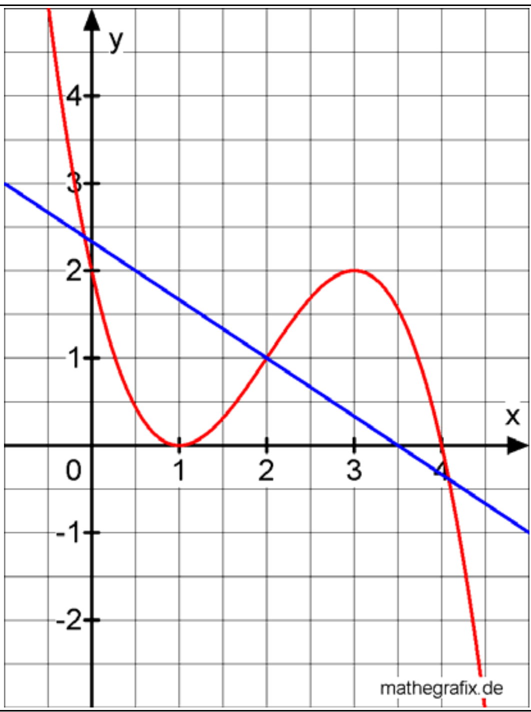
4.2 Bestimmen Sie den Inhalt der von den Graphen von f und g begrenzten Gesamtfläche. **/13**

4.3 Bestimmen Sie für die Funktion g_a mit: **/10**

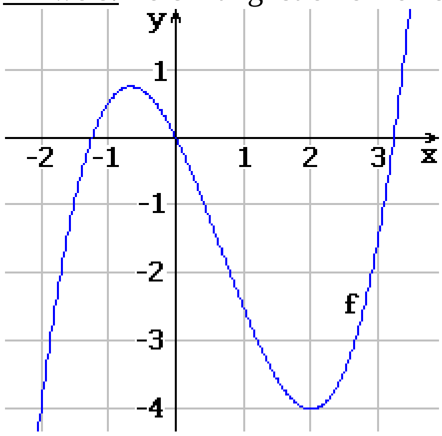
$$g_a(x) = -x^2 + ax\,;\, x \in \mathbb{R}$$

den Parameter $a > 0$ so, dass die vom Graphen von g_a und der x-Achse begrenzte Fläche den Flächeninhalt 36 FE hat.

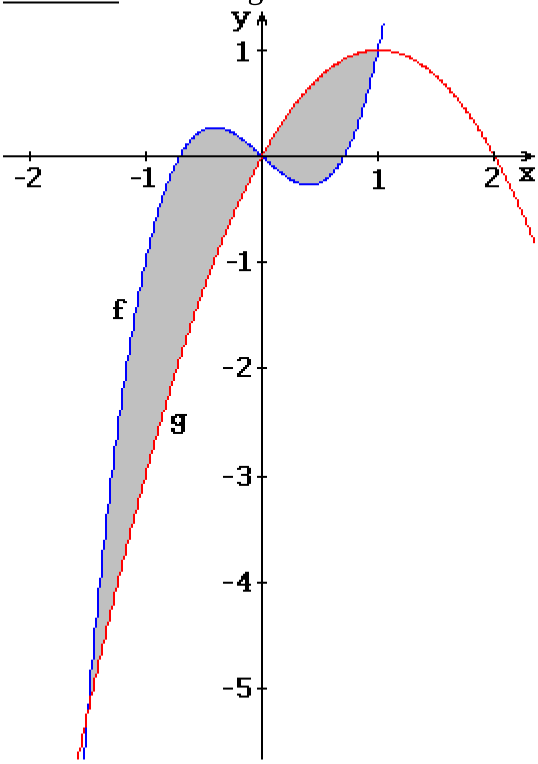
Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1						
1.1	Da weder $f(x)=f(-x)$ noch $f(-x)=-f(x)$ bzw. gerade und ungerade Exponenten von x auftreten- ist der Funktionsgraph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.	2				
1.2	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 3, der zugehörige Koeffizient ist negativ. Daher verläuft der Graph vom III. in den I. Quadranten. Oder man zeigt rechnerisch: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.	3				
1.3	$f(x_N)=0$ Polynomdivision, p-q-Formel Nullstellen: $(-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{9}{2}x+2):(x-1)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$ $x^2-5x+4=0$ $x_{N2/3}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}$ $x_{N1}=1$ $x_{N2}=1$ $x_{N3}=4$	4	4			
1.4	$f(0)=2;\ S_y(0\mid 2)$	1				
1.5	Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung $f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{9}{2}$ $f''(x)=-3x+6$ $f'(x_E)=0$ $-\frac{3}{2}x_E{}^2+6x_E-\frac{9}{2}=0$ $x^2-4x+3=0$	5				

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	$x_{E1/2} = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$ $x_{E1/2} = 2 \pm 1$ $x_{E1} = 1$ $x_{E2} = 3$ $f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow Minimum$ $f''(3) = -3 < 0 \Rightarrow Maximum$ $TP(1\|0)$ $HP(3\|2)$ Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung $f''(x_W) = 0$ $-3x_W + 6 = 0$ $x_W = 2$ $f'''(x_W) = -3 < 0 \rightarrow$ links-rechts-W. $WP(2\|1)$		12			
1.6		4				
1.7	Steigung der Tangenten: $f'(2) = m_T = \frac{3}{2}$					

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	Steigung der Normalen: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{2}{3}$ allg.: $y_N = m_N x + b$ $1 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b$ $b = \frac{7}{3}$ $y_N = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ Normale zeichnen (siehe 1.6)	2	3			
	Summe	21	19	0		
	mögliche BE	40			erreichte BE	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2						
	<u>Hinweis:</u> Zeichnung ist eine Korrekturhilfe  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6x + 2b$	3				
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)			4		
	In (0|0) Steigung –2 $\Rightarrow$ f(0) = $\underline{d = 0}$ $\Rightarrow$ f'(0) = $\underline{c = -2}$		5			
	Extremum in (2|-4) $\Rightarrow$ f(2) = 8a + 4b – 4 = – 4 (1) $\Rightarrow$ $\underline{f'(2) = 12a + 4b - 2 = 0 \quad (2)}$ 4a + 2 = 4 (2)–(1) $\underline{a = 0{,}5}$					
	a in (1): 4 + 4b – 4 = – 4 $\underline{b = -1}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 2x}}$	3				
	Summe	6	5	4		
	mögliche BE		15		erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung: BE	Erbrachte Teilleistung: Begutachtung
3						
3.1	Hauptbedingung: $A(x,y)=8x\cdot y-5x^2$ Nebenbedingung: $90\text{m}=4y+20x$ Zielfunktion: $A(x)=180x-45x^2$ Ableitungen: $A'(x)=180-90x$ $A''(x)=-90$ notwendige Bedingung: $A'(x)=0\Rightarrow x=2\text{m}$ hinreichende Bedingung: $A''(x)=-90<0\Rightarrow \text{Max}$	4	6	3		
3.2	$y=12{,}5\text{m}$ Die Abmessungen der Grundfläche sind $16\text{m}\times 12{,}5\text{m}$	2				
	Summe	6	6	3		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4						
4.1	setze f(x) = g(x) $2x^3 - x = -x^2 + 2x \qquad \mid +x^2 - 2x$ $2x^3 + x^2 - 3x = 0$ $x(2x^2 + x - 3) = 0$ $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ oder $2x^2 + x - 3 = 0 \quad \mid :2$ $x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0$ $x_{2,3} = -0{,}25 \pm \sqrt{0{,}0625 + 1{,}5}$ $= -0{,}25 \pm \sqrt{1{,}5625} = -0{,}25 \pm 1{,}25$ $\underline{\underline{x_2 = -1{,}5}}$ $\underline{\underline{x_3 = 1}}$	4 3				
4.2	<u>Hinweis:</u> Zeichnung ist eine Korrekturhilfe 					

	$A_1 = \left\| \int\limits_{-1,5}^{0} f(x) - g(x)dx \right\| = \left\| \int\limits_{-1,5}^{0} 2x^3 + x^2 - 3xdx \right\|$					
	$= \left\| 0,5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1,5x^2 \right\|_{-1,5}^{0}$		4			
	$= \left\| 0 - [0,5\cdot(-1,5)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-1,5)^3 - 1,5\cdot(-1,5)^2] \right\|$					
	$= \left\| -2,53125 + 1,125 + 3,375 \right\| = \left\| 1,96875 \right\|$					
	$\approx \underline{\underline{1,97FE}}$	2				
	$A_2 = \left\| \int\limits_{0}^{1} f(x) - g(x)dx \right\| = \left\| \int\limits_{0}^{1} 2x^3 + x^2 - 3xdx \right\| =$		3			
	$= \left\| 0,5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1,5x^2 \right\|_{0}^{1} = \left\| (0,5\cdot 1^4 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1,5\cdot 1^2) \cdot \right.$					
	$= \left\| -\frac{2}{3} \right\| = \underline{\underline{\frac{2}{3}FE}}$	2				
	$A_{ges} = A_1 + A_2 = 1,96875 + 0,\overline{6} \approx \underline{\underline{2,64FE}}$	2				
4.3	Nullstellen von g_a bestimmen:					
	setze $g_a(x) = -x^2 + ax = 0$		4			
	$x(-x + a) = 0$					
	$\underline{x_1 = 0}$ oder $-x + a = 0$					
	$\underline{x_2 = a}$					
	$\left\| \int\limits_{0}^{a} -x^2 + axdx \right\| = \left\| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right\|_{0}^{a} =$			3		
	$= \left\| -\frac{1}{3}\cdot a^3 + \frac{a}{2}\cdot a^2 \right\| = \left\| \frac{1}{6}a^3 \right\| = \frac{1}{6}a^3$					
	setze $\frac{1}{6}a^3 = 36 \quad \| \cdot 6$					
	$a^3 = 216 \quad \| \sqrt[3]{\ }$					
	$\underline{\underline{a = 6}}$		3			
	Summe	13	14	3		
	mögliche BE		30			erreichte BE