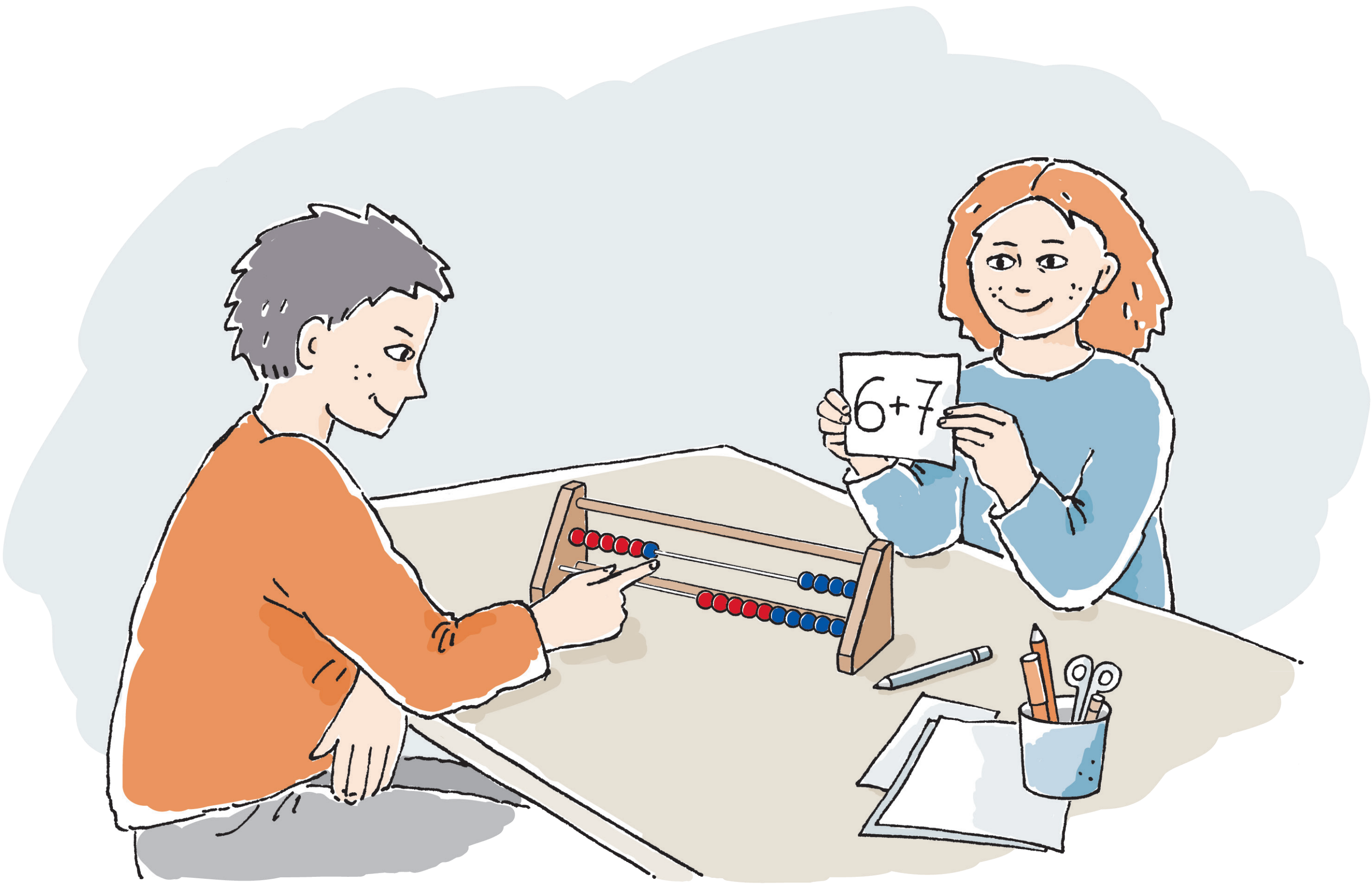


Erfolgreich rechnen lernen

Prävention von Schwierigkeiten – Diagnose – Förderung

Bildungsregion Berlin-Brandenburg

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Erfolgreich rechnen lernen

Prävention von Schwierigkeiten – Diagnose – Förderung

IMPRESSUM

Herausgeber
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM)
14974 Ludwigsfelde-Struveshof

Tel.: 03378 209-0
Fax: 03378 209-149

Internet: www.lisum.berlin-brandenburg.de

Autor Dr. Axel Schulz

Verantwortlich Susanne Wolter

Redaktion Ute Freibrodt unter Mitarbeit von Doreen Herrmann, Ina Rohde, Sventje Marquardt, Maria Wrobel

Grafikerinnen Angela Buchholz, Sventje Marquardt, Christa Penserot

Gestaltung atelier2gestalten, Berlin

Druck PieReg Druckcenter, Berlin

ISBN 978-3-944541-55-6

Alle genannten Internetquellen wurden am 24.10.2019 zuletzt geprüft.

Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM), Ludwigsfelde 2020

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

die vorliegende Handreichung möchte Sie dabei unterstützen, ihre Schülerinnen und Schüler noch besser beim Rechnenlernen zu begleiten. Ohne die Mathematik und ohne das Rechnen sind viele Dinge des täglichen Lebens unvorstellbar. Daher ist es ein wichtiges Ziel, alle Schülerinnen und Schüler bestmöglich mathematisch zu fördern. Dies kann besonders gut gelingen in einem verständnisorientierten Mathematikunterricht, der Wert legt auf die gemeinsame und materialgestützte Erarbeitung grundlegender Kompetenzen.

Einigen Kindern fällt es nicht leicht, mathematische Muster und Prinzipien zu erkennen, sichere Vorstellungen zu Zahlen und Operationen und Rechenstrategien zu entwickeln. Ziel ist es, deren Schwierigkeiten frühzeitig zu erkennen, denn nicht immer reichen differenzierende Angebote im Unterricht aus, um den Schwierigkeiten einzelner Schülerinnen und Schüler angemessen zu begegnen. Werden von der Lehrkraft besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen wahrgenommen, müssen sich eine vertiefende Diagnostik und eine diagnosegestützte Förderung anschließen.

In der vorliegenden Handreichung werden zunächst folgende Leitfragen beantwortet:

- Was ist Rechnen und welche grundlegenden Kompetenzen sind notwendig, um verstehend rechnen zu können?
- Wie sollte Mathematikunterricht gestaltet sein, um diese Kompetenzen gemeinsam zu erarbeiten?
- Welche Rolle spielt dabei eine kompetenz- und prozessorientierte Diagnose?

Der zweite Teil der Handreichung (ab Kapitel 4) möchte Sie konkret dabei unterstützen, Schülerinnen und Schüler mit besonderen Problemen beim Rechnenlernen angemessen zu fördern. Dafür hält die Handreichung einen Diagnosebogen bereit mit einer strukturierten Sammlung von Aufgabenstellungen zur vertiefenden Diagnostik. In den nachfolgenden Auswertungshinweisen werden mögliche Schülerantworten und Beobachtungen dargestellt sowie passende Folgerungen und Hinweise für eine diagnosegestützte Förderung gegeben. Der anschließende Teil der Handreichung stellt eine Sammlung von konkreten Förderaufgaben vor, der Sie bei der Durchführung der individuellen Förderung von Schülerinnen und Schüler mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen unterstützt.

Die Handreichung kann Ihnen auf diese Weise Orientierung und Anregung sowohl für die tägliche Unterrichtspraxis als auch für die zusätzliche Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen bieten.

Susanne Wolter

Leiterin der Abteilung Unterrichtsentwicklung Grundschule/
Sonderpädagogische Förderung und Medien

1 Was ist Rechnen – und was nicht?

Im Verlauf einer Mathematikstunde zu Beginn des dritten Schuljahres bearbeiten Musa, Ella und Evelyn die Aufgabe 63 – 8. Sie gehen folgendermaßen vor:

Musa erklärt:	„Ich ziehe von der 63 erstmal 10 ab. Da ich ja eigentlich nur minus 8 rechnen sollte, rechne ich dann wieder plus 2. Das Ergebnis ist 55.“
Ella sagt:	„Ich rechne 63 minus 3, das sind 60. Dann ziehe ich noch 5 ab. Das sind 55.“
Evelyn flüstert:	„63 minus 8. 62, 61, 60, 59, 58, 57, 56, 55“ Bei jedem Zahlwort (62, 61, …) streckt sie einen Finger aus, bis sie acht Finger ausgestreckt hat. Sie notiert das Ergebnis 55.

Musa, Ella und Evelyn gehen bei der Bearbeitung derselben Aufgabe sehr unterschiedlich vor, und sie ermitteln alle dasselbe Ergebnis. Deutlich wird, dass alle Lösungsansätze nachvollziehbare Rechenwege aufweisen. Trotzdem scheinen einige dieser Wege vielversprechender zu sein als andere.

Anliegen dieser Handreichung ist es, aufzuzeigen, dass *erfolgreiches* Rechnenlernen nicht ohne das Verstehen der zugrundeliegenden Prozesse, Strategien und Regeln gelingen kann.

Insofern wird im vorliegenden Kapitel mit besonderem Blick auf den Anfangsunterricht zunächst auf den Unterschied zwischen Zählen und Rechnen eingegangen. Dabei wird auch diskutiert, ob das zählende Lösen von Evelyn überhaupt als Rechnen bezeichnet werden kann. Danach wird beschrieben, welche notwendigen mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten – im Folgenden zusammengefasst unter dem Begriff der mentalen Werkzeuge (siehe Kapitel 1.3) – die Schülerinnen und Schüler unbedingt benötigen, um erfolgreich rechnen zu können.

1.1 Zählendes Rechnen ist kein Rechnen

Die Begriffspaarung *zählendes Rechnen* ist in der aktuellen Literatur weit verbreitet, obwohl sie bei genauerer Betrachtung in sich widersprüchlich ist. Genaugenommen handelt es sich beim zählenden Rechnen *nicht* um Rechnen im eigentlichen Sinne (siehe Kapitel 1.3), da einzelne (Zwischen-)Ergebnisse nur zählend ermittelt werden. Von Rechnen wird erst dann gesprochen, wenn die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, zur Lösungsfindung mentale Werkzeuge zielgerichtet einzusetzen. Die Begriffspaarung des zählenden Rechnens wird in der Handreichung dennoch genutzt, weil sie in Forschung und Praxis mittlerweile etabliert ist.

Die durch Zählen erhaltene Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben und auch von Rechengeschichten ist zu Beginn der Grundschulzeit ein ganz normales und zu erwartendes Vorgehen (Selter 1995, Rinkens 1996). Viele Schülerinnen und Schüler können in der Regel zu Schulbeginn kaum andere Strategien zur Lösung solcher Aufgaben nutzen (Gaidoschik 2010). Verfestigt sich allerdings zählendes Rechnen über das erste Schulbesuchsjahr hinaus als einzige Möglichkeit, Rechenaufgaben zu lösen, ist dies ein wesentlicher Hinweis auf besondere Probleme beim Rechnenlernen. Das *verfestigte zählende Rechnen* wird auch als eines der Hauptsymptome für besondere Probleme beim Rechnenlernen genannt (Schipper 2009, Gaidoschik 2010, Kaufmann und Wesselowski 2006).

Zählstrategien

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, zählend zu richtigen Lösungen zu kommen. Im Folgenden werden solche Zählstrategien vorgestellt, die Schülerinnen und Schüler zum Lösen von Aufgaben nutzen.

Beim *Alleszählen* werden alle beteiligten Zahlen abgezählt: zuerst die Ausgangszahl, dann die Veränderung und schließlich das Ergebnis.

Das *Weiterzählen und Rückwärtszählen* zur Lösung von Rechenaufgaben stellen gegenüber dem Alleszählen eine Weiterentwicklung dar. Charakteristisch für diese Art des Zählens ist nun, dass die Ausgangsmenge nicht mehr dargestellt werden muss, sondern nur noch die Menge abgezählt wird, die addiert oder subtrahiert werden muss. So ermittelt Evelyn in dem Beispiel das Ergebnis durch Rückwärtszählen, indem sie acht Schritte rückwärts zählt. Sie beginnt beim Rückwärtszählen mit dem ersten Schritt zur 62 und zeigt einen Finger auf.

Ein häufiger und typischer Fehler beim Weiter- bzw. Rückwärtszählen ist dabei der Zählfehler um plus bzw. minus eins. Dieser Fehler kann entstehen, wenn beim Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen die Ausgangszahl mitgezählt wird. Beim Weiterzählen (Addition) wird die Summe um eins zu klein, beim Rückwärtszählen die Differenz um eins zu groß.

Zählende Lösungsfindungen beschränken sich nicht nur auf einen Zahlenraum bis 10 oder 20, den man gut mit zwei Händen bewältigen könnte. Zählendes Rechnen ist auch bei Schülerinnen und Schülern zu beobachten, die Aufgaben im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus bearbeiten (Benz 2005). Hierbei ist zweierlei zu erkennen: Entweder nutzt das Kind ein vorhandenes Material, das auch die zählende Ermittlung von Ergebnissen erlaubt (z. B. einen Rechenrahmen oder eine Hundertertafel) oder das Kind zerlegt die gegebenen Zahlen so in Ziffern, dass diese wieder ein Zählen im kleineren Zahlenraum ermöglichen, und die Aufgabe mit den Fingern bewältigt werden kann (Schulz 2014, S. 97 ff.). Dieses Zerlegen von Zahlen in Ziffern insbesondere ohne Berücksichtigung der Stellenwerte und der Position der Zahlen in der Rechenaufgabe ist ein sehr typisches Vorgehen für zählendes Rechnen und kann ein deutlicher Hinweis für dessen Verfestigung sein (Schipper 2009).

Eric löst zum Beispiel die Aufgabe 63 – 28 wie folgt:

Eric: „6 minus 2 ist...“, *zählt leise* „5, 4“, *notiert 4*.
„Und dann noch 8 minus 3“, *zählt leise* „7, 6, 5“, *notiert 5*.
„... sind 45“

Dieses ausschließlich ziffernweise Vorgehen kann zu Folgeproblemen führen. Diese entstehen, wenn die Ziffern schließlich ohne Rücksicht auf ihre Position im Zahlzeichen (Stellenwert) und der Rechenaufgabe „kombiniert“ werden – so wie bei Eric.

Auch das Aufsagen der Ergebnisse von Einmaleins-Reihen als einzige Möglichkeit, Multiplikationsaufgaben zu lösen, kann als eine Form des zählenden Rechnens gesehen werden. Beim Aufsagen der Reihen wird nicht gerechnet, sondern die Ergebnisse der Reihe werden lediglich abgezählt (Gaidoschik 2014, S. 23).

1.2 Vom Zählen zum Rechnen

Die beschriebenen Zählstrategien zum Lösen von Aufgaben entwickeln sich meist weiter, indem die Kinder ihr zählendes Rechnen zunehmend ökonomisieren. Dabei ist positiv zu beobachten, dass die Kinder bereits beim zählenden Rechnen beginnen, Zahleigenschaften zu nutzen und erste Rechengesetze anzuwenden, ohne dass sie sich jedoch dieser Rechengesetze bewusst sind. So nutzen sie zum Beispiel unbewusst die Kommutativität, um aus der Aufgabe 2 + 7 die Aufgabe 7 + 2 zu machen und ökonomischer zählen zu können.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass zum derzeitigen Stand der Forschung kein zufriedenstellendes Entwicklungsmodell beschrieben werden kann, das die Entwicklung vom zählenden Rechnen zum Nutzen von anderen Rechenwegen klären könnte (Schulz 2014, S. 122 ff.). Es kann nur beobachtet werden, dass den meisten Kindern der Übergang vom zählenden Rechnen zum Rechnen im Laufe der ersten vier Grundschuljahre gelingt – *aber nicht allen Kindern*. Gerade diese Kinder, die sich über einen langen Zeitraum auf die subjektiv empfundene Sicherheit des zählenden Rechnens verlassen, haben häufig Schwierigkeiten damit, tragfähigere Rechenstrategien zu entwickeln (Schipper 2009, Gaidoschik 2010, Kaufmann und Wesselowski 2006, Moser Opitz 2007).

Wenn auch kein Modell den Übergang zum Rechnen beschreiben kann, so ist es jedoch möglich, genau zu beschreiben, was Schülerinnen und Schüler können, wissen und verstehen müssen, um nicht mehr abzählend zu einer Lösung zu kommen, sondern um zu rechnen. Im folgenden Kapitel werden diese notwendigen mentalen Werkzeuge beschrieben.

1.3 Mentale Werkzeuge – Was braucht man zum Rechnen(-lernen)?

Damit eine Schülerin oder ein Schüler eine gegebene Aufgabe rechnend lösen kann, ist eine Vielzahl an mentalen Werkzeugen notwendig (z. B. Rathgeb-Schnierer 2010; Schulz 2018, siehe auch Tab. 3 auf S. 17).

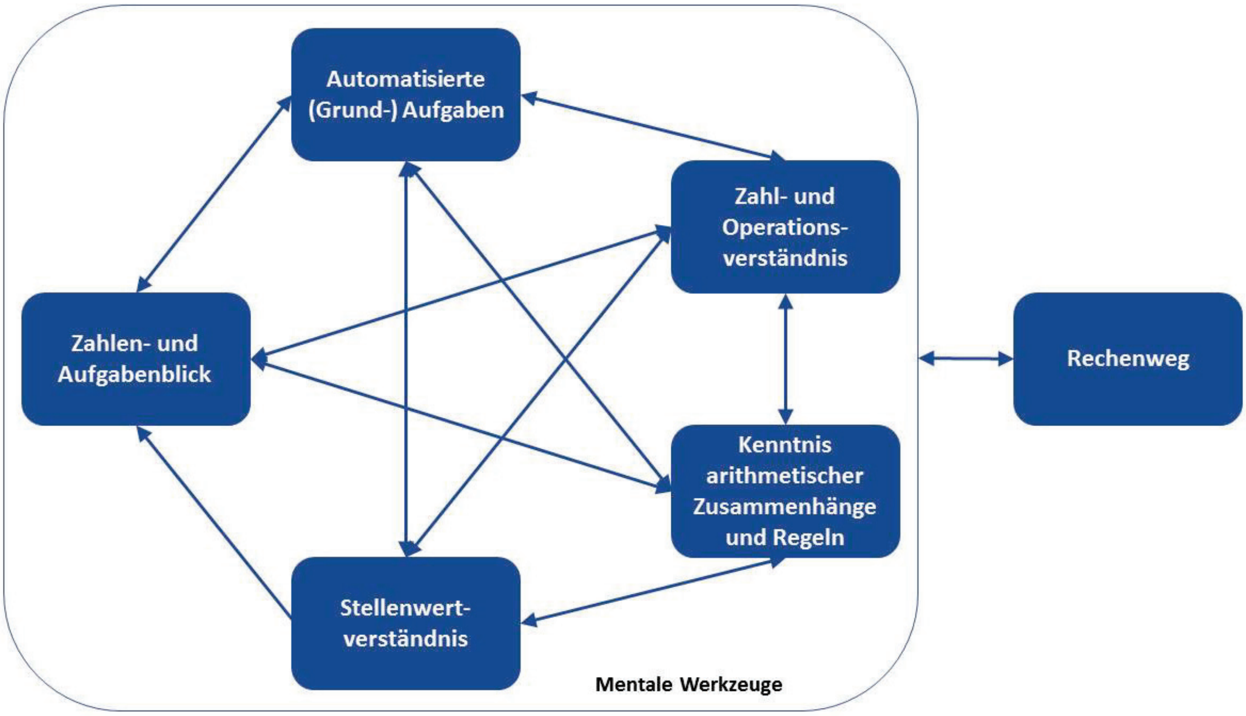


Abbildung 1: Mentale Werkzeuge als Voraussetzung für das Rechnen

Erst wenn den Schülerinnen und Schülern alle in der Abbildung benannten mentalen Werkzeuge zur Verfügung stehen und sie von ihnen genutzt werden können, ist eine Ablösung vom zählenden Rechnen möglich (Abb. 1). Daher ist es ein zentrales Ziel ab dem Anfangsunterricht, diese Werkzeuge gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zu erarbeiten. Die verschiedenen mentalen Werkzeuge entwickeln sich dabei nicht unabhängig voneinander, sondern bilden eine Art Netzwerk. In diesem Netzwerk werden immer neue Verknüpfungen geschaffen, sodass es auf diese Weise immer tragfähiger und größer wird. Das bedeutet auch, dass die im Folgenden beschriebenen Werkzeuge nicht immer trennscharf sind, sondern dass sie inhaltlich teilweise große Überschneidungen aufweisen. Daher muss darauf geachtet werden, diese Verknüpfungen im Unterricht herzustellen und auch zu thematisieren.

Die Reihenfolge der im Folgenden beschriebenen mentalen Werkzeuge sagt nichts über deren Bedeutsamkeit aus.

Zahl- und Operationsverständnis

Zahlverständnis

Zu einem tragfähigen *Zahlverständnis* gehört unter anderem die Fähigkeit, sicher zwischen verschiedenen Darstellungsebenen der Zahl wechseln zu können (Kapitel 2.1). *Sicher* meint in diesem Kontext, dass Anzahlen nicht einzeln abzählend ermittelt werden müssen, sondern unter Nutzung von gegebenen, auch veränderlichen Strukturierungsmerkmalen gedeutet und ermittelt werden können (Schulz und Schülke 2017). Ein Aufgabenformat, das genau diese schnelle und sichere Zahlauffassung fordert und fördert, ist das sogenannte Schnelle Sehen (Kapitel 2.2, siehe auch Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019 (1), Wartha und Schulz 2012, Schipper 2009). Grundlage für das Abzählen und die Kommunikation über verschiedene Zahldarstellungen ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Zahlwortreihe kennen und nutzen können.

Darüber hinaus kann von einem tragfähigen Zahlverständnis ausgegangen werden, wenn Zahlen in ihrer Beziehung zu anderen Zahlen gedeutet werden können, ggf. auch ohne Wechsel der Darstellungsebenen (z. B. Ruwisch 2015). Beispiele für dieses „relationale Zahlverständnis“ sind die folgenden:

- 40 ist das Doppelte von 20
- 40 ist die Zahl direkt nach 39
- 40 ist weniger als die Hälfte von 100
- 40 besteht aus vier Zehnern, vierzig Einern, acht Fünfern, ...

Operationsverständnis

Über ein tragfähiges *Operationsverständnis* verfügt ein Kind, wenn es zum Beispiel in der Lage ist, zu einer Rechenaufgabe eine Geschichte zu erzählen, ein Bild zu malen oder eine Materialhandlung durchzuführen – *und umgekehrt* (Tab. 1; siehe auch Wartha und Schulz 2012, S. 31). Operationsverständnis meint, dass Kinder „wissen, was es bedeutet“ minus, plus, mal oder geteilt zu rechnen (siehe auch Kapitel 2.1). Wir sprechen hier auch von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen.

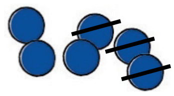
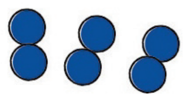
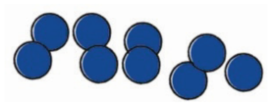
Darstellung 1	Darstellung 2	Darstellung 3	Operationsvorstellung
Peter hat sechs Murmeln. Er verliert drei davon.	6 – 3		Subtraktion als Restmengenbildung
Peter hat sechs Murmeln. Er verteilt sie gerecht an seine drei Freunde.	6 : 3		Division als Verteilen
Peter hat sechs Murmeln. Er bekommt noch drei dazu.	6 + 3		Addition als Hinzufügen
Peter bekommt an drei Tagen jeweils sechs Murmeln geschenkt.	3 • 6		Multiplikation als wiederholte Addition

Tabelle 1: Grundvorstellungen zu Rechenoperationen als Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungen

Wichtig dabei ist, dass das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen (siehe auch Kapitel 2.1) einerseits ein Indikator für ein tragfähiges Zahl- und Operationsverständnis ist. Andererseits entsteht das Zahl- und Operationsverständnis erst, wenn diese Übersetzungen im Unterricht eingefordert und reflektiert werden.

Zu allen Rechenoperationen müssen *verschiedene* Grundvorstellungen entwickelt werden (Padberg und Benz 2011). So werden beispielsweise bei der Subtraktion mindestens zwei Grundvorstellungen unterschieden: Subtraktion als Restmengenbildung und Subtraktion als Ermitteln des Unterschieds. Darüber hinaus kann man dabei zwischen dynamischen und statischen Situationen unterscheiden (Tab. 2, S. 13; siehe auch Wessel 2015, S. 28–53, Schipper 2009, S. 100).

	Restmengenbildung	Ermitteln des Unterschieds
Statisch	Tom hat sieben Karten. Das sind vier Karten mehr als Eric hat. Wie viele Karten hat Eric?	Ayse hat neun Karten. Dilan hat sieben Karten. Wie viele Karten hat Ayse mehr als Dilan?
Dynamisch	Paula hat acht Karten. Sie gibt drei Karten ab. Wie viele Karten hat sie jetzt noch?	Kevin hat drei Karten und Maya hat sieben Karten. Wie viele Karten muss ich Kevin geben, damit er genauso viele Karten hat wie Maya?

Tabelle 2: Verschiedene Grundvorstellungen der Subtraktion mit Rechengeschichten

Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln

Im Folgenden werden die wichtigsten arithmetischen Zusammenhänge, Regeln und Rechengesetze für den verständnisorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule vorgestellt und beschrieben.

Kommutativgesetz

Bereits früh entdecken Kinder, dass es manchmal sinnvoll sein kann, die gegebenen Zahlen einer Additionsaufgabe zu vertauschen. Diese ist dann subjektiv einfacher zu lösen. Zum Beispiel wird die Aufgabe 2 + 9 als 9 + 2 gerechnet (Gaidoschik 2010, S. 113). Das Nutzen der Tauschaufgabe ist in diesem Fall ein *intuitives* Vorgehen, auf das später auch wieder zurückgegriffen werden kann. In jedem Fall muss eine *verstehende* Nutzung des Kommutativgesetzes im Mathematikunterricht erarbeitet werden. Dazu gehört auch das Untersuchen der Allgemeingültigkeit.

Teil-Ganzes-Verständnis

Der Erwerb des *Teil-Ganzes-Verständnisses* ist einer der Meilensteine im Laufe der Zahlbegriffsentwicklung (Gerster und Schultz 2000, S. 339 ff.). Wenn das Teil-Ganzes-Konzept in Ansätzen verstanden ist, wissen Kinder, dass Zahlen auseinandergenommen und zusammengesetzt werden können und dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind (Schulz, S. 115 f). Übertragen auf die Rechenoperationen heißt das z. B. 8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4. Das Teil-Ganzes-Verständnis entwickelt sich zunächst anschauungs- und mengengebunden und kann auch auf gedanklich vorgestellte Mengen und schließlich auf die symbolische Zahlenebene übertragen werden (Abb. 2; siehe auch Kapitel 2.3). Auch das Teil-Ganzes-Verständnis muss im Unterricht erarbeitet werden.

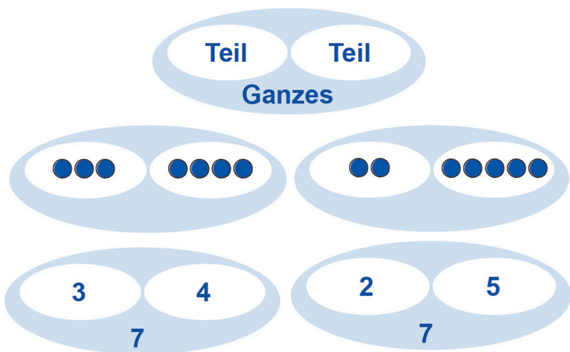


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Entwicklung des Teil-Ganzes-Verständnisses

Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* ist quasi eine Anwendung des Teil-Ganzes-Konzepts. Schülerinnen und Schüler wenden es an, sobald sie Additionsaufgaben umformen. Dadurch sind sie leichter auszurechnen, ohne die Aufgabe zählend lösen zu müssen. So wird das Assoziativgesetz zum Beispiel genutzt, wenn schrittweise über den Zehner gerechnet wird:

7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15.
Auch bei der Strategie des Verdoppelns findet das Assoziativgesetz seine Anwendung:
7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15.

(Natürlich nutzen Schülerinnen und Schüler in der Schuleingangsphase dabei keine Klammern zum Notieren.)

Konstanz der Summe

Grundlegend für das Teil-Ganzes-Konzept und das Assoziativgesetz ist die *Konstanz der Summe*: Wenn bei einer Additionsaufgabe ein Summand um eine bestimmte Zahl verkleinert, der andere Summand jedoch um die gleiche Zahl vergrößert wird, ändert sich an der Summe nichts. Dies kann zum Beispiel durch das Umdrehen von Wendeplättchen geschehen (Abb. 3). Erst nach der anschaulichen Erarbeitung sollte es auf die Zahlebene übertragen werden (siehe Kapitel 2.3).

Dieses Wissen wird zum Beispiel bei der Rechenstrategie *Gegensinniges Verändern* genutzt. Das Verständnis dieser Strategie ist nicht trivial und sollte anschauungsgebunden erarbeitet werden.

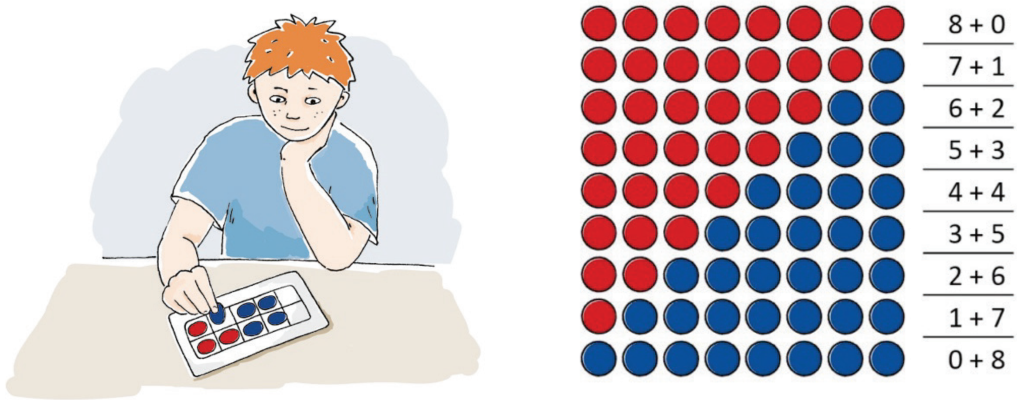


Abbildung 3: Gegensinniges Verändern und Konstanz der Summe veranschaulicht mit Wendeplättchen

Addition und Subtraktion als Umkehroperationen

Jede Additionsaufgabe kann durch Subtraktionsaufgaben „rückgängig“ gemacht werden (3 + 4 = 7 zu 7 – 4 = 3 oder 7 – 3 = 4) und jede Subtraktionsaufgabe ihrerseits durch Additionsaufgaben (7 – 4 = 3 zu 3 + 4 = 7 oder 4 + 3 = 7). Es handelt sich um Umkehroperationen, die sich gegenseitig bedingen.

Das Verständnis dieses Konzepts ist nicht nur grundlegend für den Umgang mit Zahlen und beim Rechnen. Es erleichtert auch das Merken von Zahlensätzen: Wenn auf dieser Grundlage die Aufgabe 3 + 4 = 7 bereits automatisiert ist, dann sind auch durch Umkehrung die Aufgaben 7 – 4 = 3 und 7 – 3 = 4 leichter zu behalten. Zudem erleichtert das Wissen um den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion die Entwicklung der Grundvorstellung der Subtraktion als Bestimmung des Unterschieds (Tab. 2, S. 13): Kinder sind dann in der Lage, die Aufgabe 61–59 zu lösen, indem sie den Unterschied der beiden Zahlen ermitteln, zum Beispiel indem 2 zur 59 addiert, das heißt, ergänzt wird.

Die Konstanz der Differenz kommt zum Tragen, wenn bei einer Subtraktionsaufgabe beide Zahlen (Minuend und Subtrahend) um die gleiche Zahl vergrößert oder verkleinert werden, denn die Differenz ändert sich nicht (Abb. 4).

Konstanz der Differenz

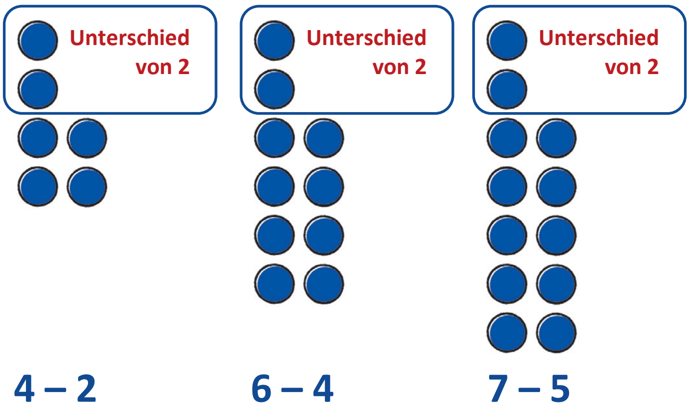


Abbildung 4: Anschauliche Repräsentation der Konstanz der Differenz

Genutzt wird die Konstanz der Differenz häufig, um Zehnerübergänge geschickt zu rechnen, zum Beispiel:

103 – 67 = (103 – 3) – (67 – 3) = 100 – 64 = 36

63 – 27 = (63 + 3) – (27 + 3) = 66 – 30 = 36

Eines der wichtigsten Konzepte der Mathematik und des Denkens überhaupt ist die Analogiebildung (Schipper 2009, S. 94). Hierbei wird bekanntes Wissen genutzt, um bisher unbekannte Aufgaben lösen zu können. Dabei ist die neue Aufgabe der bekannten Aufgabe sehr ähnlich oder sie enthält bereits bekannte Anteile. Wenn die Aufgabe 3 + 5 bekannt ist, kann eine Vielzahl anderer Aufgaben über Analogien gelöst werden: 13 + 5, 43 + 5, aber auch 30 + 50 oder 300 + 500.

Analogiebildung

Stellenwertverständnis

Die Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses ist eines der Hauptziele im Mathematikunterricht der Grundschule, denn das Stellenwertsystem ist die arithmetische Grundlage für die numerische Darstellung unserer Zahlen.

Die Stellenwerte in unserem dezimalen Stellenwertsystem werden durch Bündeln und Entbündeln gebildet und sind die Grundlage unserer Sprech- und Schreibweise von Zahlen. Wenn das Prinzip der fortgesetzten Bündelung verstanden ist, sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, die Unterschiede und die Zusammenhänge zwischen Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern usw. zu verstehen und zu nutzen. Durch die fortgesetzte Bündelung und die Anordnung der Bündel wird es möglich, Zahlen anhand der *Position ihrer Ziffer im Stellenwertsystem* eindeutig darzustellen und zu lesen (Padberg und Benz 2011, S. 82 f.). Ein tragfähiges Stellenwertverständnis liegt dann vor, wenn auf Grundlage der fortgesetzten Bündelung sicher zwischen dem Zahlwort (dreiundzwanzig), dem geschriebenen Zahlzeichen (23) und einer (vorgestellten) Menge (zwei Zehner und drei Einer) hin und her übersetzt werden kann (Fromme 2017).

Zahlen- und Aufgabenblick

Das Ziel des verständnisorientierten Mathematikunterrichts ist, das denkende Rechnen zu ermöglichen. Hierbei hilft besonders die Entwicklung des sogenannten Zahlen- und Aufgabenblicks (Rechtsteiner-Merz 2015). Der Zahlen- und Aufgabenblick hilft Kindern bereits *vor* oder *während* des Rechnens einer Aufgabe zu erkennen, wie es die Aufgabe am besten lösen könnte. Hierbei geht es vor allem um das Erkennen von Zahlbeziehungen unter (meist intuitiver) Nutzung der anderen beschriebenen mentalen Werkzeuge.

Musa nutzt beispielsweise den Zahlen- und Aufgabenblick bei der Aufgabe 63 – 8 (siehe S. 8). Er erklärt: „Ich ziehe von der 63 erstmal 10 ab. Das sind 53. Da ich ja eigentlich nur minus 8 rechnen sollte, rechne ich dann wieder plus zwei, weil ich ja zwei zu viel abgezogen habe. Das Ergebnis ist dann 55.“

Automatisierte (Grund-)Aufgaben

Die wichtigsten Grundaufgaben, mit denen alle anderen Additions- und Subtraktionsaufgaben gelöst werden können, sind die Aufgaben des „kleinen Einspluseins“. Das sind alle Plus- und Minusaufgaben bis Zehn, zum Beispiel 5 + 3, 6 – 4, 10 – 7, 2 + 8. Diese müssen auswendig gelernt bzw. automatisiert werden. Auch die Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben bis 20 müssen auswendig gewusst werden. Selbstverständlich schadet es nicht, weitere Aufgaben als die Genannten auswendig zu wissen und somit seinen mentalen Werkzeugkoffer weiter zu füllen. Grundlegend für das Erlernen von Rechenstrategien sind jedoch die genannten Grundaufgaben.

Zwei Anmerkungen sind in diesem Zusammenhang besonders wichtig:

1) Automatisierte Aufgaben sind nur *ein* Werkzeug von vielen. Daher ist es *nicht* zielführend, sich ausschließlich auf das Automatisieren von Aufgaben zu konzentrieren und anzunehmen, dass der Rest dann schon von allein käme. Dem ist nicht so.

2) Das Auswendiglernen von Zahlensätzen (z. B. 3 + 7 = 10) *ohne Verständnisgrundlage* ist nicht zielführend, da für die sichere und gezielte Anwendung der automatisierten Zahlensätze verstanden sein muss, warum diese Zahlen zusammengehören.

Zusammenfassung

Mentale Werkzeuge sind die Voraussetzung für flexibles Rechnen – schärfer formuliert: Ohne die beschriebenen Werkzeuge ist Rechnen nicht möglich. Die verschiedenen Werkzeuge entwickeln sich dabei nicht unabhängig voneinander, sondern sie beeinflussen ihre Entwicklung wechselseitig und bilden schließlich ein tragfähiges arithmetisches Netzwerk. Erst das Zusammenspiel der einzelnen mentalen Werkzeuge erlaubt schließlich das Beschreiten eines Rechenwegs (siehe Abb. 1, S. 11).

Die Erarbeitung der mentalen Werkzeuge und dessen Anwendung beim Rechnen ist eines der wichtigsten Ziele des verständnisorientierten mathematischen Anfangsunterrichts und sollte immer wieder auch in größeren Zahlenräumen besprochen und gesichert werden.

Am Beispiel der Aufgabe 63 – 28 (siehe Tab. 3, S. 17) wird gezeigt, dass das jeweils genutzte mentale Werkzeug je nach Rechenweg nicht immer das gleiche sein muss. Hier spielt vor allem ein gut geschulter Zahlen- und Aufgabenblick eine leitende Rolle, denn dieser nutzt und organsiert das verfügbare Werkzeug für den schließlich auszuführenden Rechenweg.

63 – 28 = 35	
Rechenschritte	**Mentales Werkzeug**
63 – 28 =	**Rechenweg: Schrittweise**
63 – 20 = 43	**Stellenwertverständnis/Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln:** Ich darf die 28 in 20 und 8 zerlegen. Ich kann die 20 von der 63 wegnehmen, indem ich nur die Zehner betrachte (also 60 – 20 bzw. 6 Zehner minus 2 Zehner rechne) und die Einer unverändert lasse.
	Automatisierte (Grund-)Aufgaben/Analogiebildung: Für die Lösung der Aufgabe 60 – 20 muss ich nicht rechnen. Die weiß ich auswendig.
43 – 8 = 43 – 3 = 40 40 – 5 = 35	**Stellenwertverständnis/Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln:** Es ist einfach erstmal 43 – 3 zu rechnen, weil ich weiß, dass die 43 aus 40 und 3 zusammengesetzt ist. Wenn ich von der 40 die restlichen 5 wegnehme, muss ich einen Zehner in zehn Einer umtauschen, übrig bleiben 3 Zehner und 5 Einer.
	Automatisierte (Grund-)Aufgaben/Teil-Ganzes-Konzept: Zahlzerlegung der 8 in 3 und 5 Zahlzerlegung der 10 in 5 und 5
63 – 28 =	**Rechenweg: Hilfsaufgabe nutzen**
63 – 30 = 33	**Zahlen- und Aufgabenblick:** Ich sehe, dass die 28 nahe an der 30 liegt, mit der es sich einfacher rechnen lässt.
	Stellenwertverständnis/Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln: Ich kann die 30 von der 63 wegnehmen, indem ich nur die Zehner betrachte (also 60 – 30 bzw. 6 Zehner minus 3 Zehner rechne) und die Einer unverändert lasse.
	Automatisierte (Grund-)Aufgaben/Analogiebildung: Für die Lösung der Aufgabe 60 – 30 muss ich nicht rechnen. Die weiß ich auswendig.
33 + 2 = 35	**Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln/Automatisierte (Grund-) Aufgaben:** Wenn ich vorher 2 Einer zu viel weggenommen habe (minus 30 statt minus 28), dann muss ich die 2 Einer jetzt wieder zum Ergebnis dazutun.
63 – 28 =	**Rechenweg: Vereinfachen (Gleichsinniges Verändern)**
65 – 30 = 35	**Zahlen- und Aufgabenblick:** Ich sehe in der Nähe eine einfachere Aufgabe.
	Zahl- und Operationsverständnis/Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln: Wenn ich den Abstand der beiden Zahlen gleich lasse, dann ändert sich auch am Ergebnis der Subtraktionsaufgabe nichts. - Ich vergrößere beide Zahlen um den gleichen Betrag: 28 + 2 also auch 63 + 2
	Stellenwertverständnis/Kenntnis arithmetischer Zusammenhänge und Regeln: Ich kann von 65 die Menge 30 wegnehmen, indem ich nur die Zehner betrachte (also 60 – 30 bzw. 6 Zehner minus 3 Zehner rechne) und die Einer unverändert lasse.
	Automatisierte (Grund-)Aufgaben/Analogiebildung: Für die Lösung der Aufgabe 60 – 30 muss ich nicht rechnen. Die weiß ich auswendig.

Tabelle 3: Nutzung des mentalen Werkzeugs am Beispiel verschiedener Rechenwege zur Aufgabe 63 – 28 = 35

2 Guter Unterricht zum Rechnenlernen

Schülerinnen und Schüler beim Rechnenlernen zu unterstützen, ist eines der Hauptziele im Mathematikunterricht der ersten beiden Schuljahre. Dabei werden im Anfangsunterricht die Grundsteine für erfolgreiches Weiterlernen gelegt. Ziel des folgenden Kapitels ist es zu zeigen, wie diese Grundsteine für das Rechnenlernen gelegt werden können. Dafür wird zunächst geklärt, wie der Aufbau von Grundvorstellungen gelingen kann, welche Anschauungsmaterialien hierbei genutzt werden können und wie eine Ablösung vom Material erfolgen sollte (Kapitel 2.1). Danach werden Herausforderungen und Chancen des gemeinsamen Lernens und Unterrichtens in heterogenen Lerngruppen in den Blick genommen (Kapitel 2.2). Schließlich wird auf das verstehende und beziehungsreiche Üben beim Rechnenlernen eingegangen und es werden schon hier verschiedene Beispiele für Übungsformate für den Unterricht vorgestellt (Kapitel 2.3).

2.1 Vom Material zu Grundvorstellungen

Zu allen mathematischen Inhalten ist es notwendig, Grundvorstellungen aufzubauen – so auch zu Zahlen, Operationen und Strategien. Im Folgenden wird geklärt, was genau Grundvorstellungen sind, wie diese entwickelt und erarbeitet werden können und welche Rolle dabei didaktisches Anschauungsmaterial spielt.

Was sind mathematische Grundvorstellungen?

Ein Kind verfügt über eine tragfähige Grundvorstellung zu einem mathematischen Inhalt, wenn es in der Lage ist, diesen mathematischen Inhalt innerhalb verschiedener Darstellungsebenen und Repräsentanten zu veranschaulichen und ihn auch zwischen verschiedenen Repräsentanten und Darstellungsebenen sicher hin und her zu übersetzen (Abb. 5, S. 19).

Repräsentanten und Darstellungswechsel

Mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Operationen sind nicht unmittelbar fass- oder sichtbar (z. B. Söbbeke 2005). Daher ist es für jede Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten notwendig, angemessene Repräsentanten zu nutzen, um „Vorstellungsbilder" zu entwickeln. Diese Repräsentanten können sich hinsichtlich ihres Abstraktionsgrades sehr voneinander unterscheiden. Im Mathematikunterricht der Grundschule kann es sich um Bilder und Abbildungen handeln, um reale Dinge, um Geschichten und Erklärungen sowie um Zahlwörter, Zahl- und Rechenzeichen. Man unterscheidet zwischen eher konkreten und eher symbolisch-abstrakten Repräsentanten (Abb. 5, S. 19), wobei die Unterteilung nicht trennscharf ist.

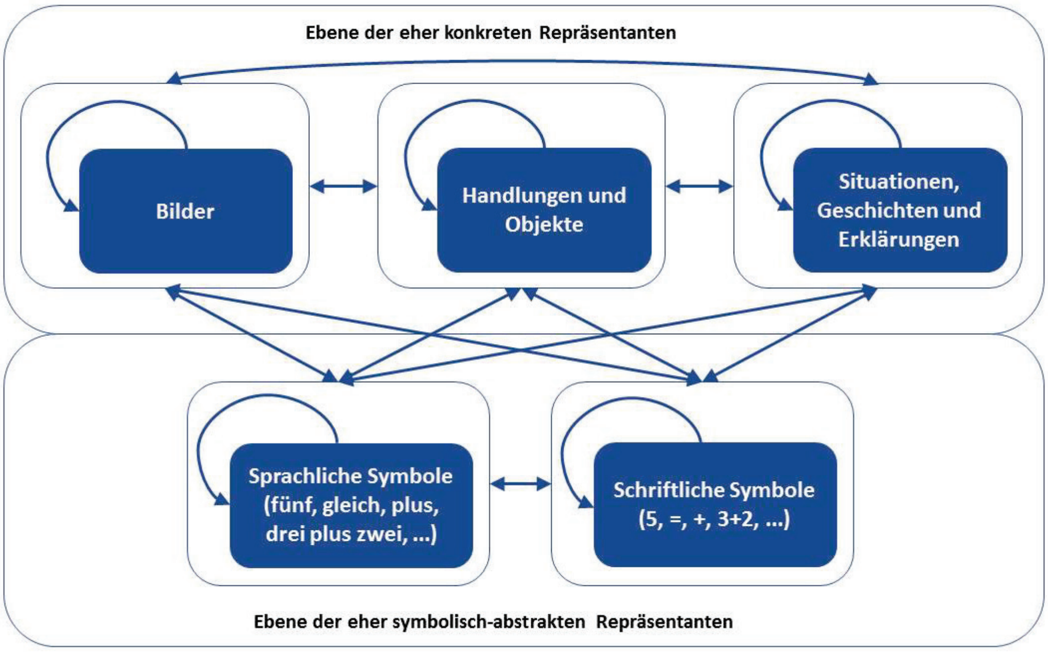


Abbildung 5: Grundvorstellungen als Übersetzungen zwischen und innerhalb von Darstellungsebenen

Auf der Ebene der konkreten Repräsentanten kann zwischen solchen unterschieden werden, die eher alltagsnah sind und solchen, die eher didaktisch geprägt sind (Abb. 6, siehe auch Schipper und Hülshoff 1984). Die bloße Existenz der beschriebenen Repräsentanten bedeutet nicht automatisch eine mathematisch fokussierte Auseinandersetzung mit ihnen. Erst der bewusst angeleitete und auf mathematische Strukturen gerichtete Umgang mit diesen verschiedenen Darstellungen ermöglicht die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Operationen (siehe die folgenden Kapitel).

Abbildung 6: Beispiele für eher alltagsnahe und eher didaktische Repräsentanten

Darstellungswechsel als Kern des Mathematiklernens und -verstehens

Übersetzungen können zwischen Repräsentanten *einer* Darstellungsebene erfolgen – das heißt *innerhalb* der eher konkreten Darstellungen oder *innerhalb* der eher symbolischen Darstellungen. Dies geschieht, zum Beispiel wenn zu einer durchgeführten mathematischen Handlung ein Bild gemalt wird, in dem die mathematisch relevanten Aspekte der Handlung sichtbar werden (Abb. 5, S. 19). Die Fähigkeit, ein Zahlzeichen wie 37 mit dem Zahlwort „siebenunddreißig" zu benennen, ist eine Übersetzung innerhalb der symbolischen Ebene (Abb. 5, S. 19).

Übersetzungen können auch *zwischen* den beiden Darstellungsebenen erfolgen – also *zwischen* der eher konkreten und der eher symbolischen Darstellungsebene (Abb. 5, S. 19). Dies geschieht, wenn ein Kind in der Lage ist, zum Beispiel zu einer Rechengeschichte oder einem Sachproblem einen Term aufzustellen oder umgekehrt, zu einem Term eine Rechengeschichte zu erfinden. Auch für diese Übersetzungen *zwischen Darstellungsebenen* gilt, dass diese nicht allen Schülerinnen und Schülern sofort sicher gelingen.

Übersetzungen zwischen den Darstellungsebenen sind der Kern des Mathematiklernens und -verstehens: Mathematisches Wissen und Handeln *entsteht* einerseits durch diesen bewusst angeleiteten und steten Wechsel zwischen Repräsentanten, andererseits wird mathematisches Wissen und Handeln durch diese Übersetzungen überhaupt erst *sichtbar*. Darstellungswechsel können als grundlegende Bestandteile mathematischen Handelns und Denkens verstanden werden (Kuhnke 2013, S. 19 ff.).

Darstellungswechsel als „Verständnisindikator"

Ein gelungener Darstellungswechsel ist ein Verständnisindikator für einen bestimmten mathematischen Inhalt (Kuhnke 2013, S. 29 ff.). „Ein *Verständnis* des mathematischen Inhalts wird dann unterstellt, wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung möglich ist." (Wartha und Schulz 2012, S. 39). Für die Diagnose mathematischer Kompetenzen bedeutet dies, dass erst durch das Einfordern von Übersetzungen zwischen den Darstellungsebenen sichtbar werden kann, welche Inhalte sicher verstanden wurden und welche Inhalte noch weiter gefestigt werden müssen (siehe Kapitel 4.1).

Darstellungswechsel als didaktisches Prinzip

Auch in der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur und den meisten Schulbüchern für die Grundschule ist der Darstellungswechsel nicht mehr wegzudenken. Dabei ist aber unbedingt zu beachten, dass der Wechsel zwischen Repräsentanten als didaktisches Prinzip kein Selbstzweck ist. Ein mathematisches Verständnis entwickelt sich nicht automatisch aus dem Darstellungswechsel: Erst die Fokussierung auf den mathematischen Gehalt und das gemeinsame Gespräch darüber kann zu einem verstandenen mathematischen Handeln und Denken führen. Strukturen und Beziehungen innerhalb von (aber auch zwischen) Darstellungsebenen können auf diese Weise entdeckt, reflektiert und gefestigt werden. In der Unterrichtspraxis muss der Darstellungswechsel selbst zum Inhalt werden, wie in den folgenden drei Beispielen beschrieben.

➔ **Beispiel 1:**

Lege die Aufgabe 5 + 7 mit Wendeplättchen auf möglichst viele verschiedene Arten.

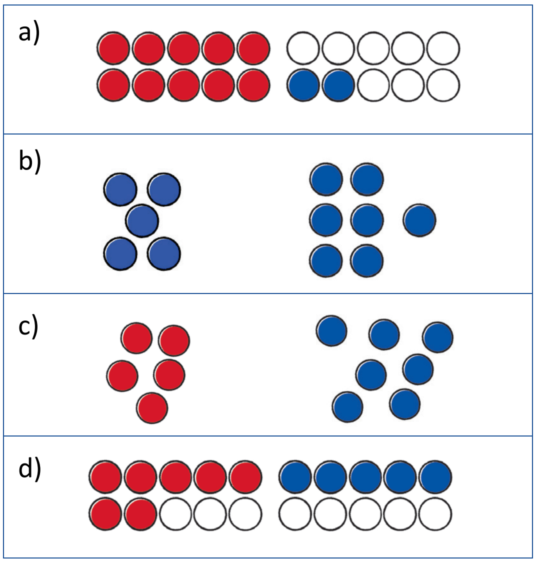


Abbildung 7: Beispiele für verschiedene Darstellungen der Aufgabe 5 + 7 mit Wendeplättchen

➔ **Beispiel 2:**

Findet viele verschiedene Rechenaufgaben zum Bild.

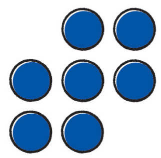
Bild	**Mögliche Deutung**	**Entspre-chende Aufgabe**
	Der Tierpfleger bekommt zu seinen drei Bananen eine vom Affen geschenkt. Dann hat er vier Bananen.	3 + 1 = 4
	Der Affe gibt von seinen zwei Bananen eine an den Tierpfleger und behält eine Banane.	2 – 1 = 1
	Der Tierpfleger und der Affe sind zusammen zwei „Leute“.	1 + 1 = 2
	Der Tierpfleger hat drei Bananen, der Affe hat zwei Bananen. Der Unterschied ist eins.	3 – 2 = 1
	Der Tierpfleger hat drei Bananen, der Affe hat 2 Bananen. Das sind zusammen 5 Bananen.	3 + 2 = 5

Tabelle 4: Darstellungswechsel und verschiedene Deutungsmöglichkeiten als didaktisches Prinzip (vgl. Voigt 1993, S. 149)

➔ **Beispiel 3:**

Peter sieht in diesem Bild die Aufgabe 2 + 3 + 2.

Erkläre, wie Peter auf diese Aufgabe kommt.
Welche Aufgaben kannst du sehen?
Zeige, was du gesehen hast.



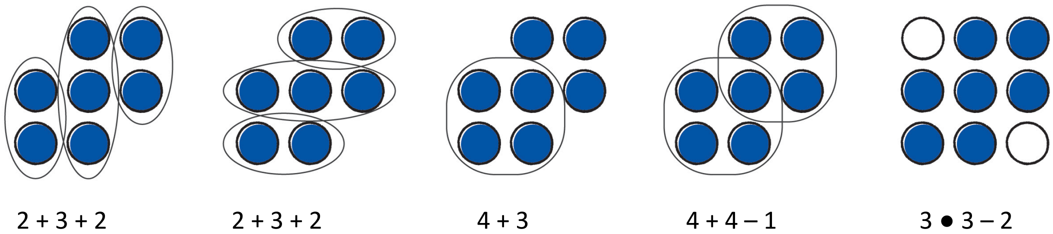


Abbildung 8: Beispiele für verschiedene Deutungen und Aufgaben zur Plättchendarstellung der Menge 7

Im Folgenden wird geklärt, welches didaktische Material beim Aufbau von Grundvorstellungen geeignet ist, und was Lehrkräfte beim Einsatz von Materialien beachten müssen.

Funktionen von Material im Mathematikunterricht

Anschauungsmittel und didaktische Materialien können im Mathematikunterricht genutzt werden, um mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam Zahlen, Zahl- und Aufgabenbeziehungen, Operationen und Rechengesetze „sichtbar" zu machen (siehe oben), und diese auf anschaulicher Basis zu (Grund-)Vorstellungen weiterzuentwickeln. Im Unterrichtsalltag können Anschauungsmittel und Materialien dabei in mindestens drei verschiedenen Funktionen genutzt werden (z. B. Schipper 2009, S. 290 ff.):

- als Lösungshilfe,
- als Mittel zum Kommunizieren, Argumentieren sowie Beweisen und
- als Werkzeug des Lernens.

Jede dieser Funktionen hat im Unterricht ihren Platz und es hängt von der Intention der Lehrkraft ab, in welcher Funktion das Material zu welchem Zeitpunkt im Lernprozess schließlich genutzt wird. In der Tabelle 5 auf der folgenden Seite wird deutlich, dass es nur weniger Impulse bedarf, die Materialhandlungen und somit den mathematischen Gehalt der Handlungen zum Kern des Unterrichts zu machen.

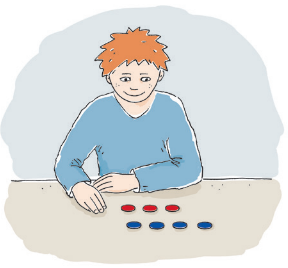
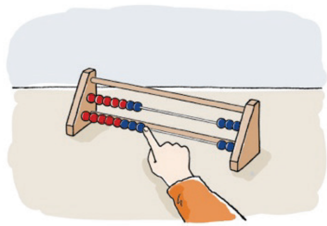
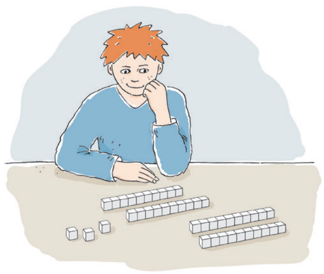
Funktion des Materials	Mögliche Intention	Didaktisches Material und mögliche Arbeitsaufträge		
		Plättchen	Rechenrahmen	Zehnersystem-Blöcke
Lösungshilfe	**Lösen der Aufgabe, erster Zugang**	Löse die Aufgabe 3 + 4 mit Material. 	Löse die Aufgabe 7 + 8 mit Material. 	Löse die Aufgabe 23 + 20 mit Material. 
Mittel zum Kommunizieren, Argumentieren, Beweisen	**Bewusstmachen und Reflektieren des eigenen Vorgehens (und ggf. kennenlernen und reflektieren des Vorgehens anderer)** **Gemeinsames Entwickeln mathematischer Ideen** **Diagnose: Wie geht die Schülerin oder der Schüler vor?**	Beschreibe dein Vorgehen. Peter behauptet 3 + 4 und 4 + 3 sei dasselbe. Prüfe mit den Plättchen und erkläre. Welche Aufgabe sieht Peter? Welche Aufgaben kann man noch sehen? Beschreibe.	Beschreibe dein Vorgehen. Wie ermittelst du die Lösung? Ute löst die Aufgabe mithilfe der Verdopplungsaufgabe 7 + 7 + 1. Melina sagt dazu: „Ich mache das anders. Ich mache erstmal die obere Reihe voll.“ Geht das? Beschreibe, wie du die Aufgabe löst. Was ist an Melinas Lösung anders als an deiner? Erkläre.	Beschreibe dein Vorgehen. Was verändert sich bei den Zehnern, was bei den Einern? Beschreibe, was passiert, wenn du noch einen Zehner dazulegst. Und noch einen, und noch einen, ...
Werkzeug des Lernens	**Verinnerlichung von Handlungen** **Erste Verallgemeinerungen des Einzelfalls** **Aufbau von Grundvorstellungen, Erkennen von mathematischen Zusammenhängen**	Ist 3 + 4 dasselbe wie 4 + 3? Woher weißt du das? Prüfe mit den Plättchen, ob das bei Plusaufgaben immer so ist. Stell dir vor, vor dir liegen drei rote Plättchen und vier blaue Plättchen. Wie viele sind das zusammen? Wenn man die Plättchen tauscht, sind das immer noch gleich viele? Was müsstest du mit dem Material machen, damit ...	Wenn du erst den oberen Zehner vollmachst, wie musst du dann deine zweite Zahl zerlegen? Stell dir vor, du hast das Doppelte von 7 eingestellt. Was müsstest du machen, um 7 + 8 herauszubekommen? Was müsstest du mit dem Material machen, damit...	Ayse sagt: „Wenn ich nur Zehner dazutue, ändert sich an den Einern nichts.“ Prüfe mit dem Material. Stell dir vor, du legst 2Z und 3E. Was ändert sich, wenn noch zwei Zehner dazukommen? Welche Zahl hast du dann? Was müsstest du mit dem Material machen, damit ...
Mögliche Lernziele		**Kennenlernen des Kommutativgesetzes**	**Kennenlernen und Reflektieren verschiedener Rechenstrategien unter Nutzung von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen**	**Bei der Addition und Subtraktion ganzer Zehner ändert sich an der Einerstelle nichts.**

Tabelle 5: Funktionen unterschiedlicher didaktischer Materialien bei verschiedenen Lernzielen

Welches Material kann das Rechnenlernen gut unterstützen?

Ein einziges bzw. bestes Material zum Rechnenlernen gibt es nicht. Stattdessen muss das Material passend zum jeweilig angestrebten Lerninhalt ausgewählt werden. Dabei sollte trotzdem beachtet werden, die Anzahl an strukturell unterschiedlichem Material eher gering zu halten, da jedes Material ein neuer Repräsentant ist und der Umgang mit diesem und seine möglichen Deutungsweisen neu gelernt werden müssen (Schipper und Hülshoff 1984, Wittmann 1993).

Strukturelle Passung

Besonders beim Einsatz des Materials als Werkzeug des Lernens ist eine strukturelle Passung zwischen dem Material bzw. den Handlungen am Material und den angestrebten Lerninhalten wichtig. Dies sei an vier Beispielen erläutert:

➔ Beispiel 1:

Ein wichtiges arithmetisches Konzept ist die *Konstanz der Summe* (siehe Kapitel 1.3). Dieses Grundkonzept kann sehr anschaulich mit Wendeplättchen thematisiert werden. Beide Summanden können farblich unterschieden werden. Durch ein Umdrehen eines Plättchens (oder mehrerer) wird deutlich, dass sich beide Summanden ändern. Der eine wird größer, während der andere gleichzeitig kleiner wird. An der Summe, der Gesamtanzahl der Plättchen, ändert sich dabei nichts.

Wendeplättchen

Drehe ein blaues Plättchen um.
Was passiert mit der Anzahl der blauen Plättchen?
Was passiert mit der Anzahl der roten Plättchen?
Was passiert mit der Anzahl aller Plättchen?

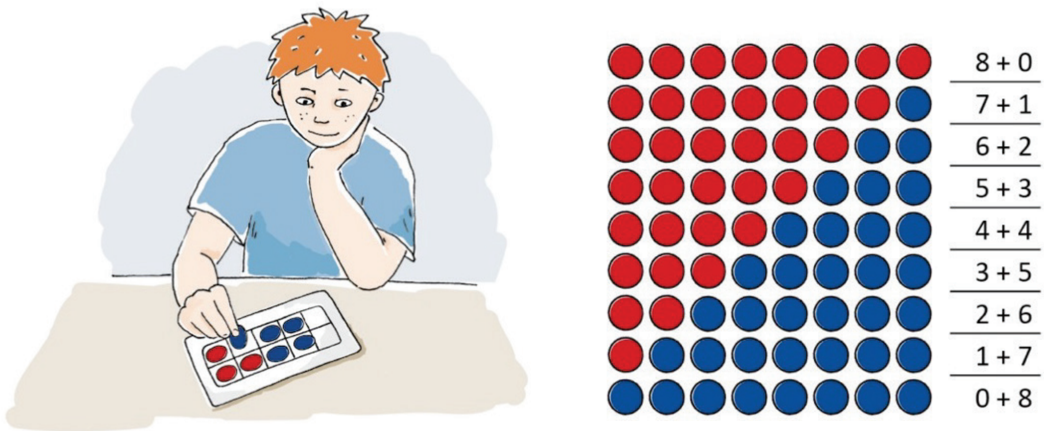


Abbildung 9: Konstanz der Summe und gegensinniges Verändern veranschaulicht mit Wendeplättchen

➔ Beispiel 2:

Zehnersystem-Blöcke

Die Reihenfolge der Stellenwerte beim Aufschreiben von Zahlen kann gut mit den Zehnersystem-Blöcken veranschaulicht werden. An den Zehnersystem-Blöcken sind die Bündelungseinheiten unseres Stellenwertsystems repräsentiert, sodass deren Zusammenhang nachvollzogen werden kann. So kann zum Beispiel besprochen werden, wie viele Einer ein Zehner hat oder aus wie vielen Zehnern ein Hunderter oder ein Tausender besteht. Die stellengerechte Sortierung der Zehnersystem-Blöcke ermöglicht zudem die Thematisierung des Zusammenhangs zwischen der Position der einzelnen Stellenwerte und deren Mächtigkeit. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler visuell abspeichern, wo genau Tausender(würfel), Hunderter(platten), Zehner(stangen) und Einer(würfel) liegen müssen, wenn eine Zahl entsprechend ihrer Stellenwerte sortiert und notiert wird.

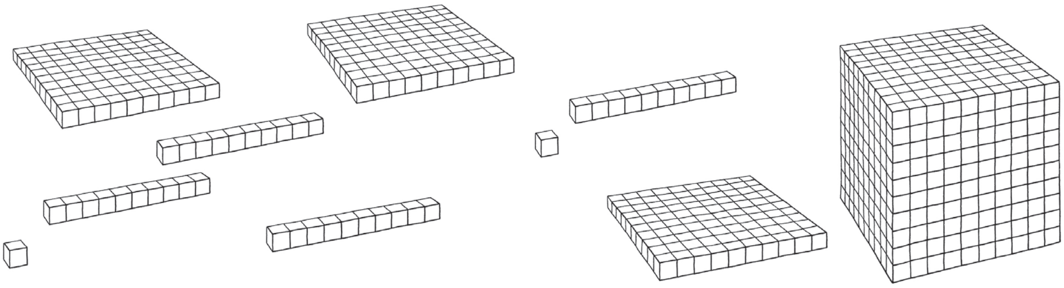


Abbildung 10: (Ungeordnete) Zehnersystem-Blöcke für die Darstellung der Zahl 1 342

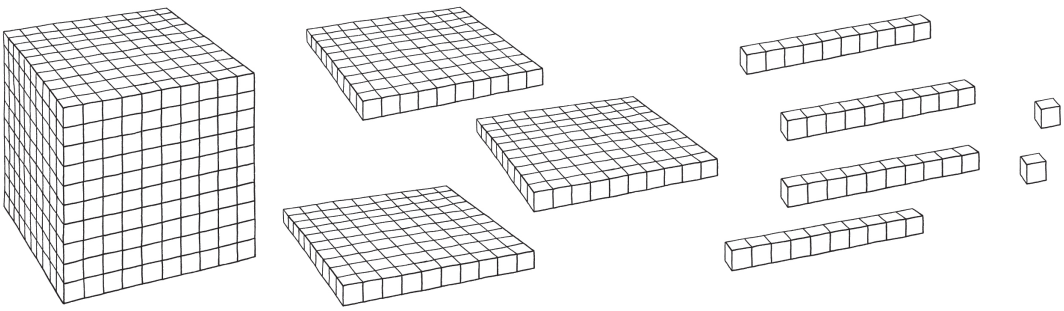


Abbildung 11: (Geordnete) Zehnersystem-Blöcke für die die Darstellung der Zahl 1 342

Eine deutliche Abstraktion dieser Darstellung stellt das Legen von Plättchen in einer Stellenwerttafel dar. Hier wird nur noch die Anzahl der jeweiligen Bündel markiert (hier durch Plättchen).

Tausender	**H**underter	**Z**ehner	**E**iner	**Zahl**
●	●●●	●●●●	●●	1 342
1	3	4	2	

Tabelle 6: Stellenwerttafel mit der Darstellung der Zahl 1 342

➔ **Beispiel 3:**

Rechenrahmen

Das schrittweise Rechnen über den Zehner (zum Beispiel bei der Aufgabe 6 + 7 über 6 + 4 = 10 und 10 + 3 = 13) kann gut mit dem Rechenrahmen thematisiert, veranschaulicht und gefestigt werden. An diesem Material muss der zweite Summand zerlegt werden, wenn der erste Summand zunächst bis zum Zehner aufgefüllt (also eine Zehner-Stange vollgemacht) wird. Die Strukturierung des Materials in Zehner-Stangen, die aufgefüllt werden, stimmt strukturell mit dem angestrebten Rechenweg überein (Schipper 2009, S. 113).

Abbildung 12: Rechenstrategie *Schrittweise* am Rechenrahmen dargestellt

➔ **Beispiel 4:**

Rechenstrich

Ein weiteres Lernziel im Mathematikunterricht ist das Verstehen und Nachvollziehen verschiedener Rechenstrategien. Zur Veranschaulichung von Rechenstrategien eignet sich kaum ein Material so gut wie der Rechenstrich (siehe dazu Lorenz 2008). Der Rechenstrich ist dabei als leerer Zahlenstrahl zu verstehen, bei dem es um die Visualisierung von Rechenrichtungen, von Zwischenergebnissen und von Teilschritten beim individuellen Lösen von Rechenaufgaben geht. Die proportionale Relation der Zahlzusammenhänge steht dabei nicht im Vordergrund.

Abbildung 13: Darstellung von Rechenwegen zu 18 + 9 (Hilfsaufgabe und Schrittweise) am Rechenstrich

Für die Auswahl geeigneter Materialien zum Rechnenlernen sollten folgende Kriterien beachtet werden (Schipper 2009, Schulz und Wartha 2011):

- Das Material greift Vorerfahrungen auf.
- Die Struktur des Materials stimmt mit den möglichen Handlungen am Material und den angestrebten mentalen Vorstellungen überein.
- Das Material kann in der Vorstellung genutzt und mental rekonstruiert werden.
- Mengen und Teilmengen können auf einen Blick und nicht abzählend erfasst und auch von den Schülerinnen und Schülern selbst „mit wenigen Handgriffen" dargestellt werden.
- Das Material ist flexibel einsetzbar, um verschiedene Zahlbeziehungen und Zusammenhänge zu entdecken und zu zeigen.
- Das Material ist weiterhin auch für andere Zahlenräume oder Sachverhalte nutzbar.

Wie kann die Entwicklung von Grundvorstellungen unterstützt werden?

Das bloße *Vorhandensein* von Material im Klassenraum reicht nicht aus, damit sich bei den Schülerinnen und Schülern mathematische Grundvorstellungen entwickeln. Ebensowenig führt das *Benutzen des Materials* automatisch zu mathematischen Grundvorstellungen. So kann im Unterricht in diesem Zusammenhang zweierlei beobachtet werden: Es gibt Schülerinnen und Schüler, die das Material einige wenige Male nutzen und den mathematischen Inhalt dann gut und sicher, auch ohne das Material, abrufen und erklären können. Und es gibt die Schülerinnen und Schüler, die zur Lösung von mathematischen Problemen immer wieder das Material nutzen; *ohne* das Material wären sie überfordert.

Diese Schülerinnen und Schüler bedürfen unbedingt einer gezielten Unterstützung. Ziel dieser Unterstützung ist es, dass diesen Schülerinnen und Schülern die in den Materialhandlungen enthaltenen mathematischen Strukturen bewusst werden (Schipper 2003, S. 223). Diese müssen mental abgespeichert und für den Rechenprozess später wieder abrufbar sein. Wie dies gelingen kann, soll im Folgenden skizziert werden.

Kommunikation fördern und fordern am konkreten Material

Bisher wurde betont, dass das Material und die Handlung mit diesem allein *nicht ausreichen*, um mathematische Lernprozesse zu fördern und zu fordern. Die Lehrkraft muss eine gezielte Fokussierung auf die mathematischen Aspekte und Strukturen des Materials bzw. der Handlung am Material anregen. Das gelingt vor allen durch die gemeinsamen Diskussionen über das Material und die Versprachlichung der ausgeführten Handlungen (z. B. Scherer und Moser Opitz 2010, S. 86; Lorenz 1998, S. 186). Die Aufgabe der Lehrkraft ist es dabei, den Austausch anzuregen, zu fordern, zu loben, zu fördern, voranzutreiben und immer wieder auf die relevanten mathematischen Inhalte zu fokussieren (Schulz und Wartha 2011). Dabei kann die Lehrkraft verschiedene Impulse setzen.

Impulse zu intendierten Strukturen und Konventionen bei der Deutung und Nutzung von Material:

- „Aus wie vielen Einern besteht eine Zehnerstange?
  Aus wie vielen Zehnerstangen ist eine Hunderterplatte zusammengesetzt?
  Was hat sich der ‚Erfinder der Zehnerstange' dabei wohl gedacht?"
- „In welche Richtung werden die Zahlen am Zahlenstrahl bzw. am Rechenstrich größer? In welche Richtung werden sie kleiner? Ist das immer so? Warum?"
- „Stelle eine Drei am Rechenrahmen ein. Warum hast du die Kugeln auf diese Seite (auf die linke Seite) geschoben? Ist das wichtig? Warum?"
- „Was bedeutet der Farbwechsel?
  Was hat sich der ‚Erfinder des Rechenrahmens' dabei wohl gedacht?"
- „Warum sind in den Zehnerstangen immer genau zehn Einerwürfel (und nicht etwa elf, zwölf oder neun)? Was hat sich der Erfinder dabei wohl gedacht?"

Impulse zum Besprechen von Materialhandlungen:

- „Erkläre, was genau du gemacht hast."
- „Beschreibe, was Peter gemacht hat.
  Was hat er sich dabei gedacht?"
- „Beschreibe den Unterschied zwischen dem, was Peter und was du getan hast."
- „Wer hat das anders gemacht?"

Impulse zum Nutzen und Verknüpfen verschiedener Darstellungsformen:

- „Male auf, was du gerade gemacht hast. Erkläre, warum die Aufgabe und das Bild zusammenpassen."
- „Kannst du auf diesem Bild eine Rechenaufgabe erkennen?
  Spiele sie nach. Schreibe eine Rechenaufgabe dazu auf. Warum ist das die passende Aufgabe?"
- „Schreibe eine Rechenaufgabe zu dem, was du gerade gemacht hast.
  Warum passt die Rechenaufgabe?"
- „Schreibe eine Aufgabe dazu auf, was Peter gerade gemacht hat.
  Warum passt die Aufgabe?"
- „Hier steht eine Rechenaufgabe. Zeige sie am Material.
  Warum passt das zusammen?"

Ablösung vom Material und den Aufbau von Grundvorstellungen unterstützen

Der Prozess der Ablösung vom Material und der Aufbau von Grundvorstellungen wird unterstützt, wenn die gezielte intensive Kommunikation über Material und Handlungen zunehmend hypothetischer und abstrakter wird und damit verinnerlicht werden kann. Wichtig bei dieser Aktivierung von mentalen Vorstellungen ist selbstverständlich, dass solche und ähnliche Fragen vorher intensiv mit Material und anhand konkreter Handlungen gestellt und somit vorbereitet wurden.

Impulse zur Unterstützung der Ablösung vom Material können die folgenden sein:

- „Was wäre, wenn ...
  ... da jetzt ein Punkt (ein Plättchen, eine Zehnerstange) mehr/weniger wäre?"
  ... du jetzt noch einen Punkt (ein Plättchen, eine Zehnerstange) hinzufügst/ wegnimmst?"
- „Was müsstest du machen, damit ...
  ... dort drei statt vier Plättchen liegen?"
  ... du besser sehen kannst, wie viele es sind?"
  ... es genauso aussieht wie Peters Muster?"
- „Was hast du gemacht, ...
  ... um diese Zahl darzustellen?"
  ... um diese Rechnung zu lösen?"

Vier-Phasen-Modell

Eine weitere unterrichtspraktische Möglichkeit zum Aufbau von Grundvorstellungen, zur Ablösung vom Material und zur Verinnerlichung von Handlungen stellt das sogenannte Vier-Phasen-Modell dar (Schipper et al. 2011, S. 113). Dieses Modell greift verschiedene grundsätzliche Überlegungen zur Verinnerlichung von Handlungen auf (u. a. Aebli 1976, Lorenz 1998, Kutzer 1999, S. 21, Schipper 2009).

Phase 1: Arbeit am eigenen Material Das Kind handelt am geeigneten Material. Der mathematische Gehalt der Handlung wird gemeinsam herausgearbeitet, die Handlung wird mit Fokus auf den mathematischen Inhalt vom Kind sprachlich begleitet.
Phase 2: Beschreiben der Materialhandlung Das Kind beschreibt die Handlung mit Sicht auf das Material, handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einer Partnerin oder einem Partner und kontrolliert dabei die Handlung durch Beobachtung. Das Kind beschreibt mit Blick auf das Material Veränderungen am Material, ohne dass diese durchgeführt werden müssen. Es beschreibt Zusammenhänge, ohne dass diese konkret von ihm hergestellt werden müssen.
Phase 3: Beschreiben der Handlung ohne Sicht auf das Material Das Kind beschreibt einer Partnerin oder einem Partner die Handlung wie zuvor, jedoch ohne die Materialhandlung zu sehen. Für die Beschreibung der Handlung ist das Kind darauf angewiesen, sich die Handlung am Material vorzustellen. Die Handlung wird (z. B. hinter einem Sichtschirm) von der Partnerin oder dem Partner durchgeführt. Die Lösung kann mit dem Material verglichen werden.
Phase 4: Beschreiben der Handlung in der Vorstellung Bei einer symbolisch gestellten Aufgabe kann der Handlungszusammenhang aktiviert werden. Beim Lösen der Aufgabe kann ggf. auf die vorgestellte Handlung zurückgegriffen werden. Die verinnerlichten Handlungen können weiter abstrahiert, vernetzt und auf andere mathematische Inhalte übertragen werden.

Tabelle 7: Vier-Phasen-Modell zur Ablösung vom Material

Das Vier-Phasen-Modell zeigt insbesondere, dass gerade das Versprachlichen und später das Diktieren der Handlung dazu führen, dass die entsprechenden mathematischen Inhalte auf einer höheren Ebene durchdacht und bewusst werden. Dabei ist im Sinne Aeblis darauf zu achten, dass Aufgabe, Lösungsweg und Lösung im Sinne einer Arbeitsrückschau zusammen betrachtet werden (Aebli 1976, S. 108, siehe auch Schipper 2009, Krauthausen und Scherer 2007, Schulz und Wartha 2012). Nur wenn es dabei um mehr als nur um die (richtige) Lösung geht, und der Zusammenhang zur Aufgabenstellung und dem Lösungsweg berücksichtigt wird, können sich mentale Operationen und Grundvorstellungen entwickeln.

Beim Vier-Phasen-Modell handelt es sich eher um einen didaktischen roten Faden als um ein rigide zu beachtendes Rezept (Gerster 1994, S. 35). So gibt es zahlreiche Formate, die eher die didaktisch-methodische Intention berücksichtigen (das Vorstellen, das Beschreiben, das Diktieren) und weniger dem Modell im Wortlaut folgen.

Für die Umsetzung im Unterricht sollten folgende Aspekte berücksichtigt werden:

Nicht zu schnell → Sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren:

- Stellen Sie sicher, dass ein Kind die Anforderung in einer Phase sicher beherrscht, bevor Sie es ermutigen, in die nächste Phase zu wechseln. Eine zu schnelle Ablösung vom Material kann zu Verunsicherungen und Entmutigungen führen.

Nicht zu weit zurück → Bisherige Lernfortschritte ernstnehmen:

- Sollte ein Kind bei der Bearbeitung von Aufgaben ohne Material unsicher werden (zum Beispiel in Phase 3 oder 4), ermutigen Sie das Kind zunächst, nur einen Schritt zurückzugehen. Häufig reicht schon der Hinweis auf das Material bzw. die erarbeitete Vorstellung, dass jemand anderes die Handlung ausführen muss, für die gedankliche Rekonstruktion des Rechenwegs.

Nicht zu „gegenständlich" → Mathematische Fachsprache aufbauen:

- Achten Sie darauf, dass das Vokabular, das die Schülerinnen und Schüler bei der Versprachlichung nutzen, nicht zu gegenständlich ist (siehe Abb. 6, S. 19), sondern dass es immer auch Elemente der symbolisch-abstrakten Ebene enthält. So sollte zum Beispiel von Hundertern oder Hunderter-Platten und Zehnern oder Zehner-Stangen gesprochen werden und nicht nur von Platten und Stangen.

Das Vier-Phasen-Modell eignet sich zudem für das diagnostische Vorgehen, um zu überprüfen, ob und inwieweit ein Kind bereits in der Lage ist, Aufgaben ohne konkrete Handlung bzw. konkrete Anschauung zu lösen (z. B. Wartha und Schulz 2012, S. 73 und S. 99; siehe auch Kapitel 4.1).

2.2 Mathematik gemeinsam lernen

Der Aufbau von Grundvorstellungen und die gemeinsame Erarbeitung des mentalen Werkzeugs können besonders gut funktionieren, wenn der Mathematikunterricht regelmäßig für stetigen inhaltlichen und beziehungsreichen Austausch genutzt wird.

Das heißt, der Mathematikunterricht muss Raum schaffen für individuelle Entdeckungen, für die Nutzung und Anwendung von bereits erworbenem Wissen, für das individuelle Bearbeiten bekannter und auch neuer Probleme. Gleichzeitig muss Mathematikunterricht aber auch zum Austausch anregen: Zum Austausch über das eigene Vorgehen und das der anderen, zum Austausch über Ergebnisse und Fehler und zum Austausch über die mathematischen Inhalte (Zahlen, Operationen, arithmetische Beziehungen, Regeln, ...).

Individuelles und gemeinsames Lernen

Folglich ist Mathematiklernen ein *individueller*, aber in besonderer Weise auch ein *sozialer* Prozess (z. B. Bauersfeld 1993). Individuell ist Lernen, weil neues Wissen an individuelle Vorkenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten angedockt wird und mentale Verarbeitungsprozesse das Andocken und den Lernprozess steuern. Sozial ist Lernen, weil diese bewusste und reflektierte Auseinandersetzung durch sozialen Austausch angeregt und auch gesteuert werden kann. Sozial ist Lernen darüber hinaus, weil erst durch den sozialen Austausch gemeinsame Bedeutungen geschaffen werden – erst die gemeinsame Nutzung des Wortes „drei" für die Menge „ ●●● " gibt dem Wort „drei" eine Bedeutung und der Menge „ ●●● " einen Namen, der auch unabhängig von ihr genutzt werden kann. Oder schärfer formuliert: Ohne Austausch und gemeinsames Aushandeln von Bedeutung gäbe es keine Mathematik und kein Mathematiklernen. Somit ist die Auffassung von Mathematiklernen als individueller *und* sozialer Prozess grundlegend für die Gestaltung von Mathematikunterricht – dies gilt auch für das verstehende Üben.

Heterogenität

Vorkenntnisse im Anfangsunterricht

Viele Kinder, die in die Schule kommen, haben schon vielfältige arithmetische Vorerfahrungen und Kompetenzen: Sie können zum Beispiel die Zahlwortreihe aufsagen, sie können eine überschaubare Menge von Objekten abzählen und sie können kleine Mengen mit einem Blick identifizieren, sie erkennen Ziffern und können diese richtig benennen und sie können einfache Rechengeschichten (materialgestützt) lösen („Peter hat drei Autos und bekommt noch zwei dazu. Wie viele hat er dann?“) (zusammenfassend Hasemann und Gasteiger 2014, S. 24–38). Manche Kinder können sogar schon einfache Plus- und Minusaufgaben lösen – zum Beispiel die Aufgabe 3 + 2. Dabei ist dreierlei zu beobachten:

1) Die arithmetischen Kompetenzen von Schulanfängerinnen und -anfängern unterscheiden sich sehr. Das heißt, dass es Kinder gibt, die bereits einzelne Inhalte des zweiten Schuljahres sicher beherrschen, und dass es andererseits Kinder gibt, die im wahrsten Sinne des Wortes nicht bis fünf zählen können (z. B. Schipper 1998).

2) Es gibt einen großen Unterschied zwischen *informellem* mathematischen Wissen und Können (z. B. das materialgestützte Lösen einer Rechengeschichte – das fällt vielen Kindern leicht) und *formellem* mathematischen Wissen und Können (z. B. das Lösen der Aufgabe 3 + 2 – das können nur einige Kinder zu Schulbeginn) (Schipper 2009, S. 34 f.; siehe auch Kapitel 2.1, Abb. 5, S. 19).

3) Das richtige *Lösen* von Rechengeschichten und einfachen Rechnungen muss nicht darauf hindeuten, dass ein Kind bereits *rechnen* kann – denn zur Lösung dieser Aufgaben muss man nicht rechnen können, Zählen reicht hier zur Lösungsfindung. Vom Rechnen spricht man, wenn bei der Lösung auf mentale Werkzeuge zurückgegriffen wird: Das Nutzen von auswendig gewussten Aufgaben, das Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen, ein tragfähiges Operationsverständnis und das Anwenden von Rechengesetzen und arithmetischen Konzepten (wie z. B. dem Stellenwertsystem oder dem Vertauschungsgesetz). Diese „mentalen Werkzeuge“ (siehe Kapitel 1.3) stehen den wenigsten Kindern bereits zu Schulbeginn komplett zur Verfügung – und daher greifen sie auf ein bis dahin erfolgreiches Vorgehen zurück: das Abzählen.

Diese Heterogenität, die bereits zu Beginn der Schulzeit besteht, wird im Laufe der Schulzeit nicht geringer. Aufgabe der Schule ist es, dieser Heterogenität zu begegnen. Dabei kann sie auch als Chance verstanden werden.

Heterogenität berücksichtigen und nutzen

Es gibt mittlerweile viele unterrichtspraktische Beispiele für den Umgang mit Heterogenität und für gelingende Differenzierung (Nührenbörger und Pust 2011, Krauthausen und Scherer 2014, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019). Das Ziel vieler dieser unterrichtpraktischen Beispiele ist es nicht nur, dieser immer größer werdenden Heterogenität methodisch zu begegnen. Das Ziel wird vielmehr von den mathematischen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler und vom mathematischen Inhalt aus gedacht. Dabei wird der Heterogenität der Lernenden nicht nur begegnet, sondern sie wird genutzt, um mathematische Inhalte im Sinne eines Spiralcurriculums zu vernetzen und um die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu reflektieren. Damit dies möglich wird, sollten folgende Aspekte berücksichtigt werden:

- Die Schülerinnen und Schüler arbeiten an *einem* Inhalt (vielleicht sogar an der gleichen Aufgabe, arbeitsteilig oder individuell, ggf. mit Adaptionen).
- Jedes Kind hat zunächst die Möglichkeit auf seinem *individuellen Niveau* die Aufgabenstellung zu bearbeiten.

- Alle Schülerinnen und Schüler *reflektieren* das Vorgehen und/oder den Inhalt der gegebenen Aufgabe *gemeinsam* (als Klasse oder in kleinen Gruppen oder Paaren).
- Die gegebene Aufgabe ist *mathematisch reichhaltig*. Um dies einschätzen zu können, ist eine gründliche didaktische Sachanalyse notwendig.
- Die genutzten Darstellungsmittel sind *tragfähig und fortsetzbar* (z. B. rechteckige Punktemuster zur Thematisierung multiplikativer Strukturen).
- Die Lehrkraft kann die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, die Lösungen und die jeweiligen Vorgehensweisen zu *strukturieren* und *zu vernetzen*.
- Dabei ist die Grundvoraussetzung, dass die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler zu einer *prozessorientierten Reflexion* auffordert (Wie habt ihr das gemacht? Was war besonders einfach? Warum war das einfach? Verstehst du, wie Evelyn vorgegangen ist? Beschreibe mit eigenen Worten. Was hat dein Vorgehen mit der Aufgabe gestern zu tun? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede fallen dir auf? u. v. m.).

Im Folgenden werden zwei Beispiele vorgestellt, wie der Heterogenität von Lerngruppen begegnet und wie sie für das gemeinsame Mathematiklernen genutzt werden kann.

Beispiel: Stellenwerte verstehen

Ein gutes Beispiel für die Erarbeitung, das Verstehen und Reflektieren eines grundlegenden mathematischen Inhalts in heterogenen Lerngruppen ist die Thematisierung der Stellenwerte. Das grundlegende Prinzip, auf dem das Stellenwertsystem beruht, ist das Prinzip der fortgesetzten Bündelung. Durch die fortgesetzte Bündelung werden die einzelnen Stellenwerte gebildet (Zehner, Hunderter, Tausender, ... und die verbleibenden Einer, die in kein Bündel mehr passen). Das *Bilden von Bündeln* kann dabei unabhängig vom Zahlenraum erfolgen, in dem sich die Schülerinnen und Schüler bereits sicher orientieren können, da es beim Bündeln ausschließlich darum geht „Immer zehn von einer Sorte“ zusammenzufassen. Auch das *Sortieren* der Bündel entsprechend ihres Stellenwerts ist unabhängig vom Zahlenraum, in dem sich die Lernenden sicher orientieren können. Es ist somit möglich, dass jeder Schüler in seinem Zahlenraum und damit auf seinem Niveau arbeitet (Schulz und Reinold 2017).

Eine *konkrete Aufgabenstellung* zum Einstieg kann lauten: „Hier liegen sehr viele kleine Holzwürfel (Streichhölzer, Bohnen, ...). Legt die Würfel so hin, dass man gut sehen und *aufschreiben* kann, wie viele es sind.“

Mit dieser Aufgabenstellung können die Schülerinnen und Schüler auf ihrem jeweiligen Verstehens-Niveau unterschiedliche Lernziele erreichen. Im Bereich *Zählen* der Objekte reichen diese vom einzelnen Abzählen in kleinen Zahlenräumen, über das Zählen in Zweier- oder Fünferschritten bis hin zum Zählen in Zehner- oder Hunderterschritten im höheren Zahlenraum.

Da die Aufgabenstellung eine *strukturierte* und *gebündelte Anordnung* der Würfel erfordert, können auch hier unterschiedliche Ziele erreicht werden: Die Schülerinnen und Schüler nehmen „individuelle“ Bündelungen vor; es entstehen Fünfer- oder Zehnerbündel (Abb. 14, S. 33); Zehnerbündel werden ihrerseits wieder zusammengefasst zu Hundertern. Dabei ist es wichtig, den Sinn der Bündelung nachzuvollziehen und die Anzahl der Bündel für das weitere Vorgehen zu nutzen. Einige Schülerinnen und Schüler werden dabei „nur“ wissen, wie viele einzelne Würfel sie jeweils gebündelt haben, andere können bereits den Zusammenhang zwischen verschiedenen Bündelungen herstellen (zwei Fünfer sind immer ein Zehner; für einen Hunderter brauche ich zehn Zehner; ein Hunderter besteht aus zwanzig Fünfern).

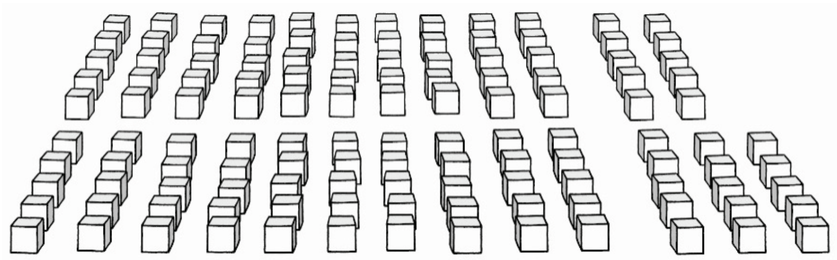


Abbildung 14: Strukturierte Anordnung von Würfeln unter Nutzung von Fünfer- und Zehnerbündeln

Auch beim *Aufschreiben* der Anzahl der strukturierten Objekte können verschiedene Lernziele erreicht und vor allem auch verschiedene Gesprächsanlässe geschaffen werden. Die Notationen können sich dabei sehr unterscheiden (Abb. 15). Hierbei können sehr unkonventionelle Schreibweisen entstehen, die aber durchaus begründet werden: „Hundert hat ja zwei Nullen, eine vorn und eine hinten.“ (Schulz und Reinold 2017, S. 51).

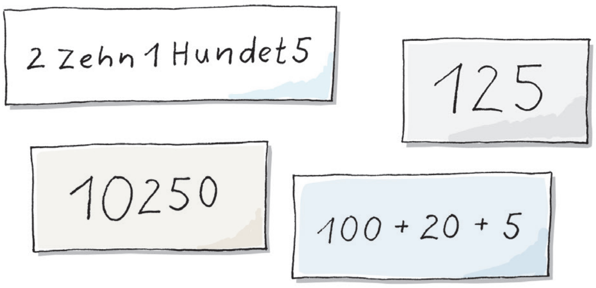


Abbildung 15: Verschiedene Schreibweisen der 125 von Schülerinnen und Schülern

Das gemeinsame Lernziel besteht darin zu verstehen, dass durch die *Nutzung von Ziffern* große Zahlen dargestellt werden können. Wie genau die Ziffern angeordnet werden und warum beim Aufschreiben Nullen genutzt werden, kann dann in einer weiteren Sequenz aufgegriffen werden.

Hierfür werden den Schülerinnen und Schülern die Zehnersystem-Blöcke zum Sortieren und eine Stellenwerttafel zum Notieren zur Verfügung gestellt. Die *konkrete Aufgabenstellung* in dieser Sequenz lautet: „Sortiert die vorgegebenen Zehnersystem-Bündel und schreibt die Zahlen auf.“ (siehe auch Abb. 10 und Abb. 11, S. 25). Mit der gegebenen Aufgabenstellung können die Schülerinnen und Schülern einerseits lernen, dass die Bündelungseinheiten (Einer, Zehner, Hunderter, ...) immer in der gleichen Reihenfolge angeordnet werden, und andererseits, dass für die Notation der Anzahl der Gesamtmenge nur die Anzahl der entsprechenden Bündel an der entsprechenden Stelle aufgeschrieben werden muss. In diesem Zusammenhang kann dann auch die Rolle der Null geklärt werden (Abb. 16).

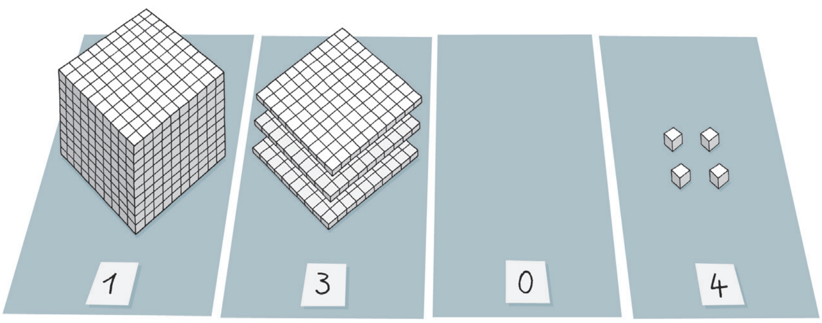


Abbildung 16: Zahlen notieren mithilfe von Ziffernkarten und Zehnersystem-Blöcken

Bei der *Sortierung nach Stellenwerten* können verschiedene Lernziele angestrebt werden. Einige Schülerinnen und Schüler werden gleiche Bündelungseinheiten identifizieren und passend zuordnen können (Zehner zu Zehnern, Einer zu Einern, Hunderter zu Hundertern); andere werden schon richtig sortieren unter Berücksichtigung freier Stellen (wenn z. B. keine Zehner gegeben sind); wieder andere Schülerinnen und Schüler können schon Verknüpfungen zwischen benachbarten Stellenwerten erkennen und erklären (linker Nachbar immer „mal 10“, rechter Nachbar immer „durch 10“). Auch beim Aufschreiben können unterschiedliche Lernziele erreicht werden: das Notieren der jeweiligen Anzahlen der vorgegebenen Bündel, das Erkennen des Zusammenhangs zwischen verschiedenen Schreibweisen (Abb. 15, S.33).

Beispiel: Schnelles Sehen

Ein weiteres Aufgabenformat für das Lernen und Üben in heterogenen Lerngruppen unter Beachtung des individuellen und sozialen Lernens ist das Schnelle Sehen. Das Schnelle Sehen (oder auch die quasi-simultane Zahlauffassung oder Blitz-Blick-Übungen) bietet nicht nur für den Anfangsunterricht viele Lernmöglichkeiten für Schülerinnen und Schüler (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019). Diese Lernmöglichkeiten sind sowohl prozess- als auch inhaltsbezogen und zwar auf sehr verschiedenen Leistungsniveaus. Zu den wichtigsten inhaltsbezogenen Lernzielen gehören

- die Entwicklung und Nutzung eines Teil-Ganzes-Verständnisses,
- das Erkennen, Deuten und Nutzen von arithmetischen Strukturen und
- das Sehen und Nutzen von Zusammenhängen zwischen Zahlen und Operationen (siehe auch Kapitel 1.3).

Das Schnelle Sehen zielt auf die gedankliche Rekonstruktion von etwas Gesehenem, um auf diese Weise mentale Vorstellungsbilder zu entwickeln (siehe auch Kapitel 2.1).

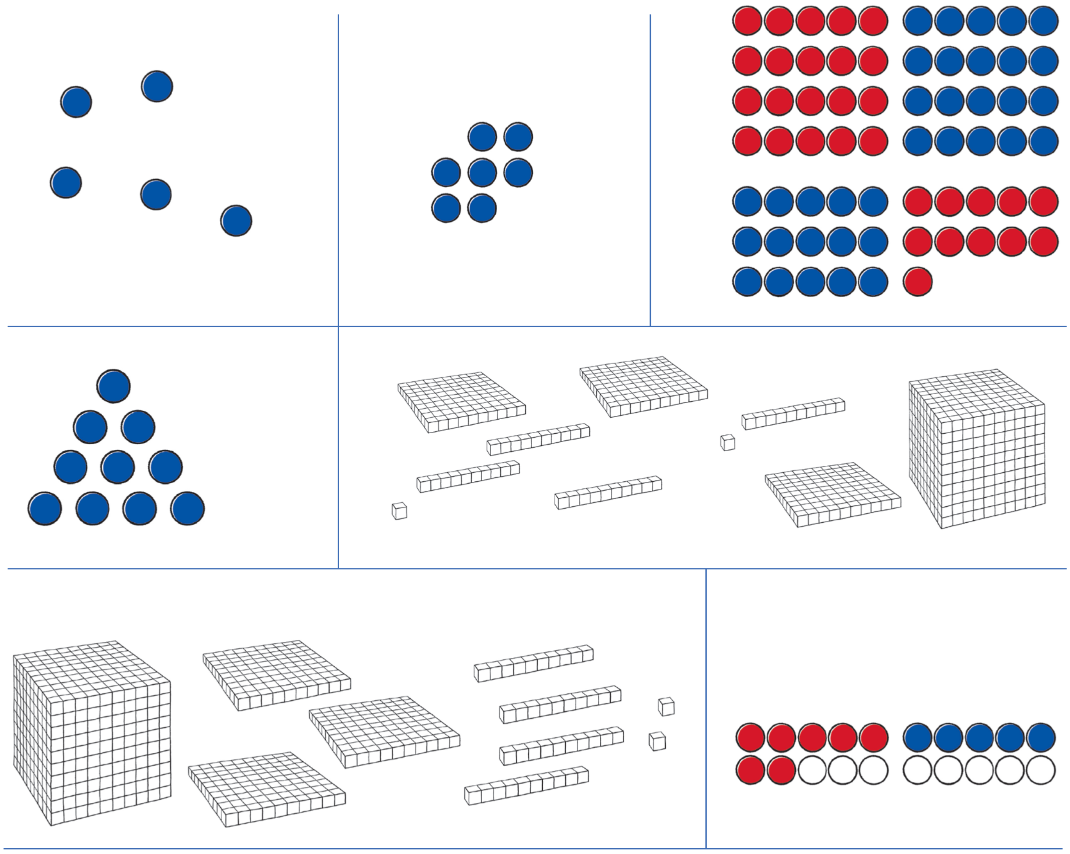


Abbildung 17: Unterschiedliche Mengendarstellung in verschiedenen Zahlenräumen zum Schnellen Sehen

Beim Schnellen Sehen wird den Schülerinnen und Schülern eine Menge gezeigt – jedoch nur kurz. Aufgabe der Lernenden ist es dann zu erklären, *wie* sie die entsprechende Menge gesehen haben – die korrekte Anzahl ist dabei nachrangig. Kleine Mengen können dabei auch unstrukturiert gezeigt werden (Abb 17 (links oben), S. 34).

Bereits früh im ersten Schuljahr kann das Schnelle Sehen vor allem mit kleinen Mengen mit den Schülerinnen und Schülern als wiederkehrendes Format genutzt werden. Es hat sich gezeigt, dass eine Durchführung des Formats mit vielen Lernenden gemeinsam nicht nur unterrichtspraktisch von Vorteil ist, sondern auch von der Sache her: Je mehr Lernende beim Schnellen Sehen mitmachen, desto reichhaltiger sind die Beiträge zu den Impulsfragen und Anregungen.

Mögliche Impulsfragen und Anregungen beim Schnellen Sehen sind die folgenden:

- „Was genau hast du gesehen?“
- „Woher weißt du, wie viele es sind?“
- „Wer hat das noch anders gesehen?“
- „Beschreibe noch einmal, wie Peter das gesehen hat.“
- „Du kannst es nicht genau sagen? Gibt es Ausschnitte bei denen du dir sicher bist? Wie sahen die aus?“
- „Wie viele Punkte waren es höchstens? Wie viele wenigstens?“
- „Waren das mehr (oder weniger) als 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1 000, ...?“
- „Schreibe eine passende Aufgabe (passende Zahlen) dazu auf, was du gesehen hast.“
- „Zeige nochmal am Material, was du gesehen hast.“

Dabei kann die Lehrkraft auf verschiedene Aspekte achten:

Wert legen auf das Beschreiben des Gesehenen

Gute, das heißt, nachvollziehbare Beschreibungen und Begründungen werden verstärkt und nicht ausschließlich das Nennen der richtigen Anzahl. Dadurch erleben die Schülerinnen und Schüler die *Kommunikation* über mathematische Sachverhalte als festen Bestandteil des Mathematiklernens. So kann eine *konstruktive Fehler- und Gesprächskultur* etabliert werden: Ergebnisse sind nachrangig, wenn die Begründung nachvollziehbar ist („Sehr gut, du hast also acht gesehen, weil du drei und fünf gesehen hast.“). Hinzu kommt, dass gut nachvollziehbare Beschreibungen im Nachhinein nicht geschmälert werden, wenn die beschriebene Menge *nicht* mit dem Gezeigten übereinstimmt.

Die korrekte Anzahl wird am Ende der Diskussion *nicht* gezeigt oder genannt – auf jeden Fall nicht immer. Viele Unterrichtsversuche haben nachgewiesen, dass es Schülerinnen und Schülern nichts ausmacht, wenn das Schnelle Sehen nicht „aufgelöst“ wird – aber nur dann nicht, wenn im Vorfeld gute Erklärungen gefordert, thematisiert und somit verstärkt wurden.

Verknüpfen verschiedener Darstellungsebenen

Um *tragfähige Grundvorstellungen* zu Zahlen und ihren Beziehungen zu entwickeln, ist es wichtig, verschiedene Darstellungsebenen immer wieder zu verknüpfen. Dies kann auf unterschiedlichen Wegen geschehen. Zum Beispiel kann das Gesehene während der Beschreibung nachgezeichnet oder nachgelegt werden, und ebenso kann es parallel auch symbolisch dokumentiert werden.

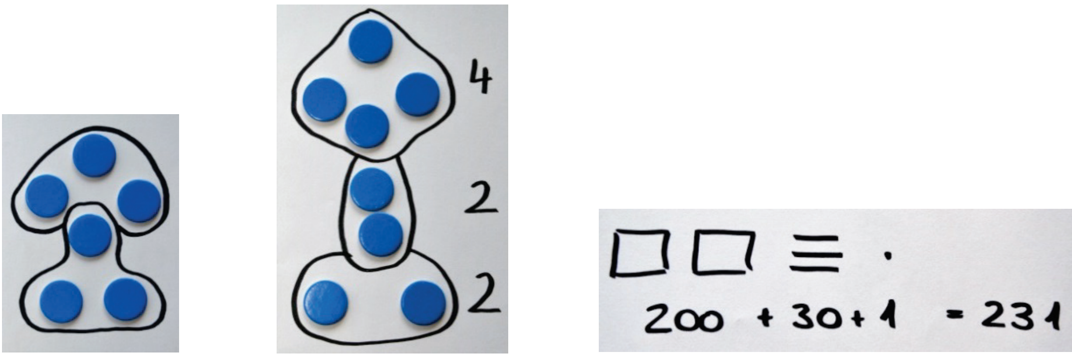


Abbildung 18: Strukturierung, Nachzeichnen und Beschriften von gesehenen Mustern

Verknüpfen verschiedener Schülerantworten und Heterogenität nutzen

Wenn das Schnelle Sehen mit mehreren Schülerinnen und Schülern durchgeführt wird, dann werden automatisch verschiedene gesehene Anzahlen und Strukturierungen genannt („Ich habe acht gesehen, da waren viermal jeweils zwei“ – „Nein, das waren sieben, weil da waren drei und drei und noch einer, ganz am Rand.“). Aufgabe der Lehrkraft ist es, diese verschiedenen Aussagen zu *vernetzen* und zu *bündeln*.

Wenn alle Schülerinnen und Schüler das Format *Schnelles Sehen* kennen und mit möglichen Kommunikationsmustern vertraut sind, dann kann das Schnelle Sehen auch in Partnerarbeit oder in Kleingruppen gelingen.

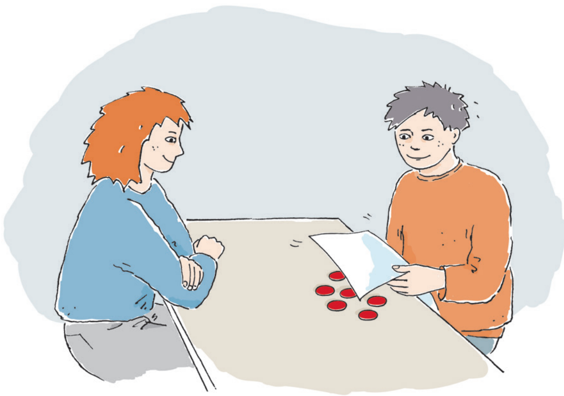


Abbildung 19: Schnelles Sehen in Partnerarbeit – wichtig sind die Beschreibungen und Erklärungen

Als Partner- oder Gruppenformat bekommt das Schnelle Sehen einige zusätzliche spannende Aspekte:

- Es kann sinnvoll sein, dass die Schülerinnen und Schüler sich vorher auf einen Zahlenraum, auf eine bestimmte Art der Anordnung („Aber nicht alles einfach nur in eine Reihe.“) oder auf ein bestimmtes Arbeitsmittel einigen („Zuerst am Rechenrahmen und nachher wieder mit dem Zehnersystem-Blöcken.“).
- Fast automatisch versuchen die Schülerinnen und Schüler nun besonders *leichte* oder *schwere* Anordnungen zu legen.
- Diese erklärte Absicht kann im Folgenden dazu führen, dass sich die Schülerinnen und Schüler darüber austauschen, ob und warum bestimmte Anordnungen leichter und schneller zu sehen sind als andere.

- Im Anschluss daran können ggf. Umstrukturierungen vorgenommen werden, um die Anordnung *subjektiv* noch besser erkennbar zu machen.

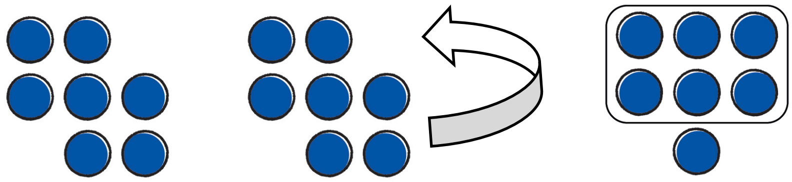


Abbildung 20: Mentales oder reales Umstrukturieren zum „besseren Sehen“ und Erklären

2.3 Verstehendes und beziehungsreiches Lernen und Üben

Üben ist ein unverzichtbarer Bestandteil des Mathematikunterrichts (Schipper 2009, S. 304). Allerdings ist es Aufgabe der Lehrkraft, gut abzuschätzen, ab wann welcher Inhalt für welches Kind übenswert ist. Der Erfolg *verstehenden Übens* hängt in erster Linie davon ab, inwieweit bereits *verstanden wurde*, was geübt werden soll, denn: „Üben ohne Verständnisgrundlage ist bestenfalls unwirksam“ und „Üben kann fehlendes Verständnis nicht ersetzen“ (Schipper 2009, S. 304; ein sehr guter Überblick über Phasen des verständnisbasierten Übens findet sich unter Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019 (2)).

Aus diesem Grund hängt verständnisorientiertes Lernen und Üben direkt zusammen, sowohl methodisch als auch zeitlich. Das Üben von verstandenen Inhalten sollte deshalb folgende Merkmale aufweisen (z. B. Wittmann 1992, Schipper 2009):

- Vernetzung von *Darstellungsebenen* (anschauungsgebundenes Üben),
- Vernetzung von *Inhalten* (operatives und strukturorientiertes Üben),
- Vernetzung von *Vorkenntnissen und Lernzielen* (anwendungsorientiertes Üben).

Vernetzung von Darstellungsebenen

Wie bereits ausformuliert (siehe Kapitel 2.1), bildet die Vernetzung von Darstellungsebenen den Kern des verständnisorientierten Mathematiklernens. Dies gilt auch für das verstehende Üben. Gerade durch vielfältige und anschauliche Verknüpfungen können Inhalte besser behalten und wieder abgerufen werden.

Am Beispiel des kleinen Einspluseins wird gezeigt, wie gleiche Inhalte auf verschiedenen Darstellungsebenen miteinander verknüpft sind. So können die Aufgaben des „kleinen Einspluseins der Acht“ folgendermaßen dargestellt und aufgefasst werden:

- *handelnd* (z. B. durch Plättchenwerfen oder das Halten eines Stiftes zwischen zwei Mengen am Rechenrahmen),
- durch *Bilder* (z. B. durch Plättchendarstellungen, aber auch durch Bilder von Handlungen),
- als (Rechen-)*Geschichten* oder
- *symbolisch* (entweder schriftlich oder verbal).

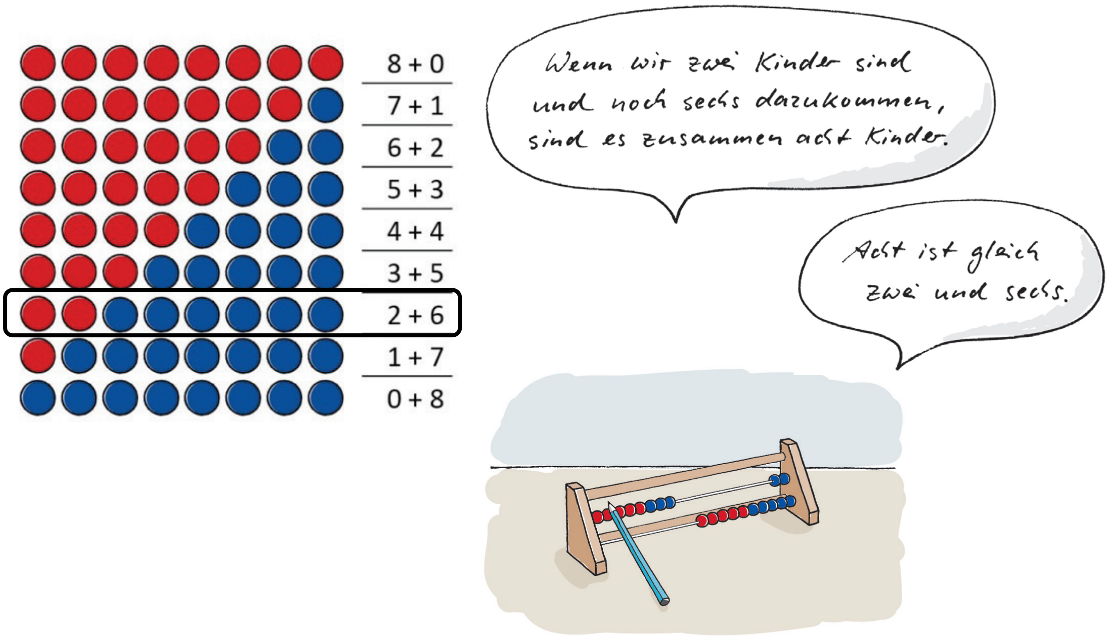


Abbildung 21: Beispiele für die Vernetzung von Darstellungsebenen als Grundlage für verstehendes Üben

Aufgabe guten Mathematikunterrichts ist es, diese Darstellungen zu vernetzen und somit deutlich zu machen, dass sie alle das Gleiche bezeichnen. Weitere Übungsformate können zum Beispiel die folgenden sein (siehe auch die Förderhinweise ab S. 77): Plättchen werfen, Zahlzerlegung an den Händen, am Punktefeld, am Rechenrahmen, Sortieren von Aufgabenstreifen, Aufgabenfolgen am Rechenrahmen lösen.

Vernetzung von Inhalten

Mathematisches Wissen und Können ist geprägt durch die Vernetzung mathematischer Inhalte. Erst, wenn Inhalte in ihren Beziehungen zu anderen Inhalten gesehen und verstanden werden, kann sich ein flexibles und dabei tragfähiges Wissensnetz entwickeln. Vereinzeltes „Inselwissen" hingegen kann beim Lernen in Sackgassen führen und häufig nur in speziellen Einzelfällen genutzt werden. Außerdem beansprucht dieses Inselwissen, das ohne Beziehungen zu anderen Inhalten abgespeichert wird, häufig unnötig viel Gedächtnisspeicher.

Mithilfe des verstehenden Übens kann es gelingen, das Gedächtnis zu entlasten. Das soll am Beispiel des kleinen Einspluseins verdeutlicht werden: Wenn eine Schülerin oder ein Schüler den *mathematischen Zusammenhang* zwischen den Zahlen 2, 6 und 8 verstanden hat, kann sie oder er mit diesem Wissen mindestens vier verschiedene Aufgaben lösen: 8 – 6, 8 – 2, 6 + 2, 2 + 6. Auch Platzhalteraufgaben wie __ + 6 = 8 oder __ – 6 = 2 sind dann leicht zu lösen, wenn man deren strukturellen Aufbau verstanden hat.

Ein günstiges Übungsformat sind in diesem Zusammenhang die sogenannten Aufgabenfamilien (Abb. 22, S. 39). Mit diesem Format werden nicht nur Aufgabensätze automatisiert. Es kann hier auch das Verständnis des Zusammenhangs zwischen Addition und Subtraktion und die Bedeutung von Tauschaufgaben gefestigt werden.

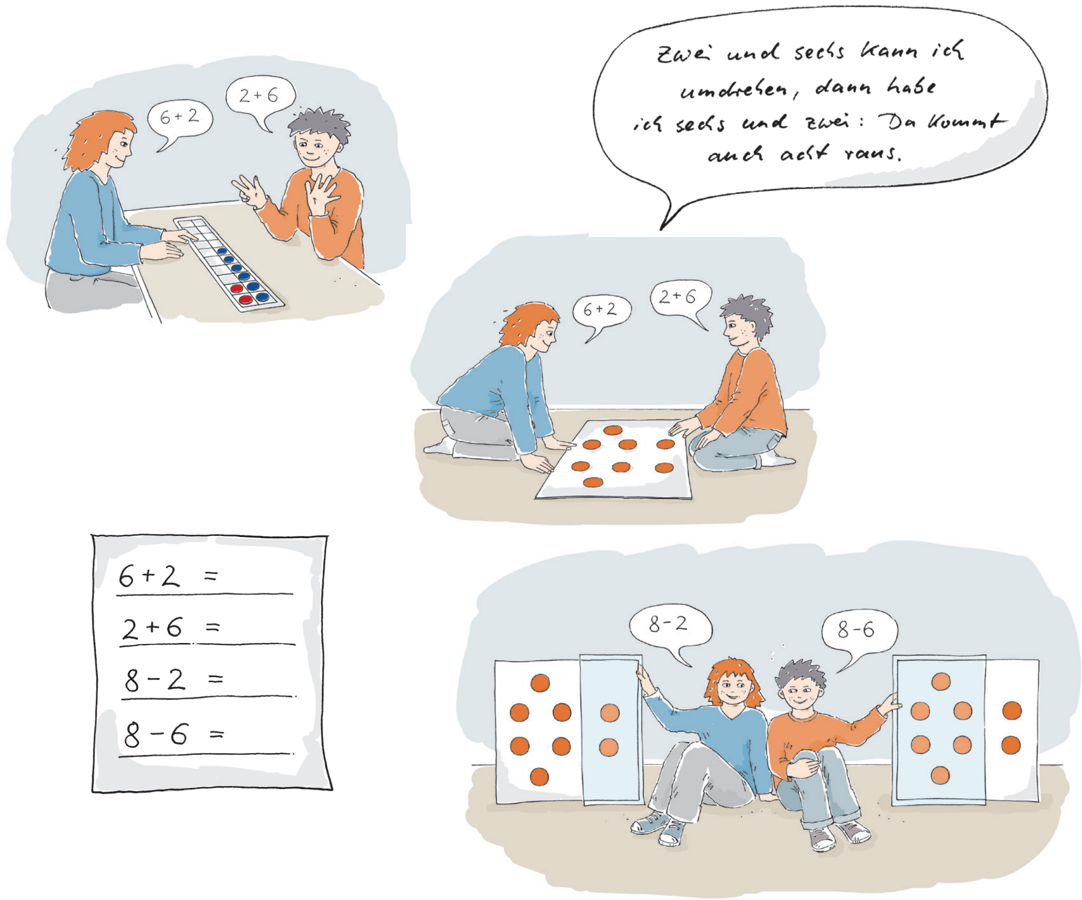


Abbildung 22: Aufgabenfamilien als Beispiel für die Vernetzung von Inhalten als Grundlage für verstehendes Üben

Ein weiteres Übungsformat kann das Sortieren bzw. Fortsetzen von Aufgaben bzw. Aufgabenreihen sein. Hierbei kann zum Beispiel das Verständnis des Prinzips des gegensinnigen Veränderns gefestigt werden. Durch die Vernetzung von Inhalten können nicht nur Aufgabensätze, sondern auch Regeln, Prinzipien, Zusammenhänge vernetzt und in Beziehung gesetzt werden (Abb. 23).

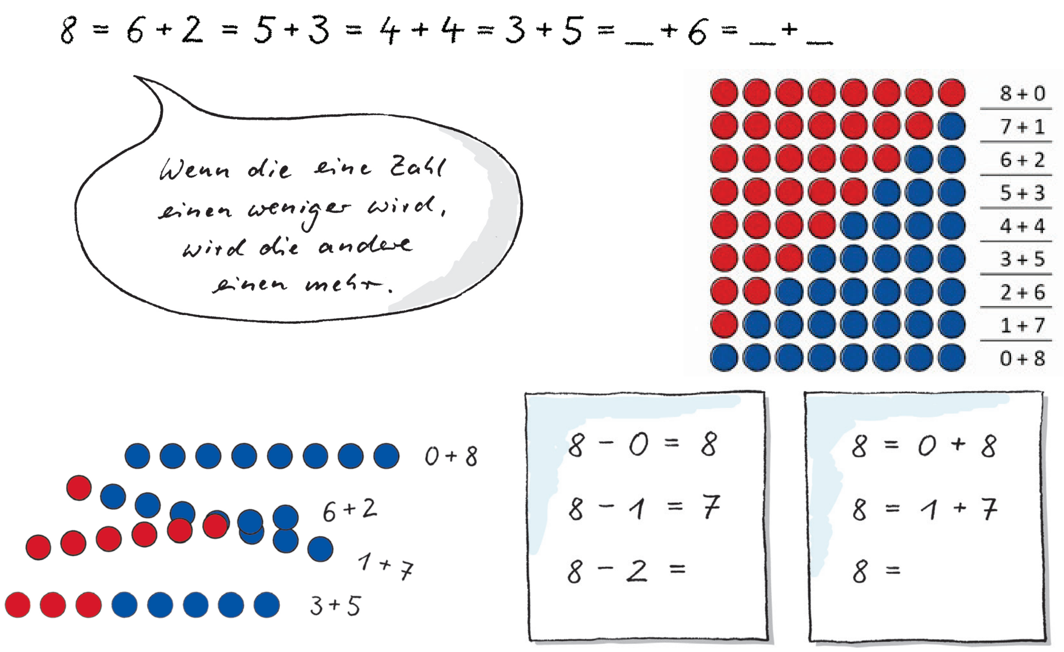


Abbildung 23: Sortieren und Fortsetzen als Beispiele für die Vernetzung von Inhalten als Grundlage für verstehendes Üben

Schließlich können die automatisierten Aufgabensätze und die prinzipiell verstandenen mathematischen Zusammenhänge gemeinsam genutzt werden, um sich weitere Aufgaben zu erschließen. Dies ist kein lineares Vorgehen (erst das eine, dann das andere), sondern ein gleichzeitiges (das eine mit dem anderen).

Vernetzung von Vorkenntnissen und Lernzielen

Frisch erworbenes Wissen sollte angewendet werden, sonst wird es leicht wieder vergessen und die Schülerinnen und Schüler wissen sonst möglicherweise gar nicht, mit welchem Ziel sie etwas erarbeitet haben und in welchen Situationen sie dieses Wissen anwenden können. Dieses *Lernen auf Vorrat* birgt neben dem Vergessen die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler in der Situation, in der sie das Wissen anwenden können (oder sollen), gar nicht bemerken, dass sie es anwenden könnten – es ist zu weit weg.

Daher ist es sinnvoll, neu erworbenes Wissen und Können möglichst zeitnah zu nutzen. Einerseits natürlich in möglichst realistischen und authentischen Sachsituationen, andererseits aber auch innermathematisch (siehe unten).

Die Aufgaben des kleinen Einspluseins können innermathematisch vielfältig angewendet werden, weil sie eine notwendige Grundlage für das erfolgreiche Rechnen sind: So zum Beispiel bei Aufgaben mit einem Zehnerübergang (u. a. bei der Strategie „Schrittweise über den Zehner“ oder der Strategie „Verdoppeln“). Andere Aufgaben können durch sogenannte Ableitungsstrategien (Gaidoschik 2010) aus bereits bekannten Aufgaben hergeleitet werden. Sobald die Schülerinnen und Schüler eine erste Einsicht dafür bekommen, dass man nicht nur Einer addieren kann, repräsentiert durch z. B. Einerwürfel, sondern auch Zehner, Hunderter und Tausender, kann das gelernte Wissen schon auf neue Zahlenräume übertragen werden – wenn mit entsprechenden Repräsentanten gearbeitet wird (z. B. Zehnerstangen, Hunderterplatte, Tausenderwürfel).

Vernetztes Anwenden

➔ **Beispiel 1:**

„Schrittweise über den Zehner“

Musst du die 8 zerlegen? Bei welchen Aufgaben?

Schreibe immer dazu, wie du die 8 zerlegen musst.

0 + 8 =
1 + 8 =
2 + 8 =
3 + 8 =
4 + 8 =
5 + 8 =
6 + 8 =
7 + 8 =
….

Vergleiche die Aufgaben und setze fort.
Welche Aufgaben sind einfach für dich?
Warum?

➔ **Beispiel 2:**

„Durch Verdoppeln über den Zehner“

5 + 8 = 5 + 5 + __

6 + 8 = 6 + 6 + __

7 + 8 = 7 + 7 + __

8 + 8 = __

➔ **Beispiel 3:**

„Einer- und Zehneraufgaben“

5 + 3
5 Zehner plus 3 Zehner
50 + 30

8 – 6
8 Zehner minus 6 Zehner
80 – 60

Beispiele für die Anwendung geübter Inhalte

3 Diagnose im Mathematikunterricht

Lernprozesse können dann besonders gut unterstützt werden, wenn Lehrerinnen und Lehrer wissen, wo und wie sie mit ihrer Unterstützung möglichst zielführend ansetzen können. *Wo* meint in diesem Zusammenhang *bei welchen mathematischen Inhalten* und *wie* meint *mit welchen Anschauungsmitteln und Impulsen*. Um dieses *Wo und Wie* möglichst genau bestimmen zu können, sollten Lehrkräfte im Rahmen einer zielführenden mathematikdidaktischen Diagnose die Lernstände ihrer Schülerinnen und Schüler ermitteln. Die Erkenntnisse aus der Diagnose können und sollten dann genutzt werden, um einen (Förder-) Unterricht zu gestalten, in dem zielgerichtet von einem passenden Inhalt ausgegangen und mit geeigneten Anschauungsmitteln und Impulsen gearbeitet wird (Selter 2017).

Aussagekräftige, pädagogische Diagnose

Die Diagnose im Umfeld *Schule* ist immer eine pädagogische Diagnose. Sie ist gekennzeichnet durch folgende Merkmale (Ingenkamp und Lissmann 2008, S. 13):

- Sie bezieht sich auf einzelne Lernende oder auf Gruppen von Lernenden.
- Sie ermittelt Voraussetzungen und Bedingungen von Lehr- und Lernprozessen.
- Sie analysiert Lernprozesse und Ergebnisse dieser Prozesse.
- Sie hat das Ziel individuelles Lernen zu optimieren.

Im Folgenden werden grundlegende Elemente einer zielführenden mathematikdidaktischen Diagnose dargestellt (Prozessorientierung, Kompetenzorientierung, Grundlage zur Unterstützung von Lernprozessen) und es werden verschiedene (organisatorische) Möglichkeiten der Diagnose im schulischen Umfeld dargestellt.

3.1 Prozessorientiertes Vorgehen und ergiebige Aufgaben

Am Beispiel der folgenden Aufgaben soll dafür sensibilisiert werden, warum der Blick auf Prozesse hilfreich sein kann, um Schülerlösungen und -bearbeitungen angemessen und förderorientiert einzuordnen (Wartha und Schulz in Vorb.).

Aufgabe: 78 + 7					
Kind	**Lösung**	**Bearbeitung**	**Hypothesen**	**Förderung**	**Mögliche weitere Diagnose**
Murat	85	78 + 2 + 5	Rechenweg „schrittweise über den Zehner“ kann sicher genutzt werden	Nicht in diesem Bereich	z. B. Kenntnis und Nutzung anderer Rechenwege
Caro	85	Zählen 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85	Noch kein Kopfrechnen, sondern zählendes Rechnen; Zählprozess (auch der Zehnerübergang) gelingt sicher	Erarbeitung und Nutzung automatisierter Grundaufgaben, Rechenwege für den Zehnerübergang	Diagnose der einzelnen mentalen Werkzeuge als Grundlage der Weiterarbeit
Bernd	85	87 → 88, 89, 80, 81, 82, 84, 85	Probleme mit der Bildung der Stellenwerte, Zahlendreher; noch kein Kopfrechnen, sondern zählendes Rechnen; Zählen im ZR bis 100 gelingt nicht sicher	Zahlverständnis und Orientierung im ZR bis 100, Stellenwertverständnis, Erarbeitung und Nutzung automatisierter Grundaufgaben, Rechenwege	Diagnose der einzelnen mentalen Werkzeuge als Grundlage der Weiterarbeit (ggf. zunächst im ZR bis 20)
Axel	58	78 + 2 + 5 = 58	Rechenweg „schrittweise über den Zehner“ kann sicher genutzt werden; Zahlendreher beim Aufschreiben	Klärung der inversen Sprechweise im Deutschen	z. B. Kenntnis und Nutzung anderer Rechenwege
Ute	71	78 – 7 = 71	Minus statt Plus: ggf. um den ZÜ zu vermeiden, vielleicht aber fehlendes Operationsverständnis	Erarbeitung des Operationsverständnisses (Addition und Subtraktion)	Stellen einer Aufgabe ohne Zehnerübergang, um die „Vermeidungsstrategie“ auszuschließen.

Tabelle 8: Verschiedene Lösungen, Lösungswege und daraus folgende didaktische Überlegungen

Diese Beispiele machen deutlich, dass die ausschließliche Konzentration auf Ergebnisse von Aufgaben nicht zielführend ist, wenn es darum geht, zu erfassen, welche Kompetenzen beim Lösen einer Aufgabe genutzt werden und welche Schwierigkeiten ggf. noch bestehen. Im Rahmen der Diagnostik helfen prozessorientierte Impulse, das Vorgehen und

Denken der Schülerinnen und Schüler erfassbar zu machen. Einige solcher Impulse sind die folgenden (z. B. Wartha und Schulz in Vorb.):

- „Woher weißt du, dass ...?“
- „Erkläre bitte laut, wie du ...?“
- „Beschreibe, was du ...?“
- „Was müsstest du machen, damit ...?“
- „Ein anderes Kind hat mir das so erklärt: ... Was sagst du dazu?“
- „Ich habe deine Erklärung gut verstanden. Danke!“

Ergiebige Diagnoseaufgaben lassen nicht nur *einen* Beobachtungsschwerpunkt zu, sondern sie ermöglichen aufgrund der vielen notwendigen Kompetenzen, die für ihre Lösungen notwendig sind, die Beobachtung all dieser Kompetenzen oder entsprechend auftretender Schwierigkeiten (Tab. 8, S. 43). Das ist auch gut so, denn für eine schnelle und dennoch aussagekräftige Diagnose sollten zunächst wenige Aufgaben reichen, anhand derer bereits „viel zu sehen“ ist (Sundermann und Selter 2006).

3.2 Kompetenzen ermitteln und Förderziele bestimmen

Ziel der Diagnose: Förderung

Diagnose im schulischen Kontext hat immer das Ziel, Schülerinnen und Schüler bestmöglich beim Weiterlernen zu unterstützen. Deshalb sind vor allem solche Inhalte diagnostisch zu überprüfen, die für das erfolgreiche (Weiter-)Lernen besonders relevant sind. Mit anderen Worten: Inhalte, die für das erfolgreiche Rechnenlernen eher fakultativ sind, müssen auch nicht zwingend überprüft werden. Für die Durchführung der Diagnose bedeutet dies:

- Nicht zum Selbstzweck durchführen.
- Auf relevante Inhalte fokussieren, die für das Weiterlernen grundlegend sind (siehe Kapitel 1).
- Bereits beim Diagnostizieren mögliche Förderinhalte bedenken.
- Aufgaben stellen, deren Bearbeitung für die inhaltliche Gestaltung einer Förderung bedeutsam ist.

Außerdem ist es notwendig, die Durchführung und Auswertung der Diagnose *kompetenzorientiert* zu gestalten.

Die Lehrkraft sollte sich darauf konzentrieren, herauszufinden, was das Kind kann – auch wenn dieses Wissen und Können Inhalte von vorangehenden Jahrgängen ist (Schipper und Schulz 2008). Einige Anregungen zur Durchführung einer kompetenzorientierten Diagnose und deren Auswertung sind die folgenden:

Durchführung:

- keine Orientierung an aktuellen Inhalten
- mit der Abfrage grundlegender Kompetenzen beginnen
- bei Schwierigkeiten offen sein für große inhaltliche Schritte rückwärts
- erreichbare Aufgaben formulieren und stellen
- adaptives Vorgehen
- Kompetenzen positiv verstärken

Auswertung:

- Konzentration auf Vorwissen und Kompetenzen trotz fehlerhafter Ergebnisse
- Konzentration auf die für den Lernprozess relevanten Kompetenzen
- Bei der Auswertung der Diagnose ist der aktuelle Inhalt der Klassenstufe nur sekundär relevant

Folgerung:

- erreichbare Förderziele identifizieren, die an vorhandenen Kompetenzen anknüpfen
- Konzentration auf wenige, aber relevante Förderziele
- Unterscheidung zwischen kurz- und langfristigen Förderzielen

Beispiel für eine zielführende mathematikdidaktische Diagnose

Es kann festgehalten werden, dass bei einer Diagnose bereits eine mögliche Förderung mit bedacht werden sollte. Umgekehrt kann jede Förder- oder Unterrichtsstunde auch genutzt werden, um im Sinne von Diagnose, Erkenntnisse zu Kompetenzen und Einsicht in die Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schülern zu gewinnen (siehe unten).

	Herr Meyer stellt Stefanie die Rechenaufgabe 6 + 8 und bittet sie, dabei laut zu erklären, wie sie vorgeht	
M	6 + 8	
S	6 + 8? … Ich zähl das an den Fingern.	
M	Ja, mach ruhig. Wichtig ist für mich, dass ich rauskrieg, *wie* du das machst.	
S	Ich zähle: 8 + 6 nehme ich erst mal, weil die 6 kleiner ist als die 8 und mit 8 geht's schneller. Dann zähle ich: 9, 10, 11, 12, 13, 14.	*Zählt 9, 10, 11 an Zeige-, Mittel-, Ringfinger links, 12, 13, 14 an Zeige-, Mittel-, Ringfinger rechts*
M	Und woher weißt du, dass du aufhören musst mit dem Zählen?	
S	Weil es 6 Finger sind. Weil es die 6 sind, die ich zu der 8 zähle.	
M	O.K. Kannst du mir noch mal zeigen: Die 6 – wie du die siehst an den Fingern?	
S	Also hier sind drei...	*Zeigt Zeige-, Mittel- und Ringfinger links*
	... und da sind drei Finger.	*Zeigt Zeige-, Mittel- und Ringfinger rechts*
	Und ich zähle dann: 9, 10, 11, 12, 13, 14. Weil ich nicht durcheinander kommen möchte.	*Tippt zu jedem Zahlwort an einen Finger*

Tabelle 9: Beispiel für eine zielführende mathematikdidaktische Diagnose (aus Wartha und Schulz 2012, S. 9)

Sicherlich haben auch Sie schon ähnliche Bearbeitungswege beobachten können, denn Stefanies Lösungsweg ist typisch für das sogenannte zählende Rechnen: Stefanie weiß die Lösung der Aufgabe noch nicht auswendig, und sie kann noch nicht auf eine angemessene Kopfrechenstrategie zurückgreifen – daher löst sie die Aufgabe zählend. Eine produktorientierte Diagnose würde sich ausschließlich auf das richtige Ergebnis konzentrieren.

Die prozessorientierte Diagnose hingegen liefert den wichtigen Hinweis, dass Stefanie die Lösung noch nicht rechnend, sondern erst zählend ermittelt. Die kompetenzorientierte Sichtweise ermöglicht neben dieser eher defizitären Betrachtung („Stefanie kann noch nicht im Kopf rechnen.“) die Identifikation vieler Kompetenzen, die Stefanie schon nutzt:

Stefanie ...

- erkennt, dass 8 größer ist als 6.
- weiß, dass sie die Tauschaufgabe bei der Addition nutzen darf.
- erkennt den Nutzen der Tauschaufgabe.
- ist sich sicher beim Weiterzählen.
- ist sich sicher beim Nennen des Ergebnisses.
- kann die 6 simultan mit den Fingern darstellen (als „drei und drei“).
- kennt wahrscheinlich den Zahlensatz 3 + 3 = 6.
- kann ihr Vorgehen sehr gut und nachvollziehbar beschreiben.

An diese kurze Sequenz könnten sich nun weitere Diagnoseaufgaben anschließen, um zum Beispiel herauszufinden, ob Stefanie ...

- die Größenbeziehungen von Zahlen auch in anderen Zahlenräumen vergleichen kann.
- weiß, dass sie die Tauschaufgaben bei Subtraktionsaufgaben nicht nutzen darf.
- die Aufgabe vielleicht nur im ersten Zugriff zählend löst, auf Rückfrage aber vielleicht auch rechnend bearbeitet.
- auch in höheren Zahlenräumen weiterzählen kann.
- auch andere Zahlen als 6 schnell und sicher darstellen und auffassen kann (auch an anderen Materialien).
- schon andere Zahlensätze als 3 + 3 = 6 automatisiert hat.

Auf diese Weise kann man sich an den Übergang zwischen den bereits vorhandenen Kompetenzen und den nächsten inhaltlichen Lerninhalten heranarbeiten. Inhalte einer möglichen Förderung könnten zum Beispiel folgende sein:

- Aufgaben des kleinen Einspluseins verständnisbasiert automatisieren,
- Aufgaben des kleinen Einspluseins bei Ableitungsstrategien nutzen,
- operative Zusammenhänge zwischen gewussten Aufgaben und benachbarten Aufgaben erarbeiten und
- schnelle Zahlauffassung und -darstellung von Zahlen größer als 6 üben.

3.3 Möglichkeiten der Diagnose und Aufgaben der Lehrkraft

Möglichkeiten der Diagnose kennen und kriteriengeleitet auswählen

Die Möglichkeiten der Diagnose im schulischen Umfeld sind zum Beispiel die (Unterrichts-)Beobachtung, das Einzel- oder Klassengespräch, der schriftliche Test (z. B. Klassenarbeit, Vergleichsarbeit) (Ingenkamp und Lissmann 2008, S. 74–129) und die Analyse von Schülerdokumenten (Selter 1995). Darüber hinaus gibt es Diagnoseinstrumentarien und Screenings, die speziell für den Einsatz im schulischen Kontext entwickelt wurden. Zu nennen sind hier zum Beispiel das ElementarMathematische BasisInterview (EMBI) (Peter-Koop et al. 2007), der Bielefelder Rechentest BIRTE 2 (Schipper et al. 2011), die Materialien des Programms „Mathe sicher können“ (Selter et al. 2014) und die computergestützte Diagnose ILeA plus des Landes Brandenburg (LISUM 2019). Der Vorteil der letztgenannten ist, dass sie ohne Adaption genutzt werden kann, und es entsprechende didaktische Handreichungen zum diagnostischen Vorgehen gibt. Bis auf das EMBI bieten diese Materialien darüber hinaus explizite Hinweise zu möglichen Förderinhalten. Eine wesentliche Aufgabe der Lehrkraft ist es in diesem Zusammenhang, die jeweiligen diagnostischen Möglichkeiten zu kennen und kriteriengeleitet auszuwählen:

- Wann und warum reicht ein kurzes Einzelgespräch?
- Wann und warum reichen mir Hausaufgaben oder Klassenarbeiten?
- Wann und warum nutze ich ein standardisiertes Instrument?
- Wie und warum dokumentiere ich die Ergebnisse am besten?

Mögliche Orientierungspunkte bei der Auswahl diagnostischer Aktivitäten sind (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019 (4)):

- Grad der Standardisierung und Normierung:
  Besteht eine feste Vorgabe von Aufgaben, Fragen und möglichen Antworten? Sind Adaptionen an die jeweiligen Lernvoraussetzungen möglich? Welche Vergleichsgruppe wird herangezogen?
- Themenbereiche:
  Welche (arithmetischen) Inhalte sind Gegenstand der Diagnose? Werden auch andere Bereiche angesprochen, zum Beispiel geometrische Inhalte oder prozessbezogene Kompetenzen?
- Altersstufe:
  Für welche Altersstufe ist das Diagnoseinstrument vorgesehen? Bestehen hierfür feste Vorgaben? Existieren Erweiterungen für andere Altersstufen? Sind auch hier Adaptionen möglich?
- Dauer:
  Wie viel Zeit wird für die Durchführung benötigt? Ist eine durchgehende Bearbeitung vorgesehen oder dürfen Pausen und Unterbrechungen in Anpassung an die individuelle Konzentrationsspanne erfolgen? Lassen sich ggf. nur Ausschnitte verwenden?
- Durchführung:
  Ist das Testverfahren für die Einzelsituation und/oder eine Gruppe vorgesehen? Wie sieht die Durchführung aus (Interview, Papier-Bleistift-Verfahren, Computerunterstützung)? Stimmen dabei Aufwand und Nutzen überein?
- Auswertung:
  Wie erfolgt die Auswertung? Welche konkreten Aussagen erhält die Lehrkraft?
- Materialeinsatz:
  Welche Materialien werden benötigt? Kann auf Vorhandenes zurückgegriffen werden oder liegen sie gegebenenfalls dem Testinstrument bei?
- Sprachliche Anforderungen:
  Benötigt das Kind ein bestimmtes Fachvokabular, das geklärt sein muss? Kommt das Diagnoseinstrument eventuell ohne Sprache aus?

Unterrichtsbegleitende Beobachtungen

All diese Orientierungspunkte können sich einerseits auf (halb-)standardisierte diagnostische Verfahren beziehen, sie können aber auch handlungsleitend für die Entwicklung und Durchführung eigener diagnostischer Aktivitäten sein, zum Beispiel für ein kurzes (Einzel-) Gespräch. So müssen nicht immer formalisierte Standortbestimmungen durchgeführt werden, um Einsichten in den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern zu bekommen. Häufig reichen kurze Gesprächsimpulse oder einfach das „über die Schulter gucken“ während des regulären Unterrichts („Rechne doch mal 72 – 35 und erkläre mir laut, wie du das machst“, „Stelle mir mal am Material die Zahl 23 ein und erkläre mir, warum das diese Zahl sein muss“). Obwohl in Förder- und Unterrichtssituationen die *diagnostische Brille* aufgesetzt werden kann, (und umgekehrt auch informelle diagnostische Situationen zu Fördermomenten führen können), so gibt es doch grundsätzlich unterschiedliche Intentionen und Herangehensweisen bei Diagnose und Förderung (Selter 2017, S. 391):

	Diagnosegespräch	Fördergespräch
Ziel	Denkwege verstehen	Lernfortschritte ermöglichen
Aufgabenstellung	... soll bearbeitet werden	... soll richtig gelöst werden
Erklärungen	... weitestgehend vermeiden, nur Aufgabenverständnis sichern	... im Bedarfsfall notwendig, bedürfen aber der aktiven Einordnung ins bestehende Wissensnetz
Fragen und Impulse	... dienen der Auslotung des Verständnisses	... dienen der aktiven Entwicklung des Verständnisses
Hilfen	... als Unterstützung zum Darstellen der eigenen Denkwege	... als Unterstützung zum Selbstfinden von Erkenntnissen
Fehler	... werden nicht bearbeitet, aber dienen der Erkenntnis	... sollen analysiert und überwunden werden
Hauptaktivität Lehrpersonen	... innehalten, beobachten und zuhören	... aktiv zu Lernfortschritten anregen
Hauptaktivität Lernende	... Denkwege erklären	... neue Denkwege einschlagen
Rückmeldung	... lernstandsorientiert	... lernprozess- und sachorientiert

Tabelle 10: Merkmale von Diagnose- und von Fördergesprächen (Selter 2017, S. 391)

Förderziele benennen, vereinbaren und überprüfen

Kinder und Erwachsene profitieren sehr davon, wenn sie wissen, mit welchem Ziel sie eine Aufgabe bearbeiten, sich einem Projekt zuwenden oder etwas üben. Zudem ist es sehr hilfreich, wenn sie wissen, auf welchem Weg dieses Ziel erreicht werden kann. Diese Ziel- und Methodentransparenz sollte fester Bestandteil von Unterrichtsprozessen sein, damit Schülerinnen und Schüler sich kompetent und erfolgreich fühlen können (Wember 2017, S. 58; Sundermann und Selter 2006). Es ist die Aufgabe der Lehrkraft (egal, ob im regulären Unterricht oder in Fördersituationen), gemeinsam mit den Lernenden festzulegen, welches die nächsten Schritte auf dem individuellen Lernweg sind und wie diese erreicht werden können.

„Gemeinsam“ bedeutet in diesem Fall, dass die Lehrkraft zunächst Lerninhalte, -methoden, -ziele und -voraussetzungen analysieren muss und auf Grundlage dieser Analysen Entscheidungen für die inhaltliche und methodische Gestaltung von Unterricht und Fördersituationen trifft. Die Lernvoraussetzungen des Kindes, die diesen Entscheidungen zugrunde liegen, können durch die oben beschriebene Diagnose ermittelt werden.

Für das Benennen, Vereinbaren und Überprüfen von Förderzielen gilt dabei allgemein Folgendes (siehe auch Voß, Sikora und Hartke 2017, S. 341):

- Die Lernausgangslage muss mithilfe einer Lernstandsanalyse ermittelt und dokumentiert worden sein.
- Erreichbare Förderziele müssen transparent dokumentiert sein.
- Es können kurz- und langfristige Förderziele benannt werden.
- Alle Beteiligten (zum Beispiel Lehrkraft und Kind, aber auch Eltern und Erzieher im offenen Ganztagsbetrieb) haben immer die Möglichkeit, sich inhaltlich zu den Förderzielen und deren Erreichen zu äußern.
- Das Erreichen der Förderziele wird in einer vorgegebenen Zeitspanne transparent überprüft und dokumentiert.

Diagnose und Förderung sind somit keine ausschließliche Angelegenheit der Lehrkraft, sondern der Einbezug der Schülerinnen und Schüler ist ein wichtiges Element der Lernverlaufsdiagnostik.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den individuellen Lernweg zu illustrieren und zu dokumentieren. Diese Möglichkeiten sind abhängig vom Setting und der Dauer des geplanten (Förder-)Unterrichtsvorhabens. Sie reichen vom Arbeitsblatt mit der Möglichkeit zur Selbsteinschätzung bis hin zu einem verbindlichen Halbjahres-Förderplan, auf dem Lernziele schriftlich festgehalten sind und deren Erreichen ausführlich dokumentiert werden (für weitere Möglichkeiten siehe z. B. Sundermann und Selter 2006). Bei besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen wird das Erstellen eines langfristigen und inhaltlich ausführlichen Förderplans nach den SMART-Kriterien dringend empfohlen, in dem folgende Fragen beantwortet werden:

- Auf welche diagnostischen Erkenntnisse stützen sich die getroffenen didaktischen Entscheidungen?
- Welche Inhalte sollen in welchem Zeitraum erarbeitet werden?
- Mit welchen Anschauungsmitteln sollen diese Inhalte erarbeitet werden?

4 Rechnen lernen konkret unterstützen – Diagnose und Förderung

In diesem Kapitel finden Sie konkrete Hinweise für die Durchführung und Auswertung einer prozessorientierten Diagnose. Zudem werden konkrete Förderempfehlungen vorgestellt, die sich aus den Ergebnissen der Diagnose herleiten lassen.

Hierzu finden Sie …

- einen Diagnosebogen zur Orientierung und Kurzdokumentation von Beobachtungen und Folgerungen (ab S. 53).
- ausführliche Diagnose- und Auswertungshinweise (ab S. 59): Hier finden Sie einerseits erneut die diagnostischen Impulse an einzelnen Stellen ergänzt durch weiterführende Fragestellungen. Andererseits finden Sie zu jeder Diagnoseaufgabe Hinweise zur Deutung der Beobachtungen und Verweise zu entsprechenden Förderhinweisen.
- konkrete Förderhinweise zu den verschiedenen Inhaltsbereichen (ab S. 77).

4.1 Diagnose (Aufgaben, Intention, Intervention)

Auf den folgenden Seiten finden Sie konkrete Vorschläge für Diagnoseaufgaben in den Inhaltsbereichen:

- Zahlvorstellung: Zählen und Orientierung im Zahlenraum
- Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung
- Operationsvorstellungen und Rechnen: Addition und Subtraktion
- Automatisierte Grundaufgaben: Einspluseins und Zahlzerlegung
- Stellenwerte: Bündeln und Entbündeln
- Stellenwerte: Lesen, Schreiben und Sprechen von Zahlen
- Zahl-, Aufgabenzusammenhänge und Rechenregeln
- Zahlen- und Aufgabenblick sowie Rechenstrategien

Zu allen konkreten Diagnoseaufgaben werden in den Auswertungshinweisen mögliche Beobachtungen mit entsprechenden inhaltlichen Folgerungen für die Förderung aufgeführt.

Für diesen Diagnoseleitfaden gelten einige Grundüberlegungen:

Einsatz des Diagnosebogens

- **Zum Zeitpunkt**: Spätestens wenn Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien sicher anwenden sollen, meist gegen Ende des ersten Schuljahres, müssen sie über das beschriebene mentale Werkzeug verfügen. Ist dies nicht der Fall, kann dies zu gravierenden Problemen beim Weiterlernen führen. Ein sinnvoller Zeitpunkt zur Überprüfung ob und welche mentalen Werkzeuge bereits sicher genutzt werden können und welche noch nicht, ist also spätestens der Beginn des zweiten Schuljahres.

Doch auch zu einem späteren Zeitpunkt kann die vorliegende Diagnose genutzt werden, um zum Beispiel zu überprüfen, ob das mentale Werkzeug auch in größeren Zahlenräumen genutzt werden kann oder wenn man Probleme beim Rechnenlernen erst später wahrnimmt (z. B. weil man eine neue Klasse übernimmt). Für eine vertiefende Diagnose nach einem auffälligen Ergebnis bei ILeA plus ist der Einsatz des Diagnosebogens geeignet.

- **Zum Zahlenmaterial und den Aufgaben**: Bei allen Aufgaben werden konkrete Zahlen und Rechenaufgaben vorgeschlagen. Diese können gut genutzt, jedoch auch inhaltlich begründet ergänzt oder weggelassen werden.

  Im Einzelfall kann es (vor allem zur Entlastung des Gedächtnisses) sinnvoll sein, einzelne Aufgaben schriftlich vorzulegen und nicht nur mündlich zu stellen.

- **Zum Zahlenraum**: Das vorgeschlagene Zahlenmaterial ist so gewählt, dass zunächst Aufgaben in kleinen Zahlenräumen genutzt werden. Wenn die Schülerinnen und Schüler sicher sind, kann der Zahlenraum bis 20/bis 100 erweitert werden. Hierbei kann und sollte die Lehrkraft begründet selbst entscheiden, wie schnell sie bei dieser Zahlenraumerweiterung vorgeht.

- **Zur Reihenfolge:** Die Aufgaben sind nach Inhalten zusammengefasst (8 Aufgabenblöcke). Die Reihenfolge dieser Aufgabenblöcke kann beliebig verändert werden, obwohl es sicherlich sinnvoll ist, mit den Aufgaben zur Zahlvorstellung zu beginnen. Da es sich um einen umfangreichen Leitfaden handelt, kann er in mehrere Sequenzen aufgeteilt werden. Sinnvoll erscheint zudem ein Vorgehen vom Leichten zum Schweren, um den Einstieg zu erleichtern und Demotivation vorzubeugen.

- **Zur Vollständigkeit**: Um sich ein möglichst umfassendes Bild über die Kompetenzen des Kindes in Bezug auf das mentale Werkzeug machen zu können, sollten möglichst alle Aufgaben bearbeitet werden. Zeigt das Kind jedoch bei einzelnen Aufgaben, dass es auch andere Inhaltsbereiche bereits gut beherrscht, müssen diese nicht mehr zwingend erhoben werden.

- **Zur Auswertung**: Bei jeder Aufgabe werden mögliche Antworten bzw. Lösungsprozesse in Kapitel 4.1.2 Auswertungshinweise vorgestellt. Außerdem werden mögliche Folgerungen und entsprechende Förderhinweise gegeben (siehe S. 59 f.). An diesen kann sich die Lehrkraft gut orientieren. Zu beachten ist dabei, dass in dieser Handreichung nicht alle denkbaren Antworten und Lösungsprozesse abgebildet werden können, die im Rahmen einer Diagnose beobachtbar wären.

  Daher kann es im Einzelfall vorkommen, dass die Beobachtungen nicht eins zu eins zu Förderempfehlungen führen. Hier sind dann Folgefragen in angrenzenden Inhaltsbereichen sinnvoll oder die Ableitung eigener begründeter Schlussfolgerungen.

- **Zur Gesprächsatmosphäre:** Schaffen Sie eine angenehme, angstfreie Gesprächsatmosphäre. Verdeutlichen Sie dem Kind, dass Fehler in diesem geschützten Rahmen natürlich und nicht schlimm sind. Verdeutlichen Sie zudem, dass es Ihnen nicht auf richtige oder falsche Ergebnisse ankommt, sondern auf Denk- und Lösungswege. Bereiten Sie das Kind auf Rückfragen der folgenden Art vor: Woher weißt du das? Wie hast du das gemacht?

- **Zur Nutzung von Darstellungsmitteln:** Einige vorgeschlagene Aufgabenstellungen erfordern den Einsatz von Anschauungsmaterial. Auch bei Aufgabenstellungen ohne expliziten Hinweis auf deren Nutzung kann der zusätzliche Einsatz von Anschauungsmaterial zu erkenntnisreichen Beobachtungen führen. Die Lehrkraft kann also begründet bei einigen Aufgaben zusätzlich Material hinzuziehen.

Zudem kann bei allen Aufgaben, bei denen Anschauungsmaterial genutzt wird, überprüft werden, ob das Kind schon in der Lage wäre, seine Antworten ohne Blick auf das Material zu formulieren (Wie viele Zehnerstangen *bräuchtest* du? Woher weißt du das?).

Hier kann die Lehrkraft sich gut am Modell der phasenweisen Ablösung vom Material orientieren (Kapitel 2.1, S. 28).

Bei der Nutzung des Materials für die Diagnose sollte zunächst geklärt werden, ob das Material und seine Strukturen prinzipiell bekannt sind.

Folgende **Materialien** werden für den Leitfaden genutzt:

- Wendeplättchen
- Steckwürfelstangen
- Zehnersystem-Blöcke (Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten, Tausenderwürfel)
- Rechenrahmen (20er und 100er)
- Zahlenstrahl (skaliert und unskaliert)
- Zahlenkarten
- Aufgabenkarten
- Stift
- Papier.

4.1.1 Diagnosebogen

Aufgabenstellung	Beobachtungen und Folgerungen
① Zahlvorstellung: Zählen und Orientierung im Zahlenraum (Auswertungshinweise S. 59–60)	
1a) Zähle vorwärts ab 5 (17, 32).	
1b) Zähle rückwärts ab 7 (18, 72).	
1c) Welche Zahl kommt vor der 4 (23, 31)?	
1d) Welche Zahl kommt nach der 6 (43, 59)?	
1e) Zähle in 2er-Schritten vorwärts/rückwärts ab 6 (7, 22, 57).	
1f) Zähle in 10er-Schritten vorwärts/rückwärts ab 20 (70, 57).	
1g) Welche Zahl ist größer: 74 oder 56? Erkläre.	
1h) Welche Zahl ist größer? *(63 und 47 notiert vorlegen)* Erkläre.	

Aufgabenstellung	Beobachtungen und Folgerungen
② Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung (Auswertungshinweise S. 61–63)	
2a) Stelle am **Rechenrahmen** die 7 (13, 34, 67) ein. Beschreibe, was du machst. *Zahlen entweder mündlich oder notiert vorgeben.*	
2b) Welche Zahl habe ich dir am **Rechenrahmen** eingestellt? (6, 14, 43, 76) Erkläre. *(Zahlen mündlich nennen und notieren lassen)*	
2c) Ich zeige dir die Zahl am **Rechenrahmen** nur kurz. (7, 9, 16, 23) Welche Zahl siehst du? Beschreibe, was du gesehen hast. Erkläre, warum das die ... ist?	
2d) Lege mit den **Zehnersystem-Blöcken** die 12 (34, 40). Beschreibe, was du machst. *(Zahlen entweder mündlich oder notiert vorgeben)*	
2e) Welche Zahl habe ich mit den **Zehnersystem-Blöcken** gelegt? (11, 23, 30, 76) Erkläre. *(Zahlen mündlich nennen und notieren lassen)*	
2f) Ich zeige dir die Zahl mit den **Zehnersystem-Blöcken** nur kurz (4, 20, 23). Welche Zahl siehst du? Beschreibe, was du gesehen hast.	

2g) Ich sage dir eine Zahl und du zeigst mir, wo sie am Z**ahlenstrahl** zu finden ist. (7, 13, 34, 67) Wie gehst du vor? Beschreibe.	
2h) Ich zeige dir Positionen am **Zahlenstrahl** und du sagst mir, welche Zahlen dort stehen müssen. (6, 14, 43, 78) Wie gehst du vor? Beschreibe.	
2i) Ich diktiere dir Zahlen. (14, 28, 76, 55, 80) Schreibe sie auf.	
2j) Hier siehst du Zahlen. (16, 45, 67, 88, 70) Lies sie vor.	

③ Operationsvorstellungen und Rechnen: Addition und Subtraktion (Auswertungshinweise S. 63–65)	
3a) Ich erzähle dir eine Geschichte. *Peter und Tom haben Sammelkarten dabei: Peter hat fünf und Tom hat drei. Wie viele haben die beiden zusammen?* Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.	
3b) Ich erzähle dir eine Geschichte. *Paula hat acht Karten. Sie gibt drei Karten ab. Wie viele Karten hat sie dann noch?* Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.	
3c) Ich erzähle dir eine Geschichte. *Kevin hat drei Karten. Evelyn hat sieben Karten. Wie viele Karten müsste ich Kevin geben, damit Kevin genauso viele Karten hat wie Evelyn?* Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.	
3d) Erfinde zu der Aufgabe 8 – 6 (3 + 5) eine Geschichte.	
3e) Löse die Aufgabe 8 – 2 (5 + 3) mit **Plättchen**.	
3f) Ich lege **Plättchen**. Welche Aufgabe könnte es sein? 3 + 4 (6 – 3) *(3 Plättchen hinlegen, 4 Plättchen dazu legen, sichtbare Lücke lassen, Aufgabe erfragen; 6 Plättchen hinlegen, 3 Plättchen wegschieben Aufgabe erfragen)*	
3g) Welche Aufgabe musst du rechnen, um den Unterschied zwischen 8 und 5 zu finden? Zeige mir das mit **Plättchen**.	
3h) Löse die Aufgabe 4 + 5 (7 – 4, 43 + 6, 38 – 6) am **Rechenrahmen.** Erkläre, wie du vorgehst.	

3i) Ich schiebe dir am **Rechenrahmen** eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (2 + 5, 8 – 4, 23 + 5, 37 – 5, …) Woher weißt du, welche Aufgabe ich geschoben habe?	
3j) Löse die Aufgabe 7 + 8 (14 – 9, 28 + 6, 43-7) am **Rechenrahmen.** Erkläre, wie du vorgehst.	
3k) Ich schiebe dir am **Rechenrahmen** eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (6 + 5, 12 – 6, 38 + 5, 42 – 6, ...) Woher weißt du, welche Aufgabe ich geschoben habe?	
3l) Löse die Aufgabe 52 – 20 (23 + 30) mit den **Zehnersystem-Blöcken.** Erkläre, wie du vorgehst.	
3m) Ich lege dir mit den **Zehnersystem-Blöcken** eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (45 – 10, 24 + 30) Woher weißt du, welche Aufgabe ich gelegt habe?	
3n) Löse die Aufgabe 47 + 6 (32 – 6, ...) mit den **Zehnersystem-Blöcken**. Erkläre, wie du vorgehst.	

④ Automatisierte Grundaufgaben: Einspluseins und Zahlzerlegungen (Auswertungshinweise S. 66)	
4a) Löse die Rechenaufgabe 5 + 5 (1 + 9, 3 + 7, 4 + 3, 2 + 6).	
4b) Löse die Rechenaufgabe 10 – 5 (10 – 9, 10 – 7, 7 – 4, 8 – 6).	
4c) Nenne das Doppelte von 4 (von 5, von 7, von 9, von 10).	
4d) Nenne die Hälfte von 6 (von 8, von 10, von 14, von 18, von 20).	
4e) Wie viel fehlt von 5 bis zur 10? (von 9, von 7, von 4, von 2, von 3, von 8, von 6, von 1)	
4f) Wie viel fehlt von 3 bis zur 8? (von 7, von 4, von 6, von 5, von 2, von 1)	

⑤ **Stellenwerte: Bündeln und Entbündeln (Auswertungshinweise S. 67)**	
5a) Hier liegen **Würfel**. (23) Wie viele sind das? Erkläre. Wie viele Zehner hat die Zahl? Erkläre. Lege die Würfel so, dass man sehen kann, wie viele Zehner es sind.	
5b) Hier sind drei Zehner (drei **Steckwürfelstangen**). Wie viele Würfel sind das? Wenn ich jetzt einen Würfel wegnehme *(Würfel abbrechen)*, wie viele Zehner sind es dann? Und wenn ich noch einen Würfel wegnehme, wie viele Zehner sind es nun?	

⑥ **Stellenwerte: Lesen, Schreiben und Sprechen von Zahlen (Auswertungshinweise S. 68–70)**	
6a) Hier liegt eine Zahl mit den **Zehnersystem-Blöcken**. (5Z3E, 3Z) Schreibe die Zahl auf. Erkläre, woran du erkennst, wie die Zahl geschrieben wird.	
6a*) Hier liegt eine Zahl mit den **Zehnersystem-Blöcken**. (3Z12E) *(Sortierung: Zehner oben, Einer darunter)* Schreibe die Zahl auf. Erkläre, woran du erkennst, wie die Zahl geschrieben wird.	
6b) Ich schreibe dir eine Zahl auf. (54, 37, 40, 22, ...) Lege sie mit den **Zehnersystem-Blöcken**. Erkläre, woran du erkennst, was du legen musst.	
6c) Hier liegt eine Zahl mit **Zehnersystem-Blöcken**. (4Z3E, 5Z, ...) *(Sortierung: Zehner oben, Einer darunter)* Wie heißt die Zahl?	
6c*) Hier liegt eine Zahl mit **Zehnersystem-Blöcken**. (4Z12E) *Sortierung: Zehner oben, Einer darunter* Wie heißt die Zahl?	
6d) Ich nenne dir eine Zahl. (56, 34, 40, zwanzig und fünf, ...) Lege sie mit den **Zehnersystem-Blöcken**. Erkläre, was du legen musst.	

⑦ **Zahl-, Aufgabenzusammenhänge und Rechenregeln (Auswertungshinweise S. 70–73)**	
Umkehraufgabe **7a)** Rechne 5 + 4, 9 – 4. Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten geholfen? Warum?	
Tauschaufgabe **7b)** Rechne 9 + 3, 3 + 9. Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten geholfen? Warum?	
Nachbaraufgabe **7c)** Rechne 7 + 5, 7 + 6 (14 – 7, 14 – 8). Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten geholfen? Warum?	
Analogieaufgabe **7d)** Rechne 3 + 5, 30 + 50, 23 + 5. Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten/dritten geholfen? Warum?	
Analogieaufgabe **7e)** Rechne 7 – 4, 70 – 40, 27 – 4. Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten/dritten geholfen? Warum?	
Teil-Ganzes-Konzept **7f)** Unter einem Tuch sind zwei Plättchen, unter einem anderen sind fünf Plättchen. Wenn ich jetzt ein Plättchen verschiebe, bleiben es insgesamt gleich viele oder ändert sich etwas an der Gesamtanzahl? Woher weißt du das?	
Konstanz der Summe **7g)** *(Aufgaben vorlegen: 7 + 5 = 12, 8 + 4 = 12, 9 + 3 = 12, 10 + 2 = 12)* Erkläre, warum das Ergebnis bei allen Aufgaben gleich bleibt.	
Konstanz der Differenz **7h)** *(Aufgaben vorlegen: 7 – 5 = 2, 8 – 6 = 2, 9 – 7 = 2, 10 – 8 = 2)* Erkläre, warum das Ergebnis bei allen Aufgaben gleich bleibt.	

⑧ **Zahlen-, Aufgabenblick und Rechenstrategien (Auswertungshinweise S. 73–76)**	
8a) Schreibe möglichst viele Aufgaben mit dem Ergebnis 10 (4, 35, 24) auf. Ggf: Kennst du auch Minusaufgaben? Fallen dir auch Mal- oder Geteiltaufgaben ein?	
8b) Ich zeige dir eine Aufgabe. Bei der Aufgabe sollst du nicht genau rechnen, sondern schnell sagen, ob das Ergebnis größer oder kleiner als 10 (20) ist. (5 + 7, 2 + 6, 4 + 8, 12 + 5, 8 + 9, 13 + 9, ...)	
8c) Löse die Rechenaufgabe 7 + 8 (9 + 4, 5 + 6) Beschreibe, wie du vorgehst.	
8c*) Löse die Rechenaufgabe 37 + 9 (25 + 27, 34 + 49). Beschreibe, wie du vorgehst.	
8d) Löse die Rechenaufgabe 15 – 7 (14 – 9, 11 – 8). Beschreibe, wie du vorgehst.	
8d*) Löse die Rechenaufgabe 43 – 8 (72 – 35, 34 – 19, 62 – 59). Beschreibe, wie du vorgehst.	
8e) Nenne das **Doppelte** von 19 (von 25, von 60). Erkläre. Nenne die **Hälfte** von 50 (von 32, von 70, von 140). Erkläre.	

Tabelle 11: Diagnosebogen

4.1.2 Auswertungshinweise

① Zahlvorstellung: Zählen und Orientierung im Zahlenraum	
Aufgabenstellungen **1a) Vorwärtszählen:** Zähle vorwärts ab 5 (17, 32, ...). **1b) Rückwärtszählen:** Zähle rückwärts ab 7 (18, 72, ...). **1c) Vorgänger:** Welche Zahl kommt vor der 4 (23, 31 ...)? **1d) Nachfolger:** Welche Zahl kommt nach der 6 (43, 59, ...)?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Zügiges, fehlerloses (Rückwärts-) Zählen in verschiedenen Zahlenräumen	Systematischer Aufbau der Zahlwortreihe wird sicher angewendet.
Einstieg in den Zählprozess unsicher Unsicherheiten oder Fehler beim Zählen	Zahlwortreihe/System der Zahlwortreihe noch nicht geläufig → Förderung: Vorwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren
Zehnerübergänge unsicher	Zahlwortreihe/System der Zahlwortreihe noch nicht sicher; insbesondere: Rolle der Zehn ggf. noch unklar → Förderung: Vorwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren, Bündeln und Entbündeln, Zahlen richtig aussprechen
Zählen bei Zahlen aus gleichen Ziffern (z. B. 32, 33, 34 oder 78, 77, 76) unsicher	Zahlwortreihe/System der Zahlwortreihe noch nicht automatisiert; insbesondere: Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56) → Förderung: Vorwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Verwechseln oder Unsicherheiten beim Vorwärts-/Rückwärtszählen bzw. Vorgänger/Nachfolger	Begriffe noch unklar → Förderung: Vorwärtszählen, Rückwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren

Aufgabenstellungen **1e) Vorwärtszählen und Rückwärtszählen in Schritten:** Zähle in 2er-Schritten vorwärts/rückwärts ab 6 (7, 22, 57). **1f) Vorwärtszählen und Rückwärtszählen in Schritten:** Zähle in 10er-Schritten vorwärts/rückwärts ab 20 (70, 57).	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Zügiges, fehlerloses (Rückwärts-) Zählen in Schritten in verschiedenen Zahle räumen	Systematischer Aufbau der Zahlwortreihe wird sicher angewendet, Zahlbeziehungen und -eigenschaften werden für Zählprozesse genutzt. 2er Schritte: Zahleigenschaften gerade/ungerade können ggf. genutzt werden. 10er Schritte: Zehnerstelle im Zahlwort kann identifiziert und verändert werden.
Zehner-, Hunderterübergänge unsicher	Zahlwortreihe/System der Zahlwortreihe noch nicht sicher; insbesondere: Rolle der Zehn (Hundert) ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Zählen bei Zahlen aus gleichen Ziffern („Paschzahlen“) unsicher	Zahlwortreihe und System der Zahlwortreihe noch nicht automatisiert; insbesondere: Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort noch unklar → Ggf. weitere Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56) → Förderung: Vorwärtszählen, Rückwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren
Schrittgröße wird *nicht* eingehalten	Unsicherheiten bei Zahlbeziehungen und Zahleigenschaften: insbesondere Stellenwertsystem und / oder gerade bzw. ungerade Zahlen → Ggf. Aufgabenstellung unklar (überprüfen mit: Rechne 57 + 10 und 57 + 2) → Förderung: Zahlen sortieren, Darstellen von Anzahlen, Strukturieren von Anzahlen, Bündeln und Entbündeln, Aufgabenfolgen (immer plus zwei, plus 10, plus x)
Zwischenzahlen werden (leise) mitgezählt	Zahlbeziehungen und -eigenschaften werden nicht sicher genutzt → Förderung: Vorwärtszählen, Abzählen, Zahlen sortieren
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Aufgabenstellungen

1g) **Zahlenvergleich** (**mündlich**): Welche Zahl ist größer: 74 oder 56? Erkläre.

1h) **Zahlenvergleich** (**notiert**): Welche Zahl ist größer? *(63 und 47 notiert vorlegen)* Erkläre.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Begründung unter Nutzung der Stellenwerte, z. B.: Die 74 hat 7 Zehner und die 56 nur 5 Zehner. Begründung unter Nutzung der Anordnung der Zahlen, z. B.: Die 56 kommt vor der 74, dazwischen kommen noch die ganzen Sechziger.	Zahleigenschaften und -beziehungen können zur Orientierung im Zahlenraum sicher genutzt werden.
Begründung unter Nutzung der Ziffern (nicht der Stellenwerte)	Ziffernweises Vorgehen ohne Bezug zu den Stellenwerten kann darauf hindeuten, dass der Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort/Zahlzeichen noch unklar ist. → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort/Zahlzeichen noch unklar → Diagnose: fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

② Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung	
Aufgabenstellungen am **Rechenrahmen** **2a) Zahlen darstellen**: Stelle am Rechenrahmen die 7 (13, 34, 67, ...) ein. Beschreibe, was du machst. *(Zahlen entweder mündlich oder notiert vorgeben)* **2b) Zahlen ablesen**: Welche Zahl habe ich dir am Rechenrahmen eingestellt? (6, 14, 43, 76, ...) Erkläre. *(Zahlen mündlich nennen und notieren lassen)* **2c) Zahlen nach kurzer Präsentation ablesen (Schnelles Sehen):** Ich zeige dir die Zahl am Rechenrahmen nur kurz. (7, 9, 16, 23, ...) Welche Zahl siehst du? Beschreibe, was du gesehen hast. Erkläre, warum das die … ist.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Sicheres Einstellen bzw. Bestimmen der Zahlen unter Berücksichtigung der Strukturierungsmerkmale des Rechenrahmens	Struktur des Materials wird erkannt und genutzt. Sichere Übersetzung zwischen Zahlwort und Menge
Fünfer-/Fünfzigerstruktur wird nicht oder falsch genutzt (z. B. Fünfer wird als Zehner gedeutet)	Struktur des Materials wird nicht erkannt oder genutzt. → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen
Einzelnes Abzählen von Kugeln und/oder Reihen	Das Kind kann zwischen Zahlwort und Menge übersetzen, wenn auch nicht mit einem Blick: Struktur des Materials wird nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Aufgabenstellungen mit **Zehnersystem-Blöcken**	
2d) Zahlen darstellen: Lege mit den Zehnersystem-Blöcken die 12 (34, 40, …). Beschreibe, was du machst. (*Zahlen entweder mündlich oder notiert vorgeben*) **2e) Zahlen ablesen**: Welche Zahlen habe ich mit den Zehnersystem-Blöcken gelegt? (11, 23, 30, 76, ...) Erkläre. *(Zahlen mündlich nennen und notieren lassen)* **2f) Zahlen nach kurzer Präsentation ablesen (Schnelles Sehen):** Ich zeige dir die Zahl mit den Zehnersystem-Blöcken nur kurz. (4, 20, 23, ...) Welche Zahl siehst du? Beschreibe, was du gesehen hast.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Sicheres Legen bzw. Bestimmen der Zahlen unter Berücksichtigung der Bedeutung der Einerwürfel und Zehnerstangen	Struktur des Materials wird erkannt und genutzt. Sichere Übersetzung zwischen Zahlwort und Menge
Einzelnes Abzählen von Würfeln ohne Nutzung der Zehnerstangen	Die Schülerin/Der Schüler kann zwischen Zahlwort und Menge übersetzen, wenn auch nicht mit einem Blick: Struktur des Materials wird nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen Rolle der Zehn und der fortgesetzten Bündelung ggf. noch unklar → Diagnose: Fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort oder Zahlzeichen ggf. noch unklar → Diagnose: Fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Große Unsicherheiten bei der Nutzung des Materials	Struktur des Materials wird nicht sicher erkannt und genutzt. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen

Aufgabenstellungen am **Zahlenstrahl**

2g) Zahlen darstellen: Ich sage dir eine Zahl und du zeigst mir, wo sie am Zahlenstrahl zu finden ist. (7, 13, 34, 67, ...) Wie gehst du vor? Beschreibe.

2h) Zahlen ablesen: Ich zeige dir Positionen am Zahlenstrahl und du sagst mir, welche Zahlen dort stehen müssen.
(6, 14, 43, 78, ...) Wie gehst du vor? Beschreibe.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Sicheres Benennen und Bestimmen von Positionen am Zahlenstrahl	Struktur des Materials wird erkannt und genutzt. Sichere Übersetzung zwischen Zahlwort und ordinaler Zahldarstellung
Im falschen Zehner Zählendes Vorgehen Zehnermarkierungen und Fünfermarkierungen verwechselt	Struktur des Materials wird nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Verorten und Finden von Zahlen auf dem Zahlenstrahl, Zahlen sortieren
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Aufgabenstellungen zum **Schreiben und Lesen** von Zahlen

2i) Zahlen schreiben: Ich diktiere dir Zahlen. (14, 28, 76, 55, 80, ...) Schreibe sie auf.

2j) Zahlen lesen: Hier siehst du Zahlen. (16, 45, 67, 88, 70) Lies sie vor.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Zahlen werden korrekt von links nach rechts notiert. Zahlen können korrekt vorgelesen werden.	Sichere Übersetzung zwischen Zahlwort und Zahlzeichen Der Zusammenhang zwischen Stellenwerten und Zahlwortbildung scheint verstanden zu sein.
Zahlen werden invers notiert (zuerst die Einerstelle, dann die Zehnerstelle links davor).	Schreibfluss von links nach rechts wird nicht eingehalten. Das muss nicht problematisch sein, sollte aber mit einem sogenannten Taschenrechnerdiktat überprüft werden: Werden die Zahlen hier ebenfalls invers eingetippt (also in der Reihenfolge, in der die Wortbestandteile genannt werden), entstehen automatisch Zahlendreher. In jedem Fall empfiehlt sich die Vermeidung der inversen Schreibweise. → Förderung: Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Zahlendreher beim Schreiben oder Lesen der Zahlen	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort oder Zahlzeichen ggf. noch unklar → Diagnose: Fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Zahlen mit Nullen werden falsch geschrieben oder vorgelesen	Die Rolle der Null als Platzhalter für einen unbesetzten Stellenwert ist noch unklar → Diagnose: Fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Bei diktierten Zahlen werden überflüssige Nullen notiert (z. B. zweiundfünfzig → 502)	
Erklärung mit Rückgriff auf die Stellenwerte (z. B. das sind fünfzig, weil das die Zehnerstelle ist)	Sichere Übersetzung zwischen Zahlwort und Zahlzeichen. Der Zusammenhang zwischen Stellenwerten und Zahlwortbildung scheint verstanden zu sein.
Erklärungen ohne expliziten Bezug zu den Stellenwerten (z. B. ... weil wir das so gelernt haben)	Möglicherweise noch kein sicheres Verständnis über den Zusammenhang zwischen Stellenwerten und Zahlwortbildung → Diagnose: Fehlendes Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

③ Operationsvorstellungen und Rechnen: Addition und Subtraktion

Aufgabenstellungen zu **Rechengeschichten**

3a) Statisch: ***zusammenfassen***	Ich erzähle dir eine Geschichte. Peter und Tom haben Sammelkarten dabei: Peter hat fünf und Tom hat drei. Wie viele haben beide zusammen? Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.
3b) Dynamisch: ***wegnehmen***	Ich erzähle dir eine Geschichte. Paula hat acht Karten. Sie gibt drei Karten ab. Wie viele Karten hat sie dann noch? Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.
3c) Dynamisch: ***Unterschied ermitteln***	Ich erzähle dir eine Geschichte. Kevin hat drei Karten. Evelyn hat sieben Karten. Wie viele Karten müsste ich Kevin geben, damit Kevin genauso viele Karten hat wie Evelyn? Wie könnte eine passende Rechenaufgabe heißen? Erkläre.
3d) Geschichten ***erfinden***	Erfinde zu der Aufgabe 8 – 6 (3 + 5) eine Geschichte.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Aufgabe passt zur Geschichte und umgekehrt	Tragfähige Grundvorstellung zur Addition/Subtraktion kann angenommen werden.
Nur eine Übersetzungsrichtung gelingt	Ggf. ist die Aufgabenstellung unklar. Möglicherweise kann aber auch eine einseitige Operationsvorstellung vorliegen. → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen
Die selbst erzählte Geschichte bleibt auf der symbolischen Ebene („eine Drei trifft eine Fünf und dann waren sie zusammen eine Acht“) ohne Bezug zu entsprechenden Anzahlen	
Die Formulierung der Geschichte hat Einfluss auf das korrekte Nennen einer Rechnung.	Eine oder mehrere der Grundvorstellungen können nicht sicher aktiviert werden. → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen

Aufgabenstellungen mit **Material** (**Plättchen**) (im Zahlenraum bis 10)

3e) Löse die Aufgabe 8 – 2 (5 + 3) mit Plättchen.

3f) Ich lege Plättchen. Welche Aufgabe könnte es sein*? (3 Plättchen hinlegen, 4 Plättchen dazu legen, sichtbare Lücke lassen, Aufgabe erfragen (3 + 4); 6 Plättchen hinlegen, 3 Plättchen wegschieben, Aufgabe erfragen, (6 – 3))*

3g) Welche Aufgabe musst du rechnen, um den Unterschied zwischen 8 und 5 zu finden? Zeige mir das mit Plättchen.

Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Aufgaben können mit den Plättchen dargestellt und gelöst werden.	Tragfähige Grundvorstellung zur Addition/Subtraktion kann angenommen werden.
Auch Mengen kleiner 4 werden abgezählt	Ggf. noch keine sichere simultane Mengenauffassung → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen
Eine (oder beide) Operation(en) kann (können) nicht sicher ausgeführt werden.	Eine tragfähige Grundvorstellung zu Addition und/oder Subtraktion ist noch nicht entwickelt. → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen
Verzählen beim Legen oder Ermitteln von Anzahlen	Zählkompetenz noch nicht sicher → Förderung: Abzählen
Zur Differenz: Platzhalteraufgabe wird genannt (5 + __ =8)	Der Unterschied kann mit einem entsprechenden Term ermittelt werden.
Zur Differenz: Subtraktionsaufgabe wird genannt 8 – 5= __	Grundvorstellung zur Subtraktion als Ermittlung des Unterschieds kann angenommen werden.
Zur Differenz: Es wird keine (passende) Aufgabe formuliert.	Ggf. ist der Begriff „Unterschied“ unklar, ggf. noch keine Grundvorstellung zur Subtraktion als Differenzbildung → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen
Bei der Plättchen-Darstellung werden fünf Plättchen zu acht Plättchen ergänzt.	Der Unterschied kann handelnd ermittelt werden.
Eine Menge von fünf Plättchen wird mit einer Menge von acht Plättchen verglichen oder angeglichen.	

Aufgabenstellungen mit **Material** (**Rechenrahmen**)

Aufgaben ohne Zehnerübergang:

3h) Löse die Aufgabe 4 + 5 (7 – 4, 43 + 6, 38 – 6, ...) am Rechenrahmen. Erkläre, wie du vorgehst.

3i) Ich schiebe dir am Rechenrahmen eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (2 + 5, 8 – 4, 23 + 5, 37 – 5, ...) Woher weißt du, welche Aufgabe ich geschoben habe?

Aufgaben mit Zehnerübergang:

3j) Löse die Aufgabe 7 + 8 (14 – 9, 28 + 6, 43 – 7, ...) am Rechenrahmen. Erkläre, wie du vorgehst.

3k) Ich schiebe dir am Rechenrahmen eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (6 + 5, 12 – 6, 38 + 5, 42 – 6, ...) Woher weißt du, welche Aufgabe ich geschoben habe?

Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Aufgaben werden angemessen dargestellt und gelöst.	Tragfähige Grundvorstellung zur Addition und Subtraktion kann angenommen werden.
Zählendes Vorgehen am Material	Struktur des Materials wird noch nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen
Zehner-/Fünfer-/Fünfziger-Struktur bleibt unberücksichtigt.	

Eine (oder beide) Operation(en) kann (können) nicht sicher ausgeführt oder erkannt werden.	Eine tragfähige Grundvorstellung zu Addition und/oder Subtraktion ist noch nicht entwickelt → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen
Zahlendreher	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort bzw. am Material ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

Aufgabenstellungen mit **Material** (**Zehnersystem-Blöcke**) **Aufgaben ohne Zehnerübergang:** **3l)** Löse die Aufgabe 52 – 20 (23 + 30, ...) mit den Zehnersystem-Blöcken. Erkläre, wie du vorgehst. **3m)** Ich lege dir mit den Zehnersystem-Blöcken eine Aufgabe. Welche Aufgabe könnte das gewesen sein? (45 – 10, 24 + 30, ...) Woher weißt du, welche Aufgabe ich gelegt habe? **Aufgaben mit Zehnerübergang:** **3n)** Löse die Aufgabe 47 + 6 (32 – 6, ...) mit den Zehnersystem-Blöcken. Erkläre, wie du vorgehst.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Aufgaben werden angemessen dargestellt und gelöst.	Tragfähige Grundvorstellung zur Addition und Subtraktion kann angenommen werden.
Zählendes Vorgehen am Material, ohne Nutzung der Zehner	Struktur des Materials wird noch nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Anzahlen (schnell) erkennen, Darstellen von Anzahlen Prinzip der fortgesetzten Bündelung ggf. noch unklar → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Eine (oder beide) Operation(en) kann (können) nicht sicher ausgeführt oder erkannt werden.	Eine tragfähige Grundvorstellung zur Addition und/oder Subtraktion ist noch nicht entwickelt. → Förderung: Operationsverständnis und Rechnen
Bündeln und Entbündeln beim Übergang gelingt nicht sicher.	Struktur des Materials wird möglicherweise noch nicht sicher erkannt und/oder genutzt. → Förderung: Bündeln und Entbündeln Prinzip der fortgesetzten Bündelung ist ggf. noch unklar. → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)
Zahlendreher oder Vertauschung von Zehnern und Einern am Material	Unterschied zwischen Zehnern und Einern im Zahlwort ist ggf. noch unklar. → Diagnose: Stellenwertverständnis (Diagnosebogen, S. 56)

④ Automatisierte Grundaufgaben: Einspluseins und Zahlzerlegungen

Aufgabenstellungen **Einspluseins** (Addition und Subtraktion)

- **4a)** Löse die Rechenaufgabe 5 + 5. (1 + 9, 3 + 7, 4 + 3, 2 + 6 ...)
- **4b)** Löse die Rechenaufgabe 10 – 5. (10 – 9, 10 – 7, 7 – 4, 8 – 6, ...)
- **4c)** Nenne das Doppelte von 4. (von 5, von 7, von 9, von 10, ...)
- **4d)** Nenne die Hälfte von 6. (von 8, von 10, von 14, von 18, von 20, ...)

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Alle Lösungen schnell und sicher	Es kann von einem guten Vorrat an automatisierten Grundaufgaben ausgegangen werden.
Einige Aufgabensätze können nicht schnell abgerufen werden.	Nicht alle Grundaufgaben sind automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Besondere Schwierigkeiten bei der Addition und/oder Subtraktion	
Zählendes Vorgehen	
Verwandte Aufgaben werden unterschiedlich gelöst (z. B. 3 + 7 wird gewusst, 10 – 7 aber nicht, 10 – 7 wird abgezählt)	Zahl- und Aufgabenzusammenhänge werden nicht sicher genutzt. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben, Tausch- und Umkehraufgaben, Verwandte Aufgaben finden, Hilfsaufgaben nutzen

Aufgabenstellungen **Zahlzerlegung**

- **4e) Zahlzerlegung der 10:** Wie viel fehlt von 5 bis 10? (von 9, von 7, von 4, von 2, von 3, von 8, von 6, von 1)
- **4f) Zahlzerlegung der 8:** Wie viel fehlt von 3 bis 8? (von 7, von 4, von 6, von 5, von 2, von 1)

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Schnelles und sicheres Benennen der zu ergänzenden Zahl.	Es kann von einem guten Vorrat an automatisierten Grundaufgaben ausgegangen werden.
Schnelles, aber fehlerhaftes Benennen der zu ergänzenden Zahl	Zahlensätze sind ggf. falsch oder nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Langsames, aber korrektes Benennen der zu ergänzenden Zahl	
Zählendes Vorgehen	
Unterschiedliche Bearbeitungszeiten bei den jeweiligen Tauschaufgaben (7/__, 3/__)	Zahl- und Aufgabenzusammenhänge werden nicht sicher genutzt. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben, Tausch- und Umkehraufgaben, verwandte Aufgaben finden
Verwandte Aufgaben werden unterschiedlich gelöst (z. B. 3 + 7 wird auswendig genannt, die Ergänzung von 3 bis zur 10 aber abgezählt)	

⑤ Stellenwerte: Bündeln und Entbündeln

Aufgabenstellungen **Bündeln**

5a) Hier liegen Würfel. (23) Wie viele sind das? Erkläre.
Wie viele Zehner hat die Zahl? Erkläre.
Lege die Würfel so, dass man sehen kann, wie viele Zehner es sind.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Die Anzahl der Würfel kann bestimmt werden.	Übersetzung zwischen einer Menge und dem entsprechenden Zahlwort gelingt.
Die Anzahl der Zehner kann genannt werden.	Der Wortbestandteil 20 kann als zwei Zehner identifiziert werden.
Es werden zwei Zehnerbündel hergestellt.	Prinzip der Bündelung und Bedeutung der 10 scheinen verstanden zu sein.
Das Kind verzählt sich, die Aufgaben zu den Zehnern und zum Bündeln gelingen jedoch.	Prinzip der Bündelung und Bedeutung der 10 scheinen verstanden zu sein. → Diagnose: Zahldarstellung und -auffassung (Diagnosebogen, S. 49) → Ggf. Förderung: Abzählen, Zahlen (schnell) Auffassen, Darstellen von Anzahlen
Die Anzahl der Würfel kann nicht bestimmt werden.	Verzählen: Abzählprozess ggf. nicht sicher → Diagnose: Zählen (Diagnosebogen, S. 53) → Ggf. Förderung: Abzählen
Die Anzahl der Zehner kann nicht genannt werden.	Der Wortbestandteil 20 kann nicht als zwei Zehner identifiziert werden. → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen Prinzip der Bündelung ist noch nicht verstanden und kann nicht angewandt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln

Aufgabenstellungen **Entbündeln**

5b) Hier sind drei Zehner (drei Steckwürfelstangen). Wie viele Würfel sind das?
Wenn ich jetzt einen Würfel wegnehme (*Würfel abbrechen*), wie viele Zehner sind es dann?
Und wenn ich noch einen Würfel wegnehme, wie viele Zehner sind es nun?

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Die Anzahl der Würfel (dreißig) kann richtig benannt werden.	Zusammenhang zwischen Zehnern und Einern ist verstanden.
Die Anzahl der Würfel wird zählend ermittelt.	Zusammenhang zwischen Zehnern und Einern ist noch nicht verstanden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen
Die Anzahl der verbleibenden Zehner kann richtig benannt werden (zwei Zehner).	Prinzip des Entbündelns ist verstanden.
Die Anzahl der verbleibenden Zehner wird *zwanzig* genannt.	Prinzip des Entbündelns ist verstanden, aber wahrscheinlich Unklarheit bei der Verwendung des Zahlwortes *zwanzig* zur Beschreibung von zwei Zehnern. → Förderung: Richtiges Sprechen zweistelliger Zahlen
Die Anzahl der verbleibenden Zehner wird nicht oder falsch genannt.	Zusammenhang zwischen Zehnern und Einern ist noch nicht verstanden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln

⑥ **Stellenwerte: Lesen, Schreiben und Sprechen von Zahlen**	
Aufgabenstellungen zum **Notieren von dargestellten Anzahlen** (siehe auch Aufgaben zur Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung S. 56-58) **6a) Zahl mit Zehnersystem-Blöcken legen und aufschreiben lassen** *(Zehnerstangen nach „oben“, Einerwürfel „darunter“)* Hier liegt eine Zahl mit den Zehnersystem-Blöcken. (5Z3E, 3Z) Schreibe die Zahl auf. Erkläre, woran du erkennst, wie die Zahl geschrieben wird.	
6a*) Zahl mit Zehnersystem-Blöcken nicht vollständig gebündelt legen *(Zehnerstangen nach „oben“, Einerwürfel „darunter“)* Hier liegt eine Zahl mit den Zehnersystem-Blöcken. (3Z12E) Schreibe die Zahl auf. Erkläre, woran du erkennst, wie die Zahl geschrieben wird.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Zahlen können korrekt aufgeschrieben werden.	Die Übersetzung zwischen strukturiertem Material und notierter Zahl gelingt.
Die einzelnen Ziffern an den jeweiligen Stellen können entsprechend ihrem Stellenwert gedeutet und angemessen erklärt werden.	Die Rolle des Stellenwertsystems und die Mächtigkeit der einzelnen Stellen sind verstanden.
Zahlendreher beim Notieren	Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Die Anzahl des Materials wird notiert (z. B. bei 5 Zehnerstangen und 3 Einerwürfeln: „8“).	Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar; die Struktur des vorliegenden Materials kann noch nicht genutzt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Die ungebündelten Anzahlen werden ungebündelt notiert (3 Zehner, 12 Einer als 312).	Prinzip der Bündelung und die Bedeutung der Stellenwerte ist noch nicht verstanden und kann nicht genutzt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Probleme beim Schreiben und Lesen von Nullen: z. B. 503 statt 53	Die Rolle der Null als Platzhalter für einen unbesetzten Stellenwert ist ggf. noch unklar. → Förderung: Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Die einzelnen Ziffern an den jeweiligen Stellen werden nicht entsprechend ihrem Stellenwert gedeutet und/oder können nicht angemessen erklärt werden.	Die Bedeutung der stellenweisen Notation von Zahlen ist ggf. noch unklar. → Förderung: Stellengerechtes Schreiben von Zahlen

Aufgabenstellungen zum **Deuten von notierten Zahlen** (siehe auch Aufgaben zur Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung S. 61–63) **6b) Zahlen vorgeben** und mit **Zehnersystem-Blöcken legen lassen** Ich schreibe dir eine Zahl auf. (54, 37, 40, 22) Lege sie mit den Zehnersystem-Blöcken. Erkläre, woran du erkennst, was du legen musst.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Zahlen können mit dem Material korrekt gelegt werden.	Die Übersetzung zwischen strukturiertem Material und notierter Zahl gelingt.
Die einzelnen Ziffern an den jeweiligen Stellen können entsprechend ihrem Stellenwert gedeutet und angemessen erklärt werden.	Die Rolle des Stellenwertsystems und die Mächtigkeit der einzelnen Stellen sind verstanden.
Nullen können nicht oder nur fehlerhaft gedeutet werden.	Die Rolle der Null als Platzhalter für einen unbesetzten Stellenwert ist ggf. noch unklar. → Förderung: Stellengerechtes Schreiben von Zahlen
Die einzelnen Ziffern an den jeweiligen Stellen werden nicht entsprechend ihrem Stellenwert gedeutet und/oder können nicht angemessen erklärt werden.	Die Bedeutung der stellenweisen Notation von Zahlen ist ggf. noch unklar. → Förderung: Stellengerechtes Schreiben von Zahlen

Aufgabenstellungen zum **Sprechen von dargestellten Anzahlen** (siehe auch Aufgaben zur „Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung“ S. 61-63) **6c)** Zahl mit **Zehnersystem-Blöcken** legen und dann **nennen lassen** *(Zehnerstangen nach „oben“, Einerwürfel „darunter“)* Hier liegt eine Zahl mit Zehnersystem-Blöcken. (4Z3E, 5Z). Wie heißt die Zahl?	
6c*) Zahl mit **Zehnersystem-Blöcken nicht vollständig gebündelt** legen und dann **nennen lassen** *(Zehnerstangen nach „oben“, Einerwürfel „darunter“)* Hier liegt eine Zahl mit Zehnersystem-Blöcken. (4Z12E). Wie heißt die Zahl?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Zahl wird korrekt benannt.	Die Übersetzung zwischen strukturiertem Material und gesprochener Zahl gelingt.
Die nicht vollständig gebündelte Anzahl kann ohne Weiterzählen korrekt benannt werden.	Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und die Regeln der Zahlwortbildung können genutzt werden.
Die Zahl wird korrekt benannt, der Zusammenhang zwischen Material und den Wortbestandteilen kann jedoch nicht erklärt werden („Woher weißt du das?“).	Die Regeln der Zahlwortbildung und die Zusammenhänge mit dem vorliegenden Material können noch nicht sicher beschrieben werden. → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen
Es entstehen Zahlendreher beim Sprechen der dargestellten Anzahlen.	Die Regeln der Zahlwortbildung sind noch nicht verstanden. → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar. → Förderung: Bündeln und Entbündeln
Die ungebündelten Anzahlen werden ungebündelt ausgesprochen (4 Zehner, 12 Einer als „vierzigzwölf“).	Prinzip der Bündelung ist noch nicht verstanden und kann nicht angewandt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln, Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen

Die Anzahl der Objekte wird genannt (z. B. bei 5 Zehnerstangen und 3 Einerwürfeln: acht).	Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar; die Struktur des vorliegenden Materials kann noch nicht genutzt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln

Aufgabenstellungen zur **Deutung des Zahlwortes** (siehe auch Aufgaben zur Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung S. 61-63)

6d) Zahlen nennen und mit Zehnersystem-Blöcken legen lassen
Ich nenne dir eine Zahl. (56, 34, 40, zwanzig und fünf, …)
Lege sie mit den Zehnersystem-Blöcken. Erkläre, was du legen musst.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Sicheres Legen der gesprochenen Zahlen.	Die Übersetzung zwischen strukturiertem Material und gesprochener Zahl gelingt.
Die Anzahl kann mit Material gelegt werden, der Zusammenhang zwischen Material und den Wortbestandteilen kann jedoch nicht erklärt werden („Woher weißt du, dass du…?“).	Die Regeln der Zahlwortbildung und die Zusammenhänge mit dem vorliegenden Material können noch nicht sicher beschrieben werden. → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen
Es entstehen Zahlendreher beim Sprechen der dargestellten Anzahlen.	Die Regeln der Zahlwortbildung sind noch nicht verstanden. → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar. → Förderung: Bündeln und Entbündeln
Mit den Zehnersystem-Blöcken wird das Zahlzeichen gelegt (also nicht die Anzahl).	Die Struktur des vorliegenden Materials kann noch nicht genutzt werden. → Förderung: Darstellen von Anzahlen, Stellengerechtes Schreiben von Zahlen, Bündeln und Entbündeln
Die Anzahl der einzelnen Stellenwerte wird gelegt ohne Rücksicht auf ihre Mächtigkeit (z. B. dreiundfünfzig: drei Zehnerstangen und fünf Zehnerstangen).	Die Struktur des vorliegenden Materials kann noch nicht genutzt werden. → Förderung: Bündeln und Entbündeln → Förderung: Richtiges Sprechen mehrstelliger Zahlen Die Unterscheidung von Zehnern und Einern ist noch unklar.

⑦ Zahl-, Aufgabenzusammenhänge und Rechenregeln

Aufgabenstellungen zum **Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion (Umkehraufgabe)**

7a) Rechne 5 + 4 (9 – 4).
Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten Aufgabe geholfen? Warum?

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben unter Nutzung des Zusammenhangs der Addition und Subtraktion	Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird erkannt und genutzt.
Zusammenhang wird erkannt (Dann sind es so viele wie vorher.) Die Ausgangszahl wurde aber vergessen (Wie viele waren das denn?) oder falsch bzw. zählend ermittelt.	Der Zusammenhang zwischen der Additions- und entsprechenden Subtraktionsaufgabe kann selbstständig hergestellt werden. Zahlensätze sind noch nicht automatisiert → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Erneutes Ermitteln der Ausgangszahl, ohne Nutzung der vorigen Aufgabe	Der Zusammenhang zwischen der Additions- und entsprechenden Subtraktionsaufgabe wird nicht selbstständig hergestellt. → Förderung: Umkehraufgaben

Nur mit Material/nur auf der symbolischen Ebene	Die Übersetzung zwischen Material und symbolischer Ebene gelingt nicht sicher, Hinweis auf ein fehlendes Operationsverständnis. → Diagnose: Operationsvorstellungen und Rechnen (Diagnosebogen, S. 54 f.)

Aufgabenstellungen zu **Tauschaufgaben** **7b)** Rechne 9 + 3 (3 + 9). Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten Aufgabe geholfen? Warum?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Lösung der zweiten Aufgabe mit Rückgriff auf die Tauschaufgabe	Tauschaufgaben werden sicher genutzt.
Die erste Aufgabe wird nicht korrekt oder abzählend gelöst, das Ergebnis wird dann aber zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Tauschaufgaben werden sicher genutzt. Zahlensätze sind noch nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Lösen der zweiten Aufgabe ohne Nutzung der ersten	Tauschaufgaben werden nicht selbstständig erkannt und genutzt → Förderung: Tauschaufgaben

Aufgabenstellungen zu **Nachbaraufgaben** **7c)** Rechne 7 + 5 (7 + 6). Rechne 14 – 7 (14 – 8). Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten Aufgabe geholfen? Warum?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Ergebnisse der ersten Aufgabe werden korrekt zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Nachbaraufgaben werden sicher genutzt.
Erste Aufgabe wird nicht korrekt oder abzählend gelöst, das Ergebnis wird dann aber zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Nachbaraufgaben werden sicher genutzt. Zahlensätze sind noch nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Die Ergebnisse der ersten Aufgabe werden zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt – allerdings wird dabei falsch ausgeglichen (bei der Subtraktion z. B. „Wenn die Sieben eins größer wird, muss das Ergebnis auch eins größer werden).	Das Konzept der Nachbaraufgaben ist bekannt und sie können selbstständig genutzt werden. Die operativen Veränderungen (siehe S. 63-65, S. 73) können noch nicht sicher angewendet werden. → Förderung: Gegensinniges Verändern, Aufgaben sortieren, Strukturierte Päckchen
Die zweite Aufgabe wird ohne Rückgriff auf die erste gelöst.	Nachbaraufgaben werden nicht selbstständig erkannt und genutzt. → Förderung: Hilfsaufgaben nutzen, Gegensinniges Verändern

Aufgabenstellungen zu **Analogieaufgaben** **7d)** Rechne 3 + 5 (30 + 50, 23 + 5). Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten/dritten Aufgabe geholfen? Warum? **7e)** Rechne 7 – 4 (70 – 40, 27 – 4). Hat dir die erste Aufgabe beim Lösen der zweiten/dritten Aufgabe geholfen? Warum?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Ergebnisse der ersten Aufgabe werden korrekt zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Analogien werden erkannt und selbstständig genutzt.
Die erste Aufgabe wird nicht korrekt oder abzählend gelöst, das Ergebnis wird dann aber zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Analogien werden erkannt und selbstständig genutzt. Zahlensätze sind noch nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierung von Grundaufgaben
Die erste Aufgabe wird nicht zur Lösung der zweiten Aufgabe genutzt.	Analogien werden nicht erkannt und/oder nicht selbstständig genutzt. → Förderung: (Zehner-) Analogien herstellen und nutzen, Verwandte Aufgaben finden, Strukturierte Päckchen

Aufgabenstellung zum **Teil-Ganzes-Konzept** **7f)** Unter einem Tuch sind zwei Plättchen, unter einem anderen sind fünf Plättchen. Wenn ich jetzt ein Plättchen verschiebe, bleiben es insgesamt gleich viele oder ändert sich etwas an der Gesamtanzahl? Woher weißt du das?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Begründung, dass sich die Gesamtanzahl nicht ändert, wird korrekt angegeben.	Die Konstanz der Summe von Anzahlen als Grundlage des Teil-Ganzes-Konzepts ist verstanden.
Dass sich die Anzahl nicht ändert wird angegeben, aber Begründung fehlt (z.B. werden die jeweiligen Summen errechnet).	Zahlbeziehungen können noch nicht sicher beschrieben werden. → Förderung: Gegensinniges Verändern
Es wird angegeben, dass sich die Anzahl ändert.	Die Grundlage für das Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts ist noch nicht gesichert. → Förderung: Gegensinniges Verändern, Mengen vergleichen

Aufgabenstellungen zur **Konstanz der Summe** **7g)** *Aufgaben vorlegen: 7 + 5 = 12, 8 + 4 = 12, 9 + 3 = 12, 10 + 2 = 12* Erkläre, warum das Ergebnis bei allen Aufgaben gleich bleibt.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Das gegensinnige Verändern der Summanden wird erkannt und für die Begründung genutzt (z. B. „die erste Zahl wird eins größer und dafür wird die andere eins kleiner, deshalb bleibt das Ergebnis gleich“).	Die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben werden erkannt und für eine Begründung genutzt. Das Konzept der Konstanz der Summe kann angewandt werden.
Die Begründung bezieht sich auf die jeweils einzelnen Aufgaben (z. B. „wenn man die Aufgaben ausrechnet, kommt da immer zwölf raus“).	Die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben werden noch *nicht* erkannt und für die Begründung genutzt. → Förderung: Gegensinniges Verändern

Aufgabenstellungen zur **Konstanz der Differenz** **7h)** *Aufgaben vorlegen: 7 – 5 = 2, 8 – 6 = 2, 9 – 7 = 2, 10 – 8 = 2* Erkläre, warum das Ergebnis bei allen Aufgaben gleich bleibt.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Das gleichsinnige Verändern der beteiligen Zahlen wird erkannt und für die Begründung genutzt (z. B. „die erste Zahl wird eins größer und die zweite auch, deshalb bleibt der Unterschied gleich“).	Die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben werden erkannt und für eine Begründung genutzt. Das Konzept der Konstanz der Differenz kann angewandt werden.
Die Begründung bezieht sich auf die jeweils einzelnen Aufgaben (z. B. „wenn man die Aufgaben ausrechnet, kommt da immer zwei raus“).	Die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben werden noch *nicht* erkannt und für die Begründung genutzt. → Förderung: Konstanz der Differenz

⑧ Zahlen-, Aufgabenblick und Rechenstrategien	
Aufgabenstellungen zum **Deuten von Zahlen** **8a)** Schreibe möglichst viele Aufgaben mit dem Ergebnis 10 (4, 35, 24, ...) auf. Ggf.: Kennst du auch Minusaufgaben? Fallen dir auch Mal- oder Geteiltaufgaben ein?	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Es werden verschiedene Aufgaben gefunden, auch verschiedene Rechenoperationen können genutzt werden.	Je mehr Aufgaben mit unterschiedlichen Rechenoperationen gefunden werden, desto besser ist der Zahlenblick. Zahlen können in unterschiedlichen operativen Zusammenhängen gedeutet und verändert werden.
Es werden verschiedene Aufgaben gefunden, aber nur zu einer Rechenoperation (z. B. Addition).	Andere Rechenoperationen (z. B. Subtraktion) sind noch nicht so gefestigt, dass sie für diese Aufgabenstellung sicher genutzt werden. → Förderung: Operationsvorstellungen und Rechnen, Aufgaben finden, Aufgaben sortieren, Verwandte Aufgaben finden

Es werden keine oder nur sehr wenige Aufgaben gefunden.	Zahlen werden nicht in ihrem Zusammenhang zu anderen Zahlen und Termen gedeutet. Wenn keine Plusaufgaben gefunden werden, deutet dies insbesondere darauf hin, dass Zahlen nicht als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen gedeutet werden können (Teil-Ganzes-Verständnis). → Förderung: Operationsvorstellungen und Rechnen, Tausch- und Umkehraufgaben, Gegensinniges Verändern, Automatisierte Grundaufgaben

Aufgabenstellungen zum **Überschlagen**

8b) Ich zeige dir eine Aufgabe. Bei der Aufgabe sollst du nicht genau rechnen, sondern schnell sagen, ob das Ergebnis größer oder kleiner als 10 (20) ist. (5 + 7, 2 + 6, 4 + 8, 12 + 5, 8 + 9, 13 + 9, ...).

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Das Überschlagen gelingt, die Begründungen beziehen sich auf die Zahlbeziehungen.	Die Zahlen und ihre Summe können in ihrer Größenordnung angemessen eingeschätzt werden.
Es wird nicht überschlagen, sondern gerechnet. Oder das Überschlagen ist falsch.	Das Überschlagen ist noch kein sicheres Mittel zur Einschätzung von Ergebnissen, Größenordnungen können noch nicht sicher eingeschätzt werden. → Förderung: Aufgaben finden, Aufgaben sortieren, Verwandte Aufgaben finden
Beim Ermitteln des Ergebnisses wird abgezählt.	Es werden noch keine tragfähigen Rechenstrategien genutzt. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben, Zahlen- und Aufgabenblick

Aufgabenstellungen zu **Rechenstrategien Zahlenraum bis 20**

8c) Addition: Löse die Rechenaufgabe 7 + 8 (9 + 4, 5 + 6, ...). Beschreibe, wie du vorgehst.

8d) Subtraktion: Löse die Rechenaufgabe 15 – 7 (14 – 9, 11 – 8, ...) Beschreibe, wie du vorgehst.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Die Aufgaben werden mit Rechenstrategien unter Verwendung von Zahlbeziehungen und automatisierten Grundaufgaben gelöst.	Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis 20 unter Rückgriff auf automatisierte Grundaufgaben genutzt werden.
Es werden Rechenstrategien genutzt, Teilaufgaben werden aber falsch gelöst.	Rechenstrategien sind bekannt, aber die Aufgaben des kleine "1 + 1" sind noch nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Aufgaben werden durch Zählstrategien gelöst (richtig oder falsch).	Ab dem zweiten Schulbesuchsjahr: Hinweis auf verfestigtes zählendes Rechnen Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis 20 nicht genutzt werden. → Förderung: Zahlen- und Aufgabenblick Grundaufgaben sind entweder noch nicht automatisiert oder können nicht genutzt werden. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben

Aufgabenstellungen zu **Rechenstrategien Zahlenraum bis 100**

8c*) Addition: Löse die Rechenaufgabe 37 + 9 (25 + 27, 34 + 49, ...). Beschreibe, wie du vorgehst.

8d*) Subtraktion: Löse die Rechenaufgabe 43 – 8 (72 – 35, 34 – 19, 62 – 59, ...). Beschreibe, wie du vorgehst.

Mögliche Beobachtungen	Mögliche Folgerungen
Die Aufgaben werden mit Rechenstrategien unter Verwendung von Zahlbeziehungen und automatisierten Grundaufgaben gelöst.	Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis 100 unter Rückgriff auf automatisierte Grundaufgaben genutzt werden.
Es werden Rechenstrategien genutzt, Teilaufgaben werden aber falsch gelöst.	Rechenstrategien sind bekannt, aber Zahlensätze sind noch nicht automatisiert. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben
Es werden Rechenstrategien genutzt, aber dabei werden Rechengesetze falsch angewandt.	Rechenstrategien sind bekannt, aber Rechengesetze sind noch nicht gefestigt oder können nicht angemessen angewandt werden. → Förderung: Zahlen- und Aufgabenblick
Ziffernweises vorgehen ggf. ohne Rücksicht auf die Stellenwerte.	Stellenwertverständnis noch nicht gefestigt → Förderung: Stellenwertverständnis
Zahlendreher	
Zehnerübergänge werden vergessen oder vermieden.	Bündelungs- und Entbündelungsprozesse sind noch unklar. → Förderung: Bündeln und Entbündeln
Bei Subtraktionsaufgaben: Die Einer von Minuend und Subtrahend werden vertauscht, um einen Zehnerübergang zu vermeiden.	Operationsverständnis zur Subtraktion noch nicht vollständig gefestigt → Förderung: Operationsvorstellungen und Rechnen, Subtraktion, Übergeneralisierung von Tauschaufgaben bei der Addition → Förderung: Tausch- und Umkehraufgaben
(Teil-) Ergebnisse werden zählend ermittelt.	Ab dem zweiten Schulbesuchsjahr: Hinweis auf verfestigtes zählendes Rechnen Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis 100 nicht sicher genutzt werden. → Förderung: Tausch- und Umkehraufgaben, Analogien erkennen und nutzen, Gegensinniges Verändern Grundaufgaben sind entweder noch nicht automatisiert oder können nicht genutzt werden. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben, Zahlen- und Aufgabenblick

Aufgabenstellungen zu **das Doppelte / die Hälfte** **8e)** Nenne das Doppelte von 19 (von 25, von 60, ...). Erkläre. Nenne die Hälfte von 50 (von 32, von 70, von 140, ...) Erkläre.	
Mögliche Beobachtungen	**Mögliche Folgerungen**
Die Aufgaben werden mit Rechenstrategien unter Verwendung von Zahlbeziehungen und automatisierten Grundaufgaben gelöst.	Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis (über) 100 unter Rückgriff auf automatisierte Grundaufgaben genutzt werden. Dabei können Analogien genutzt werden.
Ziffernweises vorgehen ggf. ohne Rücksicht auf die Stellenwerte	Stellenwertverständnis noch nicht gefestigt → Förderung: Stellenwertverständnis
Zahlendreher	
Die Hälfte von 70 kann nicht ermittelt werden.	Bündelungs- und Entbündelungsprozesse sind noch unklar. → Förderung: Bündeln und Entbündeln
(Teil-) Ergebnisse werden zählend ermittelt.	Ab dem zweiten Schulbesuchsjahr: Hinweis auf verfestigtes zählendes Rechnen Zahl- und Aufgabenbeziehungen können im Zahlenraum bis 100 nicht sicher genutzt werden. → Förderung: Tausch- und Umkehraufgaben, Analogien erkennen und nutzen, Gegensinniges Verändern Grundaufgaben sind entweder noch nicht automatisiert oder können nicht genutzt werden. → Förderung: Automatisierte Grundaufgaben, Zahlen- und Aufgabenblick

Tabelle 12: Auswertungshinweise

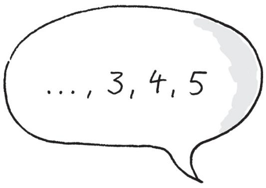
4.2 Förderung

4.2.1 Zahlvorstellung: Zählen und Orientierung im Zahlenraum

Zählen

Zählen kann man nicht verstehen, wohl aber die zugrundeliegende *Struktur der Zahlwortbildung* als auch die *Struktur der jeweiligen Zahlen* erkennen. Daher ist das Zählen nicht losgelöst von diesen beiden Inhalten zu betrachten: Nichtsdestotrotz kann es hilfreich sein, die Zahlwortreihe immer wieder aufzusagen, sowohl vor- als auch rückwärts in verschiedenen Schritten und von verschiedenen Startzahlen aus. Diese Geläufigkeit und das Verstehen der Struktur der Zahlwortbildung und der Zahlen können sich dabei gegenseitig positiv beeinflussen.

- **Vorwärtszählen**:
  Situationen zum Vorwärtszählen schaffen, zuhören, mitmurmeln, selbst zählen und eine angefangene Zahlwortreihe weiterzählen lassen, Zählen bis zu einer Endzahl
  Impulse: „Zähle ab 1 vorwärts.“, „Zähle weiter: 5, 6, ...“, „Zähle weiter ab 29.“, „Zähle von 7 bis 13.“, „Zähle bis 25.“
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

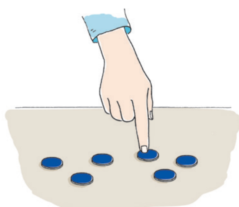


- **Rückwärtszählen**:
  Situationen zum Rückwärtszählen schaffen (Countdown-Situationen), zuhören, mitmurmeln, selbst rückwärts zählen und eine angefangene Zahlwortreihe weiter rückwärtszählen lassen
  Impulse: „Zähle von 7 rückwärts.“, „Zähle zurück: 5, 4, ...“, „Zähle bitte rückwärts ab 33.“, „Zähle rückwärts von 13 bis 7.“
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

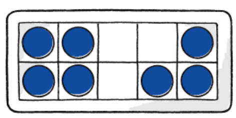
- **Zählen in Schritten**:
  Zählen in 10er-Schritten, Zählen in 5er-Schritten, Zählen in 2er-Schritten; die ausgelassenen Zahlen bei den 2er-Schritten können als Übung leise oder in Gedanken mitgesprochen werden (vorwärts/rückwärts; ab gerader/ungerader Zahl).
  Impulse: „Zähle in 2er-Schritten: 2,4 ...“, „Zähle ab der 12 in 2er-Schritten.“, „Zähle in 10er-Schritten: 10, 20, ...“, „Zähle ab 35 in 10er-Schritten.“ „Zähle in 2er-Schritten (5er-Schritten, 10er-Schritten) rückwärts.“
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

Abzählen

Beim Abzählen müssen Regeln beachtet werden – die sogenannten Zählprinzipien. Sobald die Zahlwortreihe in einem bestimmten Zahlenraum sicher gekonnt wird, ist es wichtig, dass pro Zahlwort nur ein Objekt gezählt wird und dass kein Objekt doppelt gezählt wird.



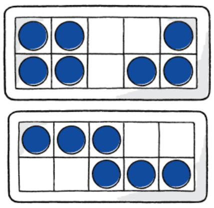
- **Bewegliche Objekte abzählen**:
  Impulse: „Wie viele sind das?“ oder „Gib mir 7.“
  Material: Plättchen, Würfel, Kastanien, Stifte, ...
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 20 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.



- **Auf Abbildungen abzählen:**
  Impulse: „Wie viele sind das?“ oder „Male fünf Punkte.“
  Material: Abbildungen mit zählbaren Objekten, z. B. Wimmelbilder, Abbildungen von Zahlenfeldern, Fotos, ...
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 20 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

Mengenvergleich

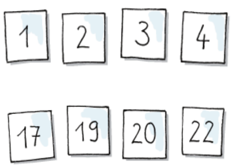
Mengen kann man auf verschiedene Arten vergleichen. Ein Mengenvergleich ist über eine Eins-zu-Eins-Zuordnung möglich, aber auch durch Abzählen oder das Nutzen von Strukturen. Die Eins-zu-Eins-Zuordnung ist die elementare Art des Mengenvergleichs und wird meist bei beweglichen Objekten genutzt. Bei unbeweglichen Objekten (zum Beispiel auf Abbildungen) ist es geschickter und einfacher die Objekte abzuzählen und dann die Anzahlen zu vergleichen (und nicht mehr die Objekte selbst). Wenn die zu vergleichenden Objekte in einer nachvollziehbaren Struktur angeordnet sind, kann auch diese Strukturierung beim Vergleich helfen. Vor allem im Zahlenraum größer als 10 ist die strukturierte Anordnung sinnvoll, um dem einzelnen Abzählen vorzubeugen.



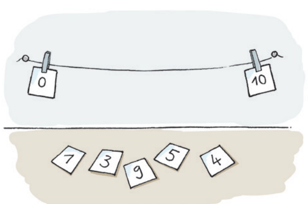
- **Mengen vergleichen**:
  Zwei Mengen vorgeben (als Abbildung oder mit Material)
  Impulse: „Wo ist mehr?“, „Wo ist weniger?“, „Sind das gleich viele?“, „Woher weißt du das?“
  Material: Plättchen, Zahlenfelder mit Plättchen, Zahlenfelder mit Punkten, 20er Rechenrahmen, 100er Rechenrahmen, Zehnersystem-Blöcke
  Zahlenraum: Den Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.

Sortieren von Zahlen

Die Kenntnis der Zahlwortreihe und die Orientierung im Zahlenraum sind eng verknüpft. Daher ist das Sortieren von Zahlen eine wichtige Übung zur sicheren Orientierung im Zahlenraum und zum Verständnis der linearen Darstellung von Zahlen, z. B. am Zahlenstrahl (siehe S. 80).



- **Zahlen sortieren**:
  Zahlenkarten unsortiert vorlegen (vollständiger oder unvollständiger Kartensatz) und sortieren lassen
  Impulse: „Bitte lege die Zahlen in die richtige Reihenfolge.“, „Wie gehst du vor?“, „Erkläre, wo die Karten hingehören.“, „Hier fehlen ein paar Karten. Sortiere sie der Größe nach und sag mir, welche Karten fehlen.“, „Erkläre, wo die Karten hingehören.“, „Erkläre, welche Karten fehlen.“
  Material: Vollständiger oder unvollständiger Kartensatz
  Zahlenraum: Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.



- **Zahlen einordnen**:
  Auf einer Zahlenleine sind bereits Zahlen aufgehängt, z. B. die 0 und die 10 (oder die 30 und die 40). Weitere Karten sollen dazu gehängt werden, z. B. 1, 3, 5, 6, 9, 13 (oder 31, 34, 35, 38, 43). Wichtig: Die Leine muss nicht vollständig gefüllt sein, es dürfen auch Karten fehlen.
  Impulse: „Hier sind schon zwei Zahlen. Wo gehören die anderen Zahlen hin?“, „Woher weißt du, wo die Zahlen hingehören?“, „Warum lässt du hier einen größeren Abstand zwischen den Karten als bei den anderen Zahlen?“
  Material: Unvollständiger Kartensatz, Zahlenleine
  Zahlenraum: Zahlenraum und Abstände je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.

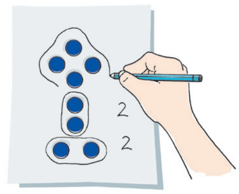
4.2.2 Zahlvorstellung: Zahldarstellung und -auffassung

Schnelles Sehen

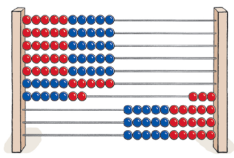
Vorgegebene *Anzahlen auf einen Blick zu erkennen* (Schnelles Sehen), ohne dabei zu zählen, ist eine wichtige Fähigkeit und Übung auf dem Weg zu einem tragfähigen Zahlverständnis. Diese Fähigkeit nennt man *strukturierendes Sehen*. Beim strukturierenden Sehen wird die Anordnung der Objekte genutzt, um mental Gruppen zu bilden, deren Anzahl man bereits kennt. Man kann diese Fähigkeit trainieren, indem die Objekte zunächst permanent präsentiert werden, später aber immer kürzer gezeigt werden. Eine vorbereitende Übung ist das Gruppieren von Elementen einer gegebenen Menge zum Beispiel durch Zusammenschieben oder Einkreisen.

- **Strukturierendes Gruppieren mit Objekten**:
  Eine Menge von Objekten wird vorgegeben und soll gruppiert werden, entweder in vorgegebenen Anzahlen oder frei.
  Impulse: „Bilde immer 2er-Gruppen (3er-Gruppen, 4er-Gruppen, ...).“, „Bilde selbst Gruppen, damit du gut sehen kannst, wie viele es sind.“
  Material: Plättchen, Würfel, Kastanien, Stifte, ...
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 20 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

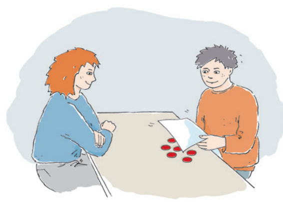
- **Strukturierendes Gruppieren mit Abbildungen**:
  Abbildungen von einer Anzahl von Elementen werden vorgegeben. Die Elemente sollen durch Einkreisen gruppiert werden. Die Elemente können unstrukturiert oder bereits vorstrukturiert sein, z. B. in einem Zehner- oder Zwanzigerfeld.
  Impulse: „Umkreise immer 2er-Gruppen (3er-Gruppen, 4er-Gruppen, ...).“, „Umkreise selbst, damit du gut sehen kannst, wie viele es sind.“
  Material: Abbildungen von Punkten (mit oder ohne Vorstrukturierung)
  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 20 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.



- **Strukturierende Anzahlerfassung**:
  Die Anzahl von unstrukturierten oder vorstrukturierten Elementen sollen ermittelt werden.
  Impulse: „Wie viele sind das?“, „Erkläre.“, „Beschreibe, was du siehst.“, „Kannst du eine Rechenaufgabe dazu nennen?“
  Material: Abbildungen von Punkten (ungeordnet oder vorstrukturiert), Zahlenfelder, Rechenrahmen oder Zehnersystem-Blöcke. Vor allem im Zahlenraum größer als 10 ist die strukturierte Anordnung sinnvoll, um dem Abzählen vorzubeugen.
  Zahlenraum: Den Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.

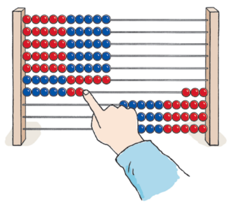


- **Schnelles Sehen**:
  Die Anzahl von unstrukturierten oder vorstrukturierten Elementen soll ermittelt werden
  Impulse: „Wie viele sind das?“, „Woher weißt du das?“, „Beschreibe, was du gesehen hast.“ „Kannst du eine Rechenaufgabe dazu nennen?“
  Material: Abbildungen von Punkten (ungeordnet oder vorstrukturiert), Zahlenfelder, Rechenrahmen oder Zehnersystem-Blöcke. Vor allem im Zahlenraum größer als 10 ist die strukturierte Anordnung sinnvoll, um einem einzelnen Abzählen vorzubeugen.
  Zahlenraum: Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.

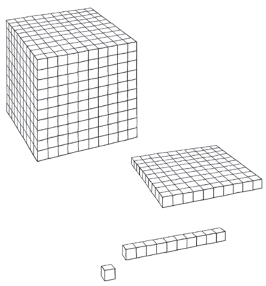


Darstellen von Anzahlen

Das Darstellen von Anzahlen unter Nutzung von gegebenen Strukturen ist eine wichtige Fähigkeit und Übung auf dem Weg zu einem tragfähigen Zahlverständnis. Auch hierbei lernen Schülerinnen und Schüler die räumliche Anordnung von Objekten für eine schnelle Darstellung ohne abzuzählen zu nutzen.



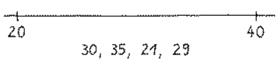
- **Zahlen einstellen**:
  Zahlen werden am Rechenrahmen eingestellt unter Nutzung der gegebenen Struktur (Kraft der Fünf, Immer zehn in einer Reihe, Farbwechsel bei 50) ohne abzuzählen
  Impulse: „Stell die 67 ein.“, „Beschreibe dein Vorgehen.“, „Woher weißt du, dass dies die 67 ist?“
  Material: Rechenrahmen
  Zahlenraum: Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100.



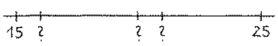
- **Zahlen legen**:
  Zahlen werden mit den Zehnersystem-Blöcken gelegt unter Nutzung der gegebenen Struktur (Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten, Tausenderwürfel)
  Impulse: „Lege die 327.“, „Beschreibe dein Vorgehen.“, „Erkläre, dass dies 327 ist.“
  Material: Zehnersystem-Blöcke
  Zahlenraum: Zahlenraum je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 100, bis 1 000.

Zahlenstrahl

Das *Verorten und Finden von Zahlen am Zahlenstrahl* sind wichtig für das Verstehen der linearen Darstellung des Zahlenraums. Neben dem Erfassen und Darstellen von Anzahlen ist das ein weiterer Aspekt eines tragfähigen Zahlverständnisses. Hierbei wird vor allem die aufsteigende Reihenfolge der Zahlen betont und weniger ihre Mächtigkeit. Hilfreiche Vorübungen sind dabei das Sortieren von Zahlenkarten (siehe S. 78) und das ungefähre Verorten von Zahlen auf einer leeren Zahlenlinie.



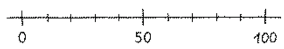
- **Zahlen eintragen auf dem Zahlenstrich**:
  Auf einem Zahlenstrich sind bereits Zahlen eingetragen, z. B. die 20 und die 40. Die Position weiterer Zahlen soll gefunden werden z. B. 30, 35, 21, 29. Wichtig: Es müssen nicht alle fehlenden Zahlen gefunden werden, es dürfen auch Zahlen fehlen.
  Impulse: „Hier sind schon zwei Zahlen. Wo gehören die anderen Zahlen hin?“, „Erkläre, wo die Zahlen hingehören?“, „Warum lässt du hier einen größeren Abstand als bei den anderen Zahlen?“
  Material: Zahlenstrich mit wenigen eingetragenen Zahlen
  Zahlenraum: Zahlenraum und Abstände je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.



- **Zahlen benennen auf dem Zahlenstrich:**
  Auf einem Zahlenstrich sind bereits Zahlen eingetragen, z. B. die 0 und die 10 (30 und 40) oder wie in unserem Beispiel 15 und 25. Weitere Skalierungsstriche sind unbeschriftet. Wichtig: Der Strich soll nicht vollständig skaliert sein.
  Impulse: „Hier sind schon zwei Zahlen. Welche Zahlen fehlen an den Fragezeichen?“, „Erkläre, welche Zahlen dort hingehören.“
  Material: Zahlenstrich mit wenigen eingetragenen Zahlen und leeren Skalierungsstrichen
  Zahlenraum: Zahlenraum und Abstände je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.

- **Skalierter Zahlenstrahl**:

  Ein skalierter Zahlenstrahl ist vorgegeben. Zahlen sollen verortet bzw. gefunden werden (wie oben).
  Impulse: „Welche Zahl gehört an diese Stelle, woher weißt du das?“, „Wohin gehört die 17? Woher weißt du das?“
  Material: Skalierter Zahlenstrahl mit wenigen eingetragenen Zahlen
  Zahlenraum: Zahlenraum und Abstände je nach Kompetenzen des Kindes variieren: Zahlenraum bis 10, bis 20, bis 100, über 100.



4.2.3 Operationsvorstellungen und Rechnen: Addition und Subtraktion

Deuten von Handlungen und Bildern

Durch das Deuten von Handlungen und Bildern mit mathematischem Fokus können sich Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen entwickeln. Dafür muss der Zusammenhang zwischen den Handlungen, Bildern, den jeweiligen Operationen und der symbolischen Notation dieser Operationen herausgearbeitet werden (Kapitel 1.3 und Kapitel 2.1). Zu beachten ist dabei, dass gerade Bilder und Abbildungen selten eindeutig sind und meist viele Interpretationen zulassen. Diese verschiedenen Interpretationen können ein guter Anlass sein, um über mögliche passende Rechenaufgaben zu sprechen, die die jeweilige Interpretation widerspiegelt (Kapitel 2.1, Beispiel 2, S. 21). Unerlässlich ist es, Handlungen mit den Bildern und entsprechenden Geschichten zu verbinden, um ein möglichst tragfähiges Verständnis zu entwickeln. Die Operationszeichen (+, –) und Relationszeichen (<, >, =) werden dann im direkten Zusammenhang mit den besprochenen Handlungen und Bildern erarbeitet, eingeführt und gefestigt.

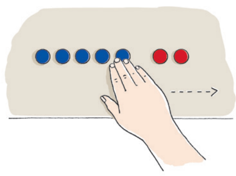
- **Mengen dynamisch zusammenfassen, wegnehmen, ergänzen, ausgleichen:**

  Realitätsnahe und didaktische Gelegenheiten nutzen, um das dynamische Zusammenführen, Wegnehmen, Ergänzen und Ausgleichen von Mengen mit den Operationen Addition bzw. Subtraktion und den entsprechenden symbolischen Notationen zu verbinden.

  Impulse: „Wenn die Plättchen jetzt dazukommen, wie viele hast du dann zusammen?“, „Erkläre.“, „Das kann man auch aufschreiben.“, „Was musst du machen, um mit den Plättchen diese Aufgabe zu legen: 5 – 3? Wie viele Plättchen sind das dann zusammen?“, „Was siehst du auf dem Bild? Kannst du das nachspielen?", "Schreibe die Aufgaben dazu auf."

  Material: Stifte, Sammelkarten, Hefte, Plättchen, Kugeln am Rechenrahmen, auch Bilderfolgen bzw. Bilder mit angedeuteter Handlung

  Zahlenraum: Zur ersten Thematisierung sollte der Zahlenraum überschaubar bleiben: Zahlenraum bis 20.

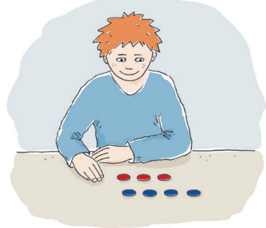


- **Mehrere Teil-Mengen statisch als Ganzes deuten (Addition) bzw. einen Unterschied sehen (Subtraktion):**

  Realitätsnahe und didaktische Gelegenheiten nutzen, um das statische Zusammenfassen von Mengen mit der Operation Addition zu verbinden, bzw. einen statischen Unterschied mit der Operation Subtraktion zu verbinden.

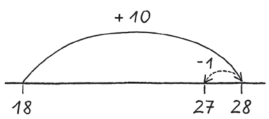
  Impulse: „Wenn die Plättchen jetzt dazukommen, wie viele hast du dann zusammen? Woher weißt du das?“, „Das kann man auch aufschreiben.“, „Was musst du machen, um mit den Plättchen diese Aufgabe zu legen: 3+5? Wie viele Plättchen sind das dann zusammen?“, „Hier liegen drei und hier liegen vier Plättchen: Wie groß ist der Unterschied? Wo liegen mehr? Wie viele mehr? Woher weißt du das?“

  Material: Würfelbilder, Stifte, Sammelkarten, Hefte, Plättchen, Punktebilder, Bilder und Bilderfolgen



Zahlenraum: Zur ersten Thematisierung sollte der Zahlenraum überschaubar bleiben; Zahlenraum bis 20.

- **Operationen am Rechenstrich deuten und veranschaulichen:**



Neben dem kardinalen Verständnis von Addition und Subtraktion, muss auch ein ordinales Operationsverständnis entwickelt und thematisiert werden. Hierzu ist der Rechenstrich das geeignete Material (siehe S. 26). An diesem können das Dazutun, Wegnehmen, Ergänzen, und das Ermitteln von Unterschieden besprochen und veranschaulicht werden.

Impulse: „In welche Richtung musst du beim Plusrechnen gehen? In welche beim Minusrechnen?“, „Beschreibe, wo du die Aufgabe am Rechenstrich sehen kannst. Beschreibe, wo du nachher dein Ergebnis sehen wirst.“, „Finde eine Aufgabe.“, „Zeichne einen Rechenstrich zu dieser Aufgabe.“

Material: Stift, Papier

Zahlenraum: Der Rechenstrich eignet sich zur Veranschaulichung von Rechenwegen, Operationen sowie deren Zusammenhängen und kann für jeden Zahlenraum genutzt werden. Er bedarf aber einer intensiven Besprechung und kann nicht voraussetzungslos eingesetzt werden. Grundlage hierfür sind Übungen am Zahlenstrich (siehe S. 78).

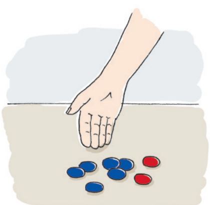
4.2.4 Automatisierte Grundaufgaben: Einspluseins und Zahlzerlegungen

Die folgenden Übungsformate zur Automatisierung der Grundaufgaben orientieren sich an den Überlegungen zum *verständnisorientierten und verständnisbasierten* Üben (siehe Kapitel 2.3). Auswendiglernen ohne Verständnisgrundlage ist wenig sinnvoll und kann den Lernprozess langfristig eher behindern als ihn unterstützen. Übungsformate sollten ihren festen Rahmen im Unterrichtsverlauf haben und in Karteien für die Schülerinnen und Schüler leicht zugänglich sein oder in Form von Ritualen stets wieder aufgegriffen werden. Die Lehrkraft soll darauf achten, ob die Aufgaben in der Automatisierungsphase noch abzählend gelöst werden. Sollte festgestellt werden, dass viele Aufgaben noch zählend gelöst werden, müssen sich Lehrkraft und Kind vor allem auf die bereits automatisierten Aufgaben konzentrieren. Dies schafft einerseits Erfolgserlebnisse, andererseits können diese Aufgaben dann als Ausgangpunkte zur Anwendung von Ableitungsstrategien genutzt werden.

Anschauungsgebundenes Üben

Beim gestützten Üben werden die entsprechenden Aufgabensätze am Material und auf symbolischer Ebene dargestellt. Im Folgenden werden beispielhaft einige gestützte Übungsformate vorgestellt, weitere Formate sind auf S. 37 skizziert.

- **Plättchen werfen:**



Eine vorgegebene Anzahl von Plättchen wird auf den Tisch geworfen (z. B. mit einem Würfelbecher), die Anzahl der blauen und roten Plättchen wird ermittelt und notiert. Dabei bleibt die Gesamtanzahl der Plättchen bei den verschiedenen Würfen gleich. Eine ähnliche Vorgehensweise ermöglichen sogenannte Schüttelkästen.
Impulse: „Musst du immer beide Farben abzählen? Warum nicht?“, „Musst du überhaupt zählen oder kannst du die Anzahl mit einem Blick erkennen?“, „Welche verschiedenen Möglichkeiten hast du gefunden?“, „Hast du welche doppelt?“, „Hast du alle Möglichkeiten? Warum bist du dir sicher?“
Material: Wendeplättchen, Stift, Papier
Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 10 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

- **Zahlzerlegung der 10 an den Händen:**

  Ein Kind legt seine Hände mit ausgestreckten Fingern vor sich hin. Ein zweites Kind legt einen Stift zwischen die Finger. Genannt werden soll die Anzahl der Finger links vom Stift und rechts vom Stift.
  Zur Ablösung von der Anschauung können die Finger zunächst liegen bleiben, aber der Stift wird nicht mehr dazwischen gelegt, sondern es wird eine Zahl genannt. Das Kind soll dann die Ergänzung zu zehn nennen. Schließlich können die Finger abgedeckt werden.
  Auch eine Umkehrung des Formats ist vorstellbar: Es werden Zahlenpaare vorgegeben und das Kind muss beim Partner den Stift an die entsprechende Stelle zwischen die Finger legen.
  Für andere Zahlen als 10 können auch Zahlenstreifen oder eingestellte Zahlen am Rechenrahmen genutzt werden.

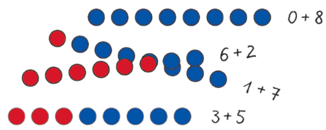
  Impulse: „Woher weißt du das?“, „Musst du noch abzählen? Warum nicht?“, „Wie heißt die Tauschaufgabe dazu?“

  Material: Hände, Stift

  Zahlenraum: Zahlenraum 10.

- **Aufgabenstreifen sortieren:**

  Es werden Punktestreifen einer Aufgabenserie sortiert, die Aufgaben werden gelöst und die Sortierung wird beschrieben. Der Schwerpunkt der Beschreibung liegt dabei auf den Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben bzw. Streifen.

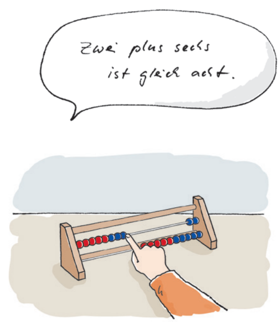
  Impulse: „Wie hast du sortiert?“, „Vergleiche mit deinem Nachbarn.“, „Beschreibt eure Entdeckungen.“, „Was haben alle Aufgaben gemeinsam, was ist unterschiedlich?“

  Material: Vorbereitete Punkt- und Aufgabenstreifen

  Zahlenraum: Da es sich um lineare Anordnungen handelt, sollte der Zahlenraum bis 10 nicht überschritten werden und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

- **Aufgabenfolgen am Rechenrahmen:**

  Es werden strukturierte Aufgabenpäckchen vorgegeben, die am Rechenrahmen gelöst werden können. Gut eignen sich dabei Aufgabenfolgen bei denen ein Summand (oder der Minuend bzw. Subtrahend) gleich bleibt. Die Ergebnisse werden notiert.

  Impulse: „Fällt dir an den Aufgaben etwas auf? Beschreibe.“, „Fängst du bei jeder neuen Aufgabe von vorn an zu schieben? Erkläre.“, „Was ändert sich bei den Aufgaben, was bleibt gleich?“

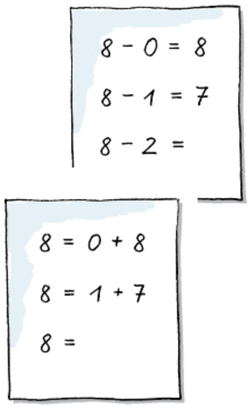
  Material: 20er- oder 100er-Rechenrahmen, Aufgabenkarten, Papier, Stift

  Zahlenraum: Der Zahlenraum sollte 20 bzw. 100 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

Formales Üben

Beim formalen Üben werden Aufgaben auf der symbolischen Ebene gestellt. Doch auch hier können didaktische Arbeitsmittel zur Veranschaulichung genutzt werden. Wenn die Arbeitsmittel zur Lösung der Aufgaben genutzt werden, ist dringend darauf zu achten, dass die Arbeitsmittel nicht *ausschließlich* als Lösungshilfe dienen. Eine langsame Ablösung vom Material muss angeregt und unterstützt werden (siehe Kapitel 2.1). Zu den formalen Übungsformen gehören unter anderem die sogenannten substantiellen Aufgabenformate, z. B. Zahlenmauern, Rechendreiecke, Rechenketten (siehe z. B. Scherer 1999), die hier nicht erläutert werden.

- **Strukturierte Päckchen:**



Strukturierte Päckchen (oder auch „schöne Päckchen“) sind Aufgabenserien, in denen die einzelnen Aufgaben durch operative Regelmäßigkeiten in Zusammenhang stehen. Sie dienen dazu, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Aufgabenzusammenhänge zu erkennen und zu nutzen. Darüber hinaus werden auf diese Weise die Grundaufgaben in immer neuen Zusammenhängen bearbeitet und automatisiert. Das Ergänzen oder Fortsetzen von strukturierten Päckchen ist eine gute Möglichkeit, die Aufgabenzusammenhänge zu thematisieren.

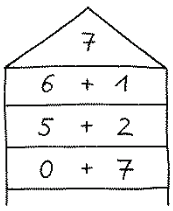
Eine Umkehrung des Formats der strukturierten Päckchen ist das Sortieren von vorgegebenen Aufgabensätzen. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler unsortierte Aufgaben zu einem strukturierten Päckchen sortieren und sie anschließend lösen.

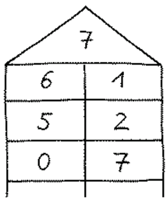
<u>Impulse</u>: „Welche Aufgaben sind besonders leicht? Welche sind besonders schwer?“, „Wie löst du die Aufgaben?“, „Helfen dir die Nachbaraufgaben?“, „Welche Zusammenhänge zwischen den Aufgaben kannst du erkennen?“, „Wie müsste die nächste Aufgabe heißen?“, „Wie bist du beim Sortieren vorgegangen?“

<u>Material</u>: Vorbereitete Aufgabenserien, Aufgabenstreifen

<u>Zahlenraum</u>: Strukturierte Päckchen können im Zahlenraum von 10 bis über 1 000 genutzt werden und sollten sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren. Zur Festigung der Grundaufgaben sollte der Zahlenraum bis 10 fokussiert werden.

- **Zerlegungshäuser:**





Auch Zerlegungshäuser sind mittlerweile ein „klassisches“ Format zur Thematisierung und Automatisierung der Grundaufgaben im Zahlenraum bis 10. Hier werden zu einer vorgegebenen Zahl die verschiedenen Zerlegungen aufgeschrieben. Sobald das Format bekannt ist, können hier verschiedene Aufgabenstellungen variiert werden:

Nur die Dachzahl ist bekannt. Die Schülerinnen und Schüler sollen selbst Zerlegungen finden, wobei die Dachzahl und jeweils eine Zerlegungszahl gegeben sind.

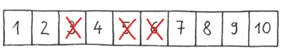
Alle Zahlen sind vorgegeben, aber einige Zerlegungen passen nicht zur Dachzahl. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler kontrollieren, welche Aufgabensätze passen und welche nicht. Die Zerlegungshäuser können gut in Kombination mit den gestützten Formaten zur Zahlzerlegung eingesetzt werden (S. 82–83).

<u>Impulse</u>: „Welche Zerlegungen kannst du schon auswendig?“, „Wie findest du die anderen?“, „Welche kannst du dir leicht merken, bei welchen ist es nicht so leicht?“, „Wie gehst du vor, um die unvollständigen Zerlegungshäuser zu ergänzen?“

<u>Material</u>: Zerlegungshäuser (blanko, nur Dachzahl, unvollständig)

<u>Zahlenraum</u>: Der Zahlenraum sollte 10 nicht überschreiten und sich an den Kompetenzen des Kindes orientieren.

- **Zerlegungsspiel:**



Die Automatisierung der Zahlzerlegungen und der Grundaufgaben des kleinen Einspluseins kann im Unterricht auch spielerisch erfolgen. Die Grundidee des Spiels „Zahlen streichen“ ist die folgende: Jeder Spieler bekommt einen Zahlenstreifen mit den Zahlen von 1–10, gewürfelt wird mit einem sogenannten Schulwürfel (Zahlen von 0 bis 10). Ziel des Spiels ist es, alle Zahlen anzukreuzen.

Entweder darf die erwürfelte Zahl angekreuzt werden oder eine mögliche Zerlegung dieser Zahl: Würfelt ein Kind eine 7 kann es die 7, aber auch 3 und 4 (oder zum Beispiel auch 5 und 2) ankreuzen. Wenn die Zahl oder eine Zerlegungszahl nicht mehr frei sind, wird ausgesetzt. Eine Variante ist es, das Spiel mit zwei herkömmlichen Spielwürfeln zu spielen (auf einem Zahlenstreifen bis zur 12).

Impulse: Die Schülerinnen und Schüler können auf „geschickte“ Spielzüge hingewiesen werden. So ist es klug, große Zahlen möglichst früh anzukreuzen, da die kleinen für die verschiedenen Zerlegungen benutzt werden können.

Material: Zahlenstreifen, Spielwürfel, Stift

Zahlenraum: Bis 10 oder 12.

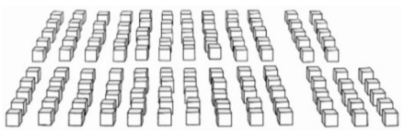
4.2.5 Stellenwerte: Bündeln und Entbündeln

Bündeln und Entbündeln

Das Bündeln und Entbündeln ist die Grundlage unseres Stellenwertsystems. Daher ist es notwendig, vielfältige Bündelungs- und Entbündelungsaktivitäten durchzuführen und zu thematisieren. Auf diese Weise wird einerseits die besondere Rolle der 10 in unserem Stellenwertsystem deutlich und andererseits die Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten.

- **Unstrukturiertes Material bündeln**:

  Eine große Menge gleichartiger Objekte wird mit dem Auftrag vorgelegt, die Objekte so hinzulegen, dass man danach gut sehen kann, wie viele es sind. Hierbei ist es *zunächst* nicht relevant, ob die Schülerinnen und Schüler direkt in Zehnern bündeln oder erst andere Bündelungen nutzen. Später kann dann der Hinweis gegeben werden, dass auch „immer zehn“ genommen werden können. Ein zweiter Hinweis wird meist notwendig, damit die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass auch die Zehner ihrerseits wieder gebündelt werden können zu Hundertern und diese zu Tausendern usw. (siehe S. 32–33).

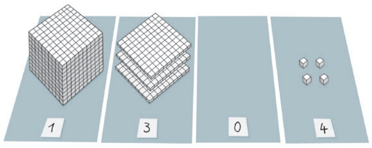
  Impulse: „Warum hast du immer Gruppen/Bündel zusammengelegt? Wie viele Würfel sind immer in einer Gruppe/einem Bündel?“; „Warum immer Zehn?“, „Du hast jetzt so viele Zehner – kannst du die auch bündeln? Wie viele Zehner nimmst du? Warum?“, „Darf man aus einem deiner Bündel einen wegnehmen? Was passiert dann?“

  Material: Unstrukturiertes Material (Wendeplättchen, Bohnen, Streichhölzer).

  Zahlenraum: Um das Konzept der wiederholten Bündelung erkennen zu können, empfiehlt es sich, eine Menge von mindestens 1 000 Objekten bereitzustellen. Das Sortieren von dieser großen Menge kann aber nicht von einem Kind bewältigt werden, weswegen sich das gemeinsame Arbeiten im Klassenverband anbietet.

- **Bündeln und Entbündeln mit vorstrukturiertem Material**:

  Unstrukturiertes Material bietet sich für einen ersten und entdeckenden Zugang an, sollte aber möglichst schnell durch vorstrukturiertes Material ergänzt und schließlich ersetzt werden – zum Beispiel durch das Zehnersystemmaterial (siehe S. 25). Durch das vorstrukturierte Material können auch Zusammenhänge der einzelnen Bündelungseinheiten über benachbarte Stellenwerte hinweg thematisiert und erkannt werden. Auch Aktivitäten zum Lesen und Schreiben mehrstelliger Zahlen können mit diesem Material gut unterstützt werden (siehe unten).



Impulse: „Wie viel ist das? Bündele zuerst, bis keine neuen Bündel mehr entstehen.“, „Wie viele Zehner passen in einen Hunderter? Erkläre. Zeig mir das am Material.“, „Wie viele Zehner passen in einen Tausender? Erkläre. Zeig mir das am Material.“, „Wie viele Zehner brauchst du für einen Tausender?“,

„Wenn du von diesem Tausenderwürfel einen Zehner/Einer/Hunderter wegnimmst, wie viel hast du dann noch? Woher weißt du das? Zeig mir das am Material.“

Material: Unsortierte Zehnersystem-Blöcke (bestenfalls pro Stellenwert mehr als zwanzig Objekte).

Zahlenraum: Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und der Zusammenhang zwischen den Stellenwerten auch größerer Ordnung erschließt sich erst, wenn der Zahlenraum größer als 1 000 ist. Aber auch im Zahlenraum bis 100 können erste Einsichten in das Prinzip der Bündelung und Entbündelung gewonnen werden. Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen des Kindes.

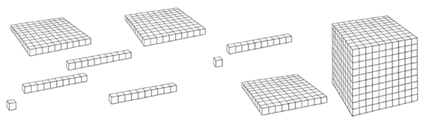
4.2.6 Stellenwerte: Lesen, Schreiben und Sprechen von Zahlen

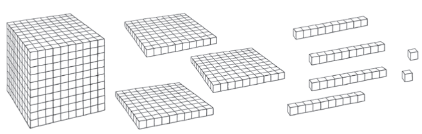
Zahlen stellengerecht schreiben

Beim stellengerechten Schreiben von Zahlen wird die Anzahl der jeweiligen Bündelungseinheit an die entsprechende Stelle im Zahlzeichen notiert: Die Einer ganz rechts, die Zehner links daneben, die Hunderter links daneben usw. Hierzu müssen die Schülerinnen und Schüler erkannt haben, dass bei der konventionellen Schreibweise von Zahlen für jeden Stellenwert genau eine Ziffer an der entsprechenden Stelle eingetragen wird und dass ein unbesetzter Stellenwert durch eine Null gekennzeichnet wird.

- **Vorstrukturiertes Material sortieren**:

  Die Zehnersystem-Blöcke werden unsortiert vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollen sie stellengerecht sortieren. Die Sortierung kann durch eine sogenannte Sortiertafel unterstützt werden, in der spaltenweise die Bündelungseinheit vorgegeben ist. Ggf. können sich hier auch wieder Bündelungsaktivitäten anschließen, wenn mehr als neun Objekte einer Bündelungseinheit vorliegen.

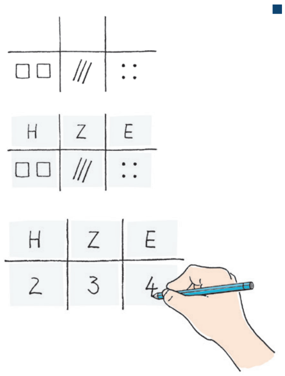
  

  Impulse: „Beschreibe deine Sortierung.“, „Wohin gehört diese Hunderterplatte? Woher weißt du das?“, „Weißt du wohin die Zehner gehören, auch wenn hier noch keine Einer liegen?“, „Beschreibe deinem Partner, wie er das Material sortieren soll.“

  Material: Unsortierte Zehnersystem-Blöcke (bestenfalls pro Stellenwert mehr als zehn Objekte).

  Zahlenraum: Das Prinzip der Position der Stellenwerte erschließt sich erst, wenn der Zahlenraum größer als 1 000 ist. Er kann in Ansätzen aber schon im Zahlenraum bis 100 nachvollzogen werden. Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler.

- **Zahlen schreiben (mit geordneten Zehnersystem-Blöcken)**:

  Nachdem die Zehnersystem-Blöcke vollständig gebündelt und sortiert vorliegen, können die Zahlen entsprechend der Sortierung aufgeschrieben werden. Wichtig ist hierbei, dass die Schreibrichtung von links nach rechts vorgegeben wird (obwohl dies der Sprechweise der Zahlen nicht immer entspricht). Notiert wird dabei die Anzahl der vorliegenden Bündelungseinheiten an der entsprechenden Position. Wenn ein Stellenwert nicht besetzt ist, wird als Platzhalter eine Null notiert. Unterstützt werden kann die Notation an der richtigen Position durch eine Stellenwerttafel.

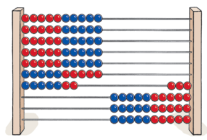
Impulse: „Erkläre, an welche Stellen du die Ziffern schreiben musst?“, „Wenn ich jetzt eine Zehnerstange wegnehme, was musst du dann an deiner Zahl verändern?“, „Diktiere deinem Partner, was er notieren muss.“

Material: Vom Kind sortierte Zehnersystem-Blöcke

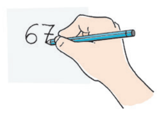
Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen des Kindes. Das stellengerechte Zahlenschreiben muss im Zahlenraum bis 100 begonnen werden, wird aber auch im Zahlenraum über 100 immer wieder aufgegriffen werden.

- **Zahlen schreiben (mit anderen Zahldarstellungen):**

  Nachdem die Reihenfolge der vollständig gebündelten Stellenwerte und das Prinzip der Notation von Zahlen gefestigt ist, können auch andere Zahldarstellungen als Grundlage für die Notation genutzt werden, z. B. Zahlen am Rechenrahmen, ungebündelte und unsortierte Zehnersystem-Blöcke, Aufgabensätze wie 30 + 400 + 2.

  Impulse: „Erkläre, an welche Stellen du die Ziffern schreiben musst.“, „Wenn ich jetzt eine Kugel wegschiebe, was musst du dann an deiner Zahl verändern?“, „Diktiere deinem Partner, was er notieren muss.“, „Wie musst du diese dreizehn Zehner aufschreiben? Worauf musst du achten?“

  Material: Verschiedene Zahldarstellungen (Rechenrahmen, Aufgabenkarten, Zehnersystem-Blöcke)

  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen des Kindes. Das stellengerechte Zahlenschreiben beginnt im Zahlenraum bis 100, muss aber auch im Zahlenraum über 100 immer wieder aufgegriffen werden.

Sprechweise mehrstelliger Zahlen

Die richtige Sprechweise von mehrstelligen Zahlen im Deutschen ist nicht unproblematisch. Dies liegt an vielen Unregelmäßigkeiten bei der Zahlwortbildung und vor allem an der inversen Sprechweise von Zahlen. Obwohl beim Schreiben von Zahlen von links nach rechts zunächst die Zehner und dann die Einer notiert werden, wird die entsprechende Zahl umgekehrt ausgesprochen (dreiundzwanzig im Gegensatz zu zwanzigdrei). Daher müssen im Unterricht die Sprechweise von Zahlen und Regeln der Zahlwortbildung intensiv besprochen werden.

- **Bestandteile des Zahlwortes trennen**:

  Materialgestützt beschreiben, wie viele Zehner und Einer die jeweilige Zahl besitzt, Nennung in unterschiedlicher Reihenfolge anregen: Vier Zehner und drei Einer, drei Einer und vier Zehner, vierzig und drei, drei und vierzig.

  Impulse: „Wie viele Zehner und wie viele Einer hörst du?“, „Woher weißt du an welcher Stelle du das „-zig“ sprechen musst?“, „Zeig am Material, während du sprichst.“, „Diktiere einem anderen Kind, wie viele Zehner und Einer es legen soll. Wie heißt die Zahl?“

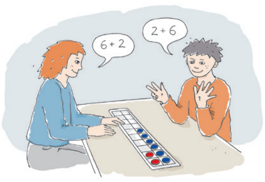
  Material: Zehnersystem-Blöcke

  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Die Sprechweise von Zahlen wird im Zahlenraum bis 100 erarbeitet, muss aber auch im Zahlenraum über Hundert wieder aufgegriffen werden.

4.2.7 Zahl- und Aufgabenzusammenhänge sowie Rechenregeln

Zahlzusammenhänge und Rechenregeln

Beim Rechnen werden immer wieder Zahl- und Aufgabenzusammenhänge und auch Rechenregeln genutzt. Eine materialgestützte Erarbeitung dieser Zusammenhänge und Regeln ist die Grundlage für eine angemessene Nutzung beim Rechnen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Erarbeitung nicht isoliert von der Anwendung erfolgt (siehe Kapitel 1.3).



- **Tauschaufgaben:**

  Materialgestützte Situationen schaffen, in denen mit den Schülerinnen und Schülern über Tauschaufgaben gesprochen werden kann, beispielsweise mit Plättchen (siehe auch Anregungen zum Operationsverständnis). Variation: Tauschaufgaben-Paare finden (z. B. als Spiel).

  Impulse: „Welche Plusaufgabe siehst du?“, „Siehst du noch eine andere?“, „Setzt euch gegenüber und nennt die Plusaufgaben, die ihr seht.“

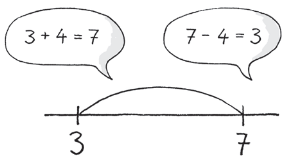
  Material: Wendeplättchen, Zahlenstreifen mit zweifarbigen Punkten

  Zahlenraum: Für ein erstes Verständnis sollte der Zahlenraum bis 20 nicht überschritten werden. Später können die Zusammenhänge in höhere Zahlenräume übertragen werden.

- **Umkehraufgaben:**

  Materialgestützt thematisieren, dass man eine Addition durch eine Subtraktion „rückgängig“ machen kann und umgekehrt. Zum Beispiel kann man von sieben Plättchen drei Plättchen wegnehmen und die passende Aufgabe notieren lassen; dann die drei Plättchen wieder dazuschieben und wiederum die passende Aufgabe notieren lassen; anschließend die Handlungen und notierten Aufgaben vergleichen (siehe auch Anregungen zum Operationsverständnis). Die Veranschaulichung von Umkehraufgaben gelingt auch gut mit dem Rechenstrich.

  Impulse: „Was hast du gemacht? Beschreibe.“, „Schau dir die beiden Aufgaben an. Was ist gleich, was ist unterschiedlich? Erkläre mit Plättchen. Erkläre am Rechenstrich.“



  Material: Wendeplättchen, Rechenstrich

  Zahlenraum: Für ein erstes Verständnis sollte der Zahlenraum bis 20 nicht überschritten werden, später können die Zusammenhänge in höhere Zahlenräume übertragen werden.

- **Tausch- und Umkehraufgaben:**

  Der Zusammenhang zwischen Tausch- und Umkehraufgaben kann mit dem Format *Aufgabenfamilien* thematisiert und gefestigt werden. Hier werden drei Zahlen vorgegeben und der Zusammenhang zwischen diesen Zahlen wird dann materialgestützt veranschaulicht und beschrieben. Aus diesen Zahlen werden alle Plus- und Minusaufgaben gebildet und notiert.

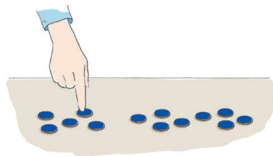
  Impulse: „Warum findet ihr genau vier Aufgaben“, „Diktiere deiner Partnerin/deinem Partner die passenden Aufgaben und zeige sie ihr/ihm mit den Plättchen.“, „Gibt es auch Zahlen, bei denen es nicht vier Aufgaben werden?“ (z. B. 3 + 3)

  Material: Wendeplättchen, Rechenrahmen, Zahlenkarten

  Zahlenraum: Für ein erstes Verständnis sollte der Zahlenraum bis 20 nicht überschritten werden. Später können die Zusammenhänge in höhere Zahlenräume übertragen werden.

- **Gegensinniges Verändern, Aufgaben und Zahlen zerlegen**:

  Das Teil-Ganzes-Konzept, das Grundlage für verschiedene Zahl- und Aufgabenzusammenhänge ist, wird materialgestützt thematisiert. Hierzu werden verschiedene Mengen (sichtbar oder verdeckt) vorgelegt und verändert. Die Veränderungen werden gemeinsam beschrieben und ggf. notiert. Siehe auch die Aktivitäten auf S. 82–85 (gestütztes und formales Üben).

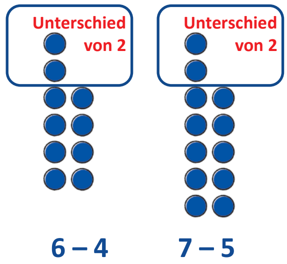
  <u>Impulse</u>: „Hier sind fünf Plättchen und acht Plättchen. Verschiebe ein Plättchen von der einen Menge zur anderen. Sind es jetzt zusammen mehr, weniger oder genauso viele wie vorher?“, „Woher weißt du das?“, „Beschreibe deiner Partnerin/deinem Partner: Was verändert sich, was bleibt gleich?“

  <u>Material</u>: Unstrukturiertes Material, z. B. Wendeplättchen

  <u>Zahlenraum</u>: Für ein erstes Verständnis sollte der Zahlenraum bis 20 nicht überschritten werden. Später können die Zusammenhänge in höhere Zahlenräume übertragen werden.

- **Konstanz der Differenz:**

  Die Konstanz der Differenz wird materialgestützt thematisiert. Hierzu werden zwei Mengen verglichen und ihr Unterschied wird notiert. Dann werden beide Mengen um die gleiche Anzahl vergrößert oder verkleinert. Erneut wird nach dem Unterschied gefragt. Schwerpunkt liegt auf dem Gleichbleiben des Unterschieds (siehe auch das Spiel „Hamstern“, Verboom 2010, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik 2019 (5)).

  <u>Impulse</u>: „Hier sind fünf Plättchen und daneben acht Plättchen. Wie groß ist der Unterschied. Markiere den Unterschied. Jetzt lege jeweils ein Plättchen dazu. Wie groß ist der Unterschied jetzt?“, „Woher weißt du das?“, „Beschreibe deinem Partner: Was verändert sich, was bleibt gleich?“, „Schreibe die passenden Minusaufgaben dazu.“

  <u>Material:</u> Unstrukturiertes Material, z. B. Wendeplättchen, Legefelder, damit die Mengen vergleichbar sind

  <u>Zahlenraum</u>: Für ein erstes Verständnis sollte der Zahlenraum bis 10 nicht überschritten werden, später können die Zusammenhänge in höhere Zahlenräume übertragen werden.

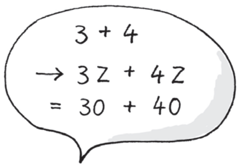
- **Analogien herstellen und nutzen:**

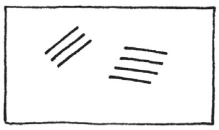
  Zusammenhänge zwischen den Aufgaben des kleinen Einspluseins und der Anwendung dieser Aufgaben im größeren Zahlenraum werden materialgestützt hergestellt und besprochen: 4 + 3 und 24 + 3.

  <u>Impulse</u>: „Lege die Aufgabe 3 + 4. Jetzt lege die Aufgabe 23 + 4. Jetzt 43 + 4. Schreibe die Rechnungen dazu. Was ist anders, was bleibt gleich?“

  <u>Material</u>: Zehnersystem-Blöcke oder Rechenrahmen

  <u>Zahlenraum</u>: Schon im Zahlenraum bis 20 können diese Analogien gut thematisiert werden, müssen aber auch auf den Zahlenraum über 20 übertragen und erneut besprochen werden.





- **Zehneranalogien herstellen und nutzen**:
  Zusammenhänge zwischen den Aufgaben des kleinen Einspluseins und den entsprechenden Aufgaben mit anderen Stellenwerten werden materialgestützt hergestellt und besprochen:
  8 – 3 = 5
  → 8Z – 3Z = 5Z = 80 – 30 = 50
  → 8H – 3H = 5H = 800 – 300 = 500

  Impulse: „Leg drei Zehner und zwei Zehner dazu. Wie heißt die passende Aufgabe? Wie heißt das Ergebnis?“, „Geht das auch mit Hundertern? Nimm von acht Hundertern drei Hunderter weg. Wie heißt die passende Aufgabe? Wie lautet das Ergebnis?“, „Was haben die Aufgaben gemeinsam?“

  Material: Zehnersystem-Blöcke

  Zahlenraum: Das Prinzip der zugrundeliegenden Analogie wird schon im Zahlenraum bis 100 thematisiert, muss aber auch im Zahlenraum über Hundert wieder aufgegriffen werden.

4.2.8 Zahlen- und Aufgabenblick sowie Rechenstrategien

Zahlenblick

Mit „Zahlenblick“ wird die Fähigkeit beschrieben, *Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen* zu bringen und deuten zu können. Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen zu sehen ist ein grundlegender Aspekt eines tragfähigen Zahlverständnisses. Daher sind viele Förderanregungen zu Zahlvorstellungen (siehe S. 77–81) auch hilfreich, wenn es um die Entwicklung des Zahlenblicks geht. Hier werden ergänzend weitere Formate vorgestellt.

- **Zahlen sortieren**:
  Zahlen werden jeweils in verschiedenen Darstellungsformen vorgelegt (z. B. Punktebilder, Zahlenkarten, Zahlen am Zahlenstrich). Die Schülerinnen und Schüler sollen die Zahlen sortieren (nicht nur nach Größe) und anschließend ihre Sortierung und die Zusammenhänge erläutern. Diese Sortierungen können frei oder vorgegeben sein. Mögliche Vorgaben für Sortierungen sind: Der Größe nach, gerade oder ungerade, nahe an 10 oder nahe an 20, Zehnerzahlen, Zahlen mit Zehnern und Einern, zu Aufgaben zusammenfassen usw.

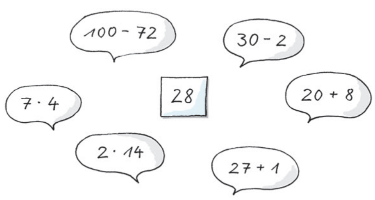
  Impulse: „Beschreibe deine Sortierung.“, „Wie bist du vorgegangen?“, „Vergleicht eure Sortierungen.“

  Material: Zahlenkarten, Punktefelder, Zahlenstrich

  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Prinzipiell kann das Format in jedem Zahlenraum genutzt werden.

- **Aufgaben finden**:

  Es werden Zahlen vorgegeben, die Schülerinnen und Schüler sollen möglichst verschiedene Aufgaben zu den vorgegebenen Zahlen finden. Dieses Format ist besonders wirksam, wenn es mit der ganzen Klasse durchgeführt wird, da hier sehr viele unterschiedliche Aufgaben gefunden werden und auch schwächere Lernende diese nachvollziehen können.



  Impulse: „Finde noch andere Aufgaben.“; „Finde auch Malaufgaben.“, „Finde auch Minusaufgaben.“, „Schreibe die gefundenen Aufgaben zum Ergebnis.“

  Material: Tafel, leere Karteikarten

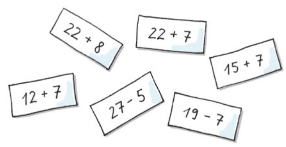
  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Prinzipiell kann das Format in jedem Zahlenraum genutzt werden.

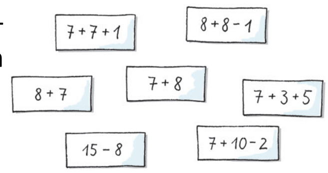
Aufgabenblick

Mit dem Aufgabenblick gelingt es Schülerinnen und Schülern *Beziehungen zwischen Aufgaben* zu sehen und diese Beziehungen schließlich auch nur beim Betrachten einer einzelnen Aufgabe aktivieren zu können. Übungsformen zur Entwicklung eines Aufgabenblicks sollten daher damit beginnen, Beziehungen zwischen gegebenen Aufgaben herzustellen. Viele Formate hierzu finden sich auch bei den Anregungen zur Automatisierung von Grundaufgaben.

- **Aufgaben sortieren:**

  Aufgabensätze (mit oder ohne Ergebnis) werden vorgegeben und sollen sortiert werden. Hierbei kann die Sortierung entweder frei sein oder nach vorher besprochenen Kriterien erfolgen, zum Beispiel „Diese Aufgaben sind für mich leicht/mittel/schwer.“, „Das Ergebnis ist größer, kleiner, gleich 5/10/70/100/...“, „Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang“, „Welchen Rechenweg nutze ich zur Lösung?“, „Aufgaben, die beim Lösen anderer Aufgaben helfen.“

  Impulse: „Beschreibe deine Sortierung.“, „Wie bist du vorgegangen?“, „Vergleicht eure Sortierungen.“, „Was haben die Aufgaben gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?“

  Material: Aufgabenkarten mit und ohne Ergebnis

  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Prinzipiell kann das Format in jedem Zahlenraum genutzt werden.

- **Verwandte Aufgaben finden:**

  Eine Aufgabe wird vorgegeben, zu dieser Aufgabe werden verwandte Aufgaben gefunden. Dieses Format ist besonders wirksam, wenn es mit der ganzen Klasse durchgeführt wird, da hier sehr viele unterschiedliche Aufgaben gefunden werden, und auch schwächere Schülerinnen und Schüler diese nachvollziehen können.

  Die verschiedenen Zusammenhänge zwischen den Aufgaben können zudem mit Material veranschaulicht werden (Rechenrahmen, Zehnersystem-Blöcke, Punktefelder, Wendeplättchen).

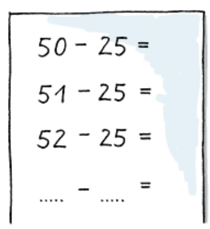
  Impulse: „Beschreibe, wie und warum die Aufgaben zusammenpassen.“; „Vergleicht eure gefundenen Aufgaben. Habt ihr gleiche? Habt ihr unterschiedliche?“, „Zeig den anderen mit dem Material, wie und warum die Aufgaben zusammenpassen.“

  Material: Tafel, leere Karteikarten

  Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Prinzipiell kann das Format in jedem Zahlenraum genutzt werden.

- **Strukturierte Päckchen:**

  Die Schülerinnen und Schüler beschreiben, ergänzen oder setzen strukturierte Päckchen (siehe auch S. 84) fort und erkennen und nutzen auf diese Weise Aufgabenzusammenhänge. Eine Umkehrung des Formats der strukturierten Päckchen ist das Sortieren von vorgegebenen Aufgabensätzen. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler unsortierte Aufgaben zu einem strukturierten Päckchen sortieren und sie anschließend lösen.

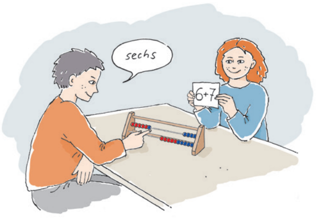
  Impulse: „Welche Aufgaben sind besonders leicht? Welche besonders schwer?“, „Wie löst du die Aufgaben?“, „Helfen dir die Nachbaraufgaben?“, „Welche Zusammenhänge zwischen den Aufgaben kannst du erkennen?“, „Wie müsste die nächste Aufgabe heißen?“, „Wie bist du beim Sortieren vorgegangen?“

Material: Strukturierte Aufgabenserien

Zahlenraum: Der Zahlenraum orientiert sich an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Prinzipiell kann das Format in jedem Zahlenraum genutzt werden.

Rechenstrategien

Die Thematisierung verschiedener Rechenstrategien kann es Lernenden ermöglichen, je nach Vorkenntnisse und Fähigkeiten, eine Aufgabe mit einem oder mehreren unterschiedlichen Rechenwegen zu lösen. Dabei ist es nicht das primäre Ziel, dass alle Schülerinnen und Schüler immer in der Lage sind, alle Rechenstrategien flexibel und sicher anzuwenden. Stattdessen geht es darum aufzuzeigen, dass mithilfe des mentalen Werkzeugs jede Aufgabe gerechnet werden kann (und nicht gezählt werden muss). Dabei hängt die genutzte Strategie eng mit dem erarbeiteten Wissen und den erworbenen Fähigkeiten zusammen.



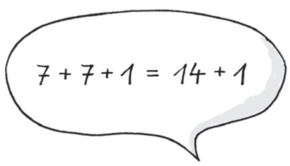
- **Schrittweise über den Zehner:**

  Das schrittweise Rechnen ist ein Rechenweg, der bei allen Aufgaben mit Zehnerübergang unabhängig vom gegebenen Zahlenmaterial genutzt werden kann. Das schrittweise Rechnen kann gut mit dem Rechenrahmen thematisiert werden. Hier ist die Zerlegung des zweiten Summanden (erst bis zum Zehner und dann den Rest) durch das Material vorgegeben, da der erste Summand zunächst bis zum Zehner aufgefüllt wird. Dies gilt analog für die Subtraktion.

  Impulse: „Schieb die Aufgabe am Rechenrahmen. Mach zuerst den Zehner voll.“, „Beschreibe, was du schiebst.“, Beschreibe deiner Partnerin/deinem Partner, was sie/ er schieben soll, um die Aufgabe zu lösen.“, „Welche Zahlzerlegungen helfen dir bei dieser Aufgabe? Warum?“

  Material: Rechenrahmen

  Zahlenraum: Die erste Thematisierung sollte im Zahlenraum bis 20 erfolgen, später können auch im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus die Übergänge über die Stufenzahlen mit dem schrittweisen Rechnen thematisiert werden, z. B. über das Nutzen von Analogien (siehe S. 89–90).



- **Hilfsaufgaben und Nachbaraufgaben nutzen:**

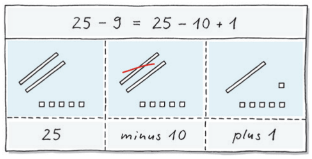
  Beim Nutzen von Hilfsaufgaben und Nachbaraufgaben werden Zahl- und Aufgabenbeziehungen genutzt. Dabei wird eine subjektiv einfache Aufgabe gelöst, die mit der gegebenen Aufgabe operativ verwandt ist. Es wird die gegebene Aufgabe so verändert, dass sie leichter zu rechnen ist. Ggf. muss diese Veränderung am Schluss der Rechnung wieder rückgängig gemacht werden. Zwei besondere Hilfs- bzw. Nachbarschaftsbeziehungen sind die Nähe zur 10 und das Verdoppeln und Halbieren (siehe die nächsten beiden Anregungen).

  Impulse: „Rechne noch nicht. Erkennst du eine benachbarte Aufgabe, die du leichter rechnen kannst?“, „Was musst du machen, damit du zuerst die leichte Aufgabe rechnen kannst?“, „Zeige am Material, wie du rechnest.“, „Beschreibe genau, wie du am Ende ausgleichen musst. Begründe.“

  Material: Rechenrahmen, Zahlenfelder, Wendeplättchen, Zehnersystem-Blöcke

  Zahlenraum: Die erste Thematisierung sollte im Zahlenraum bis 20 erfolgen, später kann das Nutzen von Hilfs- bzw. Nachbaraufgaben auch im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus thematisiert werden, z. B. über das Nutzen von Analogien (siehe S. 89–90).

- **Nähe zur 10 nutzen**:
  Bei dieser Strategie wird die Nähe einer der beteiligten Zahlen zur 10 genutzt (z. B. 7 + 9 über 7 + 10 – 1, 15 – 9 über 15 – 10 + 1), da das Rechnen mit der 10 vielen Lernenden leichtfällt. Die Nähe zur 10 kann dabei an fast allen Materialien entdeckt, genutzt und veranschaulicht werden, die eine Zehnerstrukturierung haben.

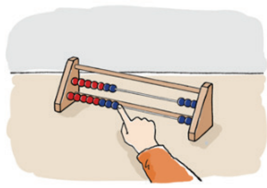


  Impulse: „Rechne noch nicht. Erkennst du eine benachbarte Aufgabe, die du leichter rechnen kannst?“, „Was musst du machen, damit du zuerst die leichte Aufgabe rechnen kannst?“, „Zeige am Material wie du rechnest.“, „Beschreibe genau, wie du am Ende ausgleichen musst. Begründe.“

  Material: Rechenrahmen, Zehnersystem-Blöcke

  Zahlenraum: Die erste Thematisierung sollte im Zahlenraum bis 20 erfolgen, später kann das Nutzen von Hilfs- bzw. Nachbaraufgaben auch im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus thematisiert werden, z. B. über das Nutzen von Analogien (siehe S. 89–90).

- **Verdoppeln und Halbieren nutzen**:
  Wenn die Summanden einer Aufgabe möglichst nah beieinanderliegen bzw. der Subtrahend ungefähr die Hälfte des Minuenden ist, kann die entsprechende Aufgabe gut über das Fast-Verdoppeln bzw. Fast-Halbieren gelöst werden. Das Nutzen von Verdopplungsaufgaben kann am Rechenrahmen entwickelt, entdeckt und nachvollzogen werden. Das Nutzen von Halbierungsaufgaben ist ebenfalls nachvollziehbar, kann aber kaum aus der Handlung am Rechenrahmen entwickelt werden.



  Impulse: „Schieb die Aufgabe am Rechenrahmen. Stelle beide Summanden untereinander ein.“, „Welche Verdopplungsaufgabe kannst du nutzen? "Beschreibe deiner Partnerin/deinem Partner, was sie/er schieben soll, um die Aufgabe über das Verdoppeln zu lösen.", „Welche Halbierungsaufgabe hilft dir? Zeig zuerst die Halbierungsaufgabe am Rechenrahmen. Wie muss die Halbierungsaufgabe verändert werden?“

  Material: Rechenrahmen, Punktefelder, Zahlenstreifen

  Zahlenraum: Die erste Thematisierung sollte im Zahlenraum bis 20 erfolgen, später kann das Nutzen von Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben auch im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus thematisiert werden, z. B. über das Nutzen von Analogien (siehe S. 89–90).

5 (Rechtliche) Rahmenvorgaben

5.1 Rechtliche Rahmenvorgaben für Berlin

Das Schulgesetz für Berlin wurde zuletzt im April 2019 geändert. Nun sind darin die rechtlichen Grundlagen für Nachteilsausgleiche und Notenschutz in § 58 Abs. 8 und 9 gegeben. Nach § 58 Abs. 10 des Schulgesetzes kann die für das Schulwesen zuständige Senatsverwaltung Regelungen für das „Abweichen von den allgemeinen Maßstäben der Leistungsbewertung einschließlich des Nachteilsausgleichs und des Notenschutzes“ durch Rechtsverordnungen festlegen. Daher sind die Rechtsvorschriften zum Thema Rechenschwierigkeiten in der Grundschulverordnung (GsVO), Sekundarstufe-I-Verordnung (Sek-I-VO), der Verordnung über die gymnasiale Oberstufe (VO-GO) und der Sozialpädagogikverordnung (SozpädVO) niedergelegt.

Diese geänderten Verordnungen wurden im September 2019 veröffentlicht. In ihnen sind für den jeweiligen Geltungsbereich der gesetzliche Handlungsrahmen abgesteckt, in dem sich die Prozesse zur Prävention, Diagnose, Förderung und Leistungsbeurteilung bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten bewegen.

In einem Handlungsleitfaden wird die Vorgehensweise bei Rechenschwierigkeiten in der Schule detailliert und transparent dargestellt. Die Verfahren und Abläufe zwischen Schule, Eltern und SIBUZ werden darin erläutert. Der Handlungsleitfaden *„Schwierigkeiten im Lesen, Schreiben und Rechnen – Leitfaden zur Diagnostik mit Hinweisen zum Nachteilsausgleich und Notenschutz“* wird in Kürze veröffentlicht (Stand: November 2019).

Die Ausführungsvorschrift zur Förderung bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (AV Rechenstörungen) ist am 31. Juli 2019 außer Kraft getreten. Diese Ausführungsvorschrift wird nicht erneuert, da alle diesbezüglichen Regelungen in die Schulstufenverordnungen, insbesondere in die Grundschulverordnung, aufgenommen wurden.

Im Hinblick auf die Förderprognosen zum Übergang in die weiterführende Schule gibt es für das Fach Mathematik keine Änderungen.

5.1.1 Checkliste für Lehrkräfte im Rahmen der prozessorientierten Diagnostik (Berlin)

<table>
<tr><th></th><th>Verfahrensschritte</th><th>✓</th></tr>
<tr><td colspan="3">Alle Schülerinnen und Schüler</td></tr>
<tr><td>Lernausgangs-analyse</td><td>Feststellung der individuellen Lernausgangslage mit einer Lernstandsanalyse, z. B. durch LauBe als normiertes Verfahren</td><td></td></tr>
<tr><td>Dokumentation</td><td>Dokumentation der Auswertung und Schlussfolgerungen der Ergebnisse</td><td></td></tr>
<tr><td>Förderung</td><td>Unterstützung und Förderung jeder Schülerin/jedes Schülers auf der Grundlage ihrer/seiner individuellen Ergebnisse im Regelunterricht</td><td></td></tr>
<tr><td>Evaluation</td><td>Regelmäßige Beobachtungen und Erfassung des Lernfortschritts</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten im Rechnen</td></tr>
<tr><td>Diagnose</td><td>Sofern Schülerinnen und Schüler trotz Förderung in ihren Leistungen deutlich hinter den Anforderungen des Regelunterrichts zurückbleiben, überprüft die Lehrkraft, die Mathematik unterrichtet, ob Schwierigkeiten im Rechnen vorliegen.
Erfassung individueller Lernvoraussetzungen, Lern- und Lösungsprozesse sowie mathematische Basiskompetenzen durch eine entsprechende prozessorientierte Diagnostik, z. B.
- die Testkarten der Kartei „Auf dem Weg zum denkenden Rechnen“ https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/imint-grundschule-mathe-materialien/
- Diagnosebogen (Kapitel 4.1 in dieser Handreichung)
(Hinzuziehen weiterer Unterstützung durch die schulische Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten ist möglich.)</td><td></td></tr>
<tr><td>Auswertung und Dokumentation</td><td>Auswertung des Diagnosebogens, Dokumentation der Ergebnisse und Ziehen von Schlussfolgerungen für die Förderung
Erstellung eines individuellen Förderplans bei Schülerinnen und Schülern mit Schwierigkeiten im Rechnen:
- Welche Stärken hat die Schülerin/der Schüler?
- Welche Schwierigkeiten zeigt sie/er beim Rechnenlernen?
- Welche Schwerpunkte werden gesetzt?
- Mit welchem Schwerpunkt sollte die Förderung beginnen?
- Welche Materialien sind für die Förderung besonders geeignet?
- Wann und durch wen sollte die Förderung stattfinden?
Dokumentation der Förderung und des Lernerfolgs</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Schülerinnen und Schüler mit stark ausgeprägten Schwierigkeiten im Rechnen</td></tr>
<tr><td>Diagnose</td><td>Bleiben die Schwierigkeiten trotz individueller längerfristiger Fördermaßnahmen auf Grundlage eines Förderplans bestehen bzw. belegt die Lerndokumentation geringe Fortschritte, ist von stark ausgeprägten Rechenschwierigkeiten auszugehen. Es ist eine wiederholte bzw. weiterführende Diagnostik durch die Mathematik unterrichtende Lehrkraft oder der schulischen Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten durchzuführen.
Dies kann sowohl mit einem prozessorientierten Diagnoseinstrument erfolgen, z. B.
- Diagnosebogen (siehe Kapitel 4.1)
- ElementarMathematisches BasisInterview (EMBI)
als auch mit einem standardisierten Rechentest, z. B.
- Heidelberger Rechentest (HRT 1–4)
- BIRTE 2.</td><td></td></tr>
</table>

	Verfahrensschritte	✓
	Eine weitere Unterstützung durch die schulische Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten bzw. das SIBUZ ist möglich.	
Auswertung und Dokumentation	Auswertung des Diagnosebogens, Dokumentation der Ergebnisse und ziehen von Schlussfolgerungen für die weitere **zusätzliche** Förderung Ergänzung des **individuellen Förderplans** Dokumentation der Prozesse im Dokumentationsbogen „Maßnahmen der lernprozessbegleitenden Diagnostik und Förderung“ wird dem Schülerbogen beigefügt. https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/foerderung/diagnostik/fachinfo	
Zusätzliche Förderung	Durchführung der zusätzlichen Förderung im Rahmen der personellen und organisatorischen Möglichkeiten **in temporären Lerngruppen** Grundlegendes Ziel: Aufbau eines grundlegenden Verständnisses von Zahlen und Rechenoperationen Weitere Unterstützung durch die schulische Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten ist möglich.	
Lehrkraft, die das Fach Mathematik unterichtet	Entscheidung über die Notwendigkeit der spezifischen Förderung	
Klassen-konferenz	**Entscheidung** der Klassen- bzw. Jahrgangsstufenkonferenz über die Gewährung eines **Nachteilsausgleichs** nach GsVO	
Schulleitung	Entscheidung über Art, Umfang und Dauer von zusätzlichem Förderunterricht auf Vorschlag der das Fach unterrichtenden Lehrkraft. Gewährung eines **Nachteilsausgleichs** nach GsVO auf Vorschlag der Klassenkonferenz Gewährung eines vorübergehenden Notenschutzes nach GsVO in den Jahrgangsstufen 3 und 4 auf Antrag der Eltern	
Eltern	Elterngespräche über die Notwendigkeit der Fördermaßnahme auf der Grundlage des Förderplans: - Welche Stärken hat die Schülerin/der Schüler? - Welche Schwierigkeiten fallen auf? - Welche Fördermaßnahmen sind geplant? - Wie kann eine Unterstützung durch die Eltern erfolgen? - Beratung zum Thema Nachteilsausgleich und Notenschutz Ggf. Antrag auf vorübergehenden Notenschutz (Jahrgangsstufen 3 und 4) durch die Eltern bei der Schulleitung	
Kooperation	**Abstimmung** der Förderinhalte des Förderplans mit der Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten sowie Kolleginnen/Kollegen, die in Bezug auf das gemeinsame Lernen oder den Förderunterricht mit der Schülerin/dem Schüler zusammen arbeiten.	

Tabelle 13: Checkliste für Lehrkräfte im Rahmen der prozessorientierten Diagnostik (Berlin)

Ausführliche Hinweise zur Vorgehensweise bei Schwierigkeiten im Rechnen für Berlin entnehmen Sie dem aktuellen Leitfaden der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie (voraussichtlich 12/2019):

Schwierigkeiten im Lesen, Schreiben und Rechnen – Leitfaden zur Diagnostik mit Hinweisen zum Nachteilsausgleich und Notenschutz.

5.2 Rechtliche Rahmenvorgaben für Brandenburg

Im Land Brandenburg sind die rechtlichen Grundlagen für den Umgang mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen beschrieben in der:

Verordnung über die Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten im Lesen und Rechtschreiben oder im Rechnen (Lesen-Rechtschreiben-Rechnen Verordnung – LRSRV)

vom 17. August 2017 (http://bravors.brandenburg.de/verordnungen/lrsrv)

(Stand: September 2019)

In der LRSR-Verordnung wird auch auf die Grundschulverordnung verwiesen. Die Verweise beziehen sich auf (§ 10) Grundsätze der Leistungsbewertung, auf (§ 6) Besondere Fördermaßnahmen bei besonderen Schwierigkeiten im Lesen, Rechtschreiben und Rechnen sowie auf (§ 5) Grundsätze der Förderung der Grundschulverordnung des Landes Brandenburg.

5.2.1 Checkliste für Lehrkräfte im Rahmen der prozessorientierten Diagnostik (Brandenburg)

<table>
<tr><th></th><th>Verfahrensschritte</th><th>✓</th></tr>
<tr><td colspan="3">Alle Schülerinnen und Schüler</td></tr>
<tr><td>Lernaus-
gangsanalyse</td><td>Feststellung der individuellen Lernausgangslage mit einer Lernstandsanalyse, z. B. durch ILeA plus als normiertes Verfahren</td><td></td></tr>
<tr><td>Dokumentation</td><td>Dokumentation der Auswertung und Schlussfolgerungen der Ergebnisse von ILeA plus (individueller Lernplan, Jahrgangsstufe 1/3/5)</td><td></td></tr>
<tr><td>Förderung</td><td>Unterstützung und Förderung jeder Schülerin/jedes Schülers auf der Grundlage ihrer/seiner individuellen Ergebnisse im Regelunterricht</td><td></td></tr>
<tr><td>Evaluation</td><td>Regelmäßige Beobachtungen und Erfassung des Lernfortschritts</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Schülerinnen und Schüler mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen</td></tr>
<tr><td>Diagnose</td><td>Sofern Schülerinnen und Schüler trotz Förderung in ihren Leistungen deutlich hinter den Anforderungen des Regelunterrichts zurückbleiben, überprüft die Lehrkraft, die Mathematik unterrichtet, ob besondere Schwierigkeiten im Rechnen vorliegen.
Erfassung individueller Lernvoraussetzungen, Lern- und Lösungsprozesse sowie mathematische Basiskompetenzen durch die Lehrkraft für Mathematik oder die Lehrkraft, die für Rechenschwierigkeiten zuständig ist
- durch ILeA plus, AB (besonders im 1. Schulhalbjahr, Klasse 2)
- durch unterrichtsbegleitende prozessorientierte Diagnostik, z. B. Diagnosebogen (siehe Kapitel 4.1).
Hinzuziehen weiterer Unterstützung durch die schulische Beratungslehrkraft für Rechenschwierigkeiten sowie der schulpsychologischen Beratung möglich.</td><td></td></tr>
<tr><td>Auswertung und Dokumentation</td><td>Auswertung des Diagnosebogens, Dokumentation der Ergebnisse und ziehen von Schlussfolgerungen für die Förderung
Erstellung eines individuellen Förderplans bei Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens:
- Welche Stärken hat die Schülerin/der Schüler?
- Welche Schwierigkeiten zeigt sie/er beim Rechnenlernen?
- Welche Schwerpunkte werden gesetzt?
- Mit welchem Schwerpunkt sollte die Förderung beginnen?
- Welche Materialien sind für die Förderung besonders geeignet?
- Wann und durch wen sollte die Förderung stattfinden?
Dokumentation der Förderung und des Lernerfolgs</td><td></td></tr>
<tr><td>Lehrkraft</td><td>Beantragen und Begründen der Notwendigkeit einer zusätzlichen Förderung</td><td></td></tr>
<tr><td>Eltern</td><td>Elterngespräche über die Notwendigkeit der Fördermaßnahme auf der Grundlage des Förderplans:
- Welche Stärken hat die Schülerin/der Schüler?
- Welche Schwierigkeiten fallen auf?
- Welche Fördermaßnahmen sind geplant?
- Wie kann eine Unterstützung durch die Eltern erfolgen?
- Beratung zum Thema Nachteilsausgleich und Notenschutz
Einholen der Einverständniserklärung der Erziehungsberechtigten zur Durchführung der zusätzlichen Förderung und des Nachteilsausgleichs:
- Vereinbarungen/Lösungsansätze schriftlich festhalten
Ggf. Antrag auf schriftliche Information zur Lernentwicklung statt Noten (bis Jahrgangsstufe 4 möglich)</td><td></td></tr>
</table>

	Verfahrensschritte	✓
Klassenkonferenz	**Beratung und Entscheidung** der Klassen- bzw. Jahrgangsstufenkonferenz über: - zusätzlichen Förderung: Art, Umfang, Dauer - Gewährung eines Nachteilsausgleichs nach LRSRV Erstellung von schriftlichen Informationen zur Lernentwicklung statt Noten (bis Jahrgangsstufe 4 möglich) nach Antrag der Eltern	
Kooperation	**Abstimmung** der Förderinhalte des Förderplans mit Kolleginnen/Kollegen, diein Bezug auf das gemeinsame Lernen oder den Förderunterricht mit der Schülerin/dem Schüler zusammenarbeiten.	
Zusätzliche Förderung	**Durchführung der befristeten zusätzlichen Förderung** Ziel: Aufbau eines grundlegenden Verständnisses zu Zahlen und Rechenoperationen **Inhalte der Förderung** (siehe Kapitel 4.2) auf der Grundlage des Diagnose- und Auswertungsbogens **Organisation der Förderung** - zeitlich begrenzte Lerngruppen - zusätzlicher Förderunterricht in kleinen Lerngruppen, auch klassen- und jahrgangsübergreifend möglich Eine Hinzuziehung weiterer Fachleute zur Beratung für die Förderung ist möglich.	
Dokumentation	Regelmäßige Beobachtungen und Erfassung des Lernfortschritts	
Klassen-konferenz	Die Klassenkonferenz entscheidet über die Fortsetzung der Förderung.	

Tabelle 14: Checkliste für Lehrkräfte im Rahmen der prozessorientierten Diagnostik (Brandenburg)

5.3 Über das Rechnenlernen sprechen

Bei der Elternarbeit

Schulische Probleme und insbesondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen können für familiäre Verhältnisse sehr belastend sein. Um den jeweiligen Schülerinnen und Schülern angemessen zu helfen und sie bestmöglich zu unterstützen, ist meist eine zielführende Zusammenarbeit zwischen Eltern und Lehrkraft nötig. Damit diese gelingen kann, sollten verschiedene Aspekte einer kooperativen Kommunikation berücksichtigt werden (Streit-Lehmann 2013).

Kooperative vs. hierarchische Gesprächsmuster

Wenn Lehrkräfte und Eltern zu Gesprächen zusammenkommen, können sich hierarchische Gesprächsmuster entwickeln. Hiermit ist gemeint, dass es zwischen den Kommunikationspartnern zu einem Gefälle zwischen den Gesprächsrollen kommen kann. Eine hierarchische Kommunikation kann im Kontext *Schule* leicht zu Unzufriedenheit, manchmal zu ernsthaften Kommunikationshürden führen.

Zielführender (und angenehmer) ist ein Gespräch auf Augenhöhe. Dies kann gelingen, wenn „mindestens eine Partei, eine kooperative, wertschätzende und auf Konsens fokussierte Grundhaltung hat und diese durch geeignete Kommunikationsmuster ausdrückt. Dies ermöglicht für beide Parteien ein hierarchiefreies Gespräch“ (Streit-Lehmann 2013, S. 10). Die folgenden Überlegungen können hierbei hilfreich sein (ebd. S. 10–13).

Emotionale Aufmerksamkeit und Empathie

„Kommunikation auf Augenhöhe beinhaltet die Grundhaltung, dass die jeweiligen Bedürfnisse, Wünsche und Ziele der Kommunikationsteilnehmer gleichermaßen wichtig sind. Die Wahrnehmung von Bedürfnissen, Wünschen und Zielen ist eng mit Empathie und Zuhör-Kompetenzen verbunden“ (Streit-Lehmann 2013, S. 10). Die folgenden Aspekte können zu einer Kommunikation auf Augenhöhe beitragen:

Kommunikation auf „Augenhöhe“

Bereitschaft sich auf die Gefühle und Bedürfnisse anderer einzulassen
Obwohl die Fähigkeit, sich in andere hineinzufühlen, angeboren ist (Ekman 2010), kann der „Entschluss den Gefühlen und Bedürfnissen anderer gegenüber aufmerksam zu sein, diese wahrnehmen zu wollen und diese Wahrnehmungen hinsichtlich der eigenen Reaktionsmuster zu berücksichtigen, [...] bewusst gefasst werden“ (ebd. S. 11). Bei der Vorbereitung des Elterngesprächs sollten also nicht nur inhaltliche Aspekte berücksichtigt werden, sondern vor allem auch die eigene Bereitschaft zur emotionalen Aufmerksamkeit und Empathie geprüft werden.

Unaufdringliches Spiegeln (verbaler und nonverbaler Äußerungen)
Eine Möglichkeit des Berücksichtigens der Gefühle und Bedürfnisse anderer ist das unaufdringliche Spiegeln des eigenen Eindrucks. Unaufdringlich bedeutet hier, dass die eigene Vermutung eher hypothetisch formuliert wird und weniger als Tatsache.

Beispiel: Die Lehrkraft hat sich mit den Eltern darauf geeinigt, dass diese täglich mit ihrem Kind zu Hause die in der Schule thematisierten Zahlzerlegungen üben. Dabei wirken die Eltern eher belastet. Dieser Eindruck könnte von der Lehrkraft gespiegelt werden: „Das wäre wirklich toll und würde Peter sehr helfen – ist aber sicherlich nicht immer einfach, oder?“

Anerkennung von Kompetenzen
Eltern kennen ihre Kinder am besten, wissen viel über sie und können dementsprechend reagieren. Lehrkräfte kennen ihre Schülerinnen und Schüler auch sehr gut, wissen viel über sie und können dementsprechend reagieren. Im Elterngespräch ist es die Aufgabe der Lehrkraft diese selbstverständliche Tatsache zu explizieren, indem sie offen ansprechen, dass *die Eltern die Experten* für ihre Kinder sind. Gezielt sollten die Lehrkräfte erfragen, welche Beobachtungen die Eltern zu Hause gemacht haben. Beispiele für solche Fragestellungen könnten sein: „Welcher Inhalt macht ihrem Kind im Moment am meisten Spaß?“, „Welcher Inhalt bereitet ihrem Kind im Moment am meisten Schwierigkeiten?“

Kennen und Berücksichtigen des familiären Umfelds

Um eine gute Zusammenarbeit bei der Förderung eines Kindes erreichen zu können, ist es wichtig, das familiäre Umfeld zu kennen und zu berücksichtigen. Einige dieser Bedingungen sind möglicherweise schon aus anderen Elterngesprächen bekannt, andere können in einem geeigneten Rahmen gezielt erfragt werden. Dabei ist es wichtig, dass den Eltern Raum gegeben wird, sich diesen Fragen offen zu stellen. Wichtige Informationen können dabei die folgenden sein (Streit-Lehmann 2013, S. 12):

- Zeitliche und organisatorische Ressourcen (Termine, Beruf, Geschwister, ...)
- Familiäres Verhältnis (Eltern–Kind, Vater–Mutter, Kind–Geschwister, ...)
- Verhältnis Schule-Familie-Kind (Hausaufgaben, Klassenarbeiten, Üben, ...)
- Einstellung der Eltern zum Fach Mathematik
- Bereitschaft und Möglichkeit der Eltern, sich ggf. in die mathematischen Inhalte einzuarbeiten
- Bereitschaft und Möglichkeit der Eltern, sich in der Förderarbeit einzubringen.

Ausgehend von diesen Informationen kann die Lehrkraft *gemeinsam* mit den Eltern überlegen, ob und in welcher Weise die Eltern in die Förderarbeit eingebunden werden können. Dabei sind folgende Aspekte wichtig (Streit-Lehmann 2013, S. 12):

- Die Lehrkraft ist die Expertin für die mathematikdidaktische Förderung und deshalb zuständig für die Festlegung von Form und Inhalt der Unterstützungsmaßnahmen.
- Die Unterstützungsmaßnahmen sollten ressourcenorientiert festgelegt werden. Das heißt, dass die gefundenen Informationen (siehe oben) berücksichtigt werden müssen. Ein Förderplan, der diese Ressourcen sprengen würde, wäre nicht hilfreich.
- Würde die Einbindung der Eltern in die inhaltliche Förderarbeit das Eltern-Kind-Verhältnis belasten, wäre von dieser Einbindung abzusehen.
- Die emotionale Unterstützung des Kindes seitens der Familie ist mindestens ebenso wichtig für den schulischen Erfolg, wie eine inhaltliche Unterstützung. Daher sollten Eltern in jedem Fall auf diese Möglichkeit der Unterstützung hingewiesen werden.

Konzentration auf die Sache und auf den mathematischen Inhalt

Bei aller emotionalen Beteiligung der Gesprächspartner sollte sich immer auf die Sache konzentriert werden. Dies bedeutet nicht, dass die Gefühle und Bedürfnisse der Gesprächspartner ignoriert werden sollten (siehe oben), sondern es bedeutet, das Gespräch immer wieder auf den Kern zurückzuführen – Schwierigkeiten beim Rechnenlernen. Dabei sollten folgende Aspekte berücksichtigt und benannt werden:

- Das Kind hat *keine* „Schwäche“ oder „Störung“, es ist *nicht* „krank“ (siehe Kapitel 6).
- Es geht um klar benenn- und identifizierbare Inhalte, die das Kind noch nicht gelernt hat.
- Diese Inhalte gilt es, im Rahmen von Elterngesprächen zu benennen und mögliche Unterstützungsmaßnahmen zu finden und zu formulieren.

Die vorliegende Handreichung kann dabei helfen, auf diese Inhalte zu fokussieren (siehe Kapitel 1.3 und Kapitel 4). Hilfreich ist es dabei immer, die entsprechenden Aussagen an Beispielen zu veranschaulichen (Schülerlösungen, vom Kind genutzte Materialien, Aufgabenformate, ...).

Konzentration auf Lösungen

Am Ende des Elterngesprächs sollte eine realistische und realisierbare Handlungsoption stehen. Diese kann zum Beispiel ein inhaltlicher Förderplan sein oder eine Vereinbarung zum weiteren organisatorischen Vorgehen. Daher ist es wichtig, nicht bei der Formulierung von wahrgenommenen Problemen zu verweilen, sondern das Gespräch auch in Richtung dieser Lösungen zu lenken. Hierzu kann die Lehrkraft Folgendes tun:

- Bisher Gesagtes lösungsorientiert zusammenfassen und somit inhaltlich anzuschließen
- Frühere Lösungsansätze gemeinsam reflektieren und ggf. erneuern
- Lösungsideen schriftlich festhalten.

6 Rechenschwäche? – Begrifflichkeiten, Risikofaktoren, Symptome

6.1 Zur Begrifflichkeit

Es gibt derzeit keine von allen Bezugswissenschaften einheitlich anerkannte Begrifflichkeit für das Phänomen, dass es Kinder gibt, die beim Rechnenlernen große Schwierigkeiten haben. Dies führt einerseits dazu, dass die Auswahl an Begriffen sehr breit ist, zum Beispiel *Rechenstörung*, *Rechenschwäche* oder *Dyskalkulie*. Andererseits sind eine Klärung dieser Begriffe und eine Abgrenzung untereinander kaum möglich. Dies liegt daran, dass in den unterschiedlichen begrifflichen Klärungen unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. So fanden sich die Begriffe *Rechenschwäche* und *Rechenstörung* eher im Kontext von Schule und Mathematikunterricht, der Begriff *Dyskalkulie* eher im medizinisch-psychologischen Kontext (Schipper 2009). Doch auch diese Grenzen verschwimmen immer mehr (Kuhn 2017). Auf die Darstellung der medizinisch-neurologischen und der psychologischen Sichtweisen wird an dieser Stelle verzichtet, da sie für den konkreten Umgang mit Problemen beim Rechnenlernen im schulischen Kontext nicht unmittelbar relevant sind (eine gute Zusammenfassung dieser Aspekte bietet Kuhn 2017).

Für Schule und Mathematikunterricht erscheint ein *phänomenologischer Definitionsversuch* vielversprechend. Dieser Ansatz orientiert sich vor allem an Bearbeitungsprozessen beim Rechnen(-lernen), die in der Schule sichtbar werden können.

Besondere Probleme beim Rechenlernen

Die vorliegende Handreichung erhebt somit nicht den Anspruch, eine umfassende Definition des Phänomens *Besondere Probleme beim Rechnenlernen* zu geben. Es ist auch nicht das Anliegen der Handreichung, sämtliche medizinisch-neurologischen und psychologischen Möglichkeiten einer Diagnose darzustellen, denn diese sind für den schulischen Umgang mit diesem Phänomen weder hilfreich noch zielführend. Gemäß den rechtlichen Rahmenbedingungen der Länder Berlin und Brandenburg können jedoch weitere Fachkräfte zur Einschätzung der Ausgangslage herangezogen werden (siehe Kapitel 5).

Es wäre wünschenswert, wenn sich im schulischen Kontext der Begriff „Besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen“ etablieren würde, da dieser weder eine Krankheit noch ein Defizit (eine Störung oder Schwäche) aufseiten des Kindes assoziiert, noch den schulischen Kontext ausklammert. Durch die Fokussierung auf das Rechnenlernen wird zudem deutlich, dass das Rechnenlernen als Prozess im schulischen Kontext verortet ist, und Schule und Mathematikunterricht somit auch Einfluss auf diesen Prozess haben (siehe unten).

6.2 Indikatoren für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen können im Mathematikunterricht durch vieles auffallen: So kann es sein, dass sie viele Fehler machen, dass sie langsam arbeiten, dass sie das Rechnen vermeiden usw. Diese Hinweise sind jedoch eher Oberflächenmerkmale und weisen noch nicht darauf hin, wo die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen inhaltlich zu verorten sind. Dennoch sind sie ein erster Hinweis darauf, genauer hinzuschauen.

Die folgenden Indikatoren hingegen sind inhaltlich eng umschrieben und bieten über das Erkennen von Schwierigkeiten beim Rechnenlernen hinaus schon eine Einsicht in mögliche Fördermaßnahmen.

Verfestigtes zählendes Rechnen

Verfestigtes zählendes Rechnen gilt als das Hauptsymptom für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen. Auch wenn zählendes Rechnen zu Beginn der Schulzeit noch ein erwartungskonformes und zielführendes Vorgehen ist, um einfache Rechenaufgaben lösen zu können, ist das Festhalten am zählenden Rechnen weit über das erste Schulbesuchsjahr hinaus ein deutlicher Hinweis auf (sich entwickelnde) Schwierigkeiten beim Rechnenlernen.

Einerseits kann durch das Festhalten am Zählen die Entwicklung tragfähiger Rechenstrategien und mentaler Werkzeuge *behindert* werden, andererseits ist das verfestigte zählende Rechnen die *unmittelbare Folge* des Fehlens dieser Strategien und Werkzeuge. Somit ist das verfestigte zählende Rechnen ein deutlicher Indikator für bestehende Schwierigkeiten (siehe Kapitel 1 und Kapitel 4.1).

Zur Überwindung verfestigten zählenden Rechnens muss das mentale Werkzeug grundlegend aufgebaut und gefestigt werden (siehe Kapitel 4.2). Dies beansprucht viel Zeit – mehr als im Regelunterricht normalerweise zur Verfügung steht.

Fehlende Orientierung im Zahlenraum, fehlendes Stellenwertverständnis

Ein tragfähiges Stellenwertverständnis ist eine der wichtigsten Grundlagen für eine sichere Orientierung im Zahlenraum. Ohne Stellenwertverständnis können Zahlbeziehungen nicht erkannt und Größenordnungen nicht eingeschätzt werden. Ähnlich wie das verfestigte zählende Rechnen ist auch ein fehlendes Stellenwertverständnis somit nicht nur ein Grund für Schwierigkeiten beim Weiterlernen, sondern auch ein deutliches Anzeichen für diese Schwierigkeiten.

Fehlendes Stellenwertverständnis zeigt sich häufig darin, dass das Prinzip der fortgesetzten Bündelung noch nicht verstanden wurde, dass die Rolle und der Zusammenhang zwischen Einern, Zehnern, Hundertern usw. unklar ist, und dass notierte Zahlen eher als eine Aneinanderreihung von Ziffern verstanden werden und nicht als Zahlen, die nach einem Stellenwertprinzip strukturiert sind (siehe S. 32 ff. und Kapitel 4.1).

Der Aufbau eines tragfähigen Stellenwertverständnisses beginnt mit dem Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung. Anschließend muss materialgestützt geklärt werden, dass die entsprechenden Bündel (Einer, Zehner, Hunderter usw.) im Zahlzeichen eine ganz bestimmte, festgeschriebene Position haben und dass fehlende Positionen im Zahlzeichen durch eine Null gekennzeichnet werden müssen (siehe Kapitel 4.2.5 und 4.2.6).

Fehlende oder fehlerhafte Grundvorstellungen zu Operationen

Als dritter inhaltlicher Indikator für Schwierigkeiten beim Rechnenlernen können fehlende Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen identifiziert werden. Grundsätzlich gehen wir von tragfähigen Grundvorstellungen dann aus, wenn ein Kind in der Lage ist, zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Zahlen und Operationen hin und her zu wechseln (siehe Kapitel 2.1). Bei fehlenden Grundvorstellungen zu Operationen gelingt es diesen Kindern insbesondere nicht, Bilder, Handlungen, didaktisches Material o. Ä. mit den entsprechenden Operationszeichen und deren Bedeutung zu verknüpfen. Das individuelle Verständnis des Malpunktes ($3 \cdot 4$) oder des Minusstrichs ($7 - 3$) beschränkt sich in diesem Fall auf ein auswendig gelerntes Regelwissen ohne Verständnisgrundlage. Es fehlt die Einsicht, dass z. B. der Malpunkt darauf hindeutet, dass es sich dreimal um eine Menge von vier Objekten handelt und dass der Minusstrich bedeutet, dass von sieben Objekten drei weggenommen werden.

Zum Aufbau von Grundvorstellungen müssen vielfältige (Handlungs-)Situationen geschaffen werden, in denen der Wechsel zwischen Darstellungsformen gefordert, besprochen und gefördert werden kann (siehe Kapitel 2.1 und Kapitel 4.2).

6.3 Zur Entstehung von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

Mögliche Einflussfaktoren

Bisher können *keine eindeutigen und zwingenden Ursachen* für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen identifiziert werden. Stattdessen ist es möglich, Risikofaktoren zu benennen, die möglicherweise einen Einfluss auf gelingendes oder misslingendes Rechnenlernen haben können (Schipper 2009, Kaufmann und Wesselowski 2006). Diese Risikofaktoren können einerseits personenbezogen sein (das Kind hat Schwierigkeiten mit der auditiven Wahrnehmung, das Kind ist misserfolgsorientiert), andererseits können diese Faktoren umweltbezogen sein. Hiermit ist vor allem das weitere und engere soziale Umfeld gemeint – beim letzteren vor allem die Familie. Zum sozialen Umfeld gehört aber auch die Schule – und dass die Schule einen maßgeblichen Einfluss auf das Miss- oder Gelingen des Rechnenlernens hat, ist nicht von der Hand zu weisen (Gaidoschik 2017).

Verantwortung von Schule

Dies bedeutet, dass Schule durch einen präventiven, verstehensorientierten, materialgestützten Mathematikunterricht dazu beitragen kann, das Entstehen von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zu vermeiden (Gaidoschik 2017). Gleichzeitig bedeutet es nicht, dass die übrigen Risikofaktoren ausgeklammert oder ignoriert werden können. Sie sind jedoch im Kontext *Schule* nicht so unmittelbar zu beeinflussen wie der Unterricht selbst.

7 Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1976). Grundformen des Lehrens. 9., stark erweiterte und umgearbeitete Auflage. Stuttgart: Ernst Klett.

Bauersfeld, H. (1993). Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten – Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung. In: Journal für Mathematikdidaktik, 14 (3/4), S. 243–267.

Benz, C. (2005). Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100. Hildesheim: Franzbecker.

Ekman, P. (2010). Gefühle lesen. Wie Sie Emotionen erkennen und richtig interpretieren. Heidelberg: Spektrum.

Fromme, M. (2016). Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100: Theoretische und empirische Analysen. Wiesbaden: Springer

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2014). Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten. Seelze: Kallmeyer.

Gaidoschik, M. (2017). Zur Rolle des Unterrichts bei der Verfestigung des zählenden Rechnens. In: A. Fritz, S. Schmidt, G. Ricken (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche. 3. Auflage, S. 111–125. Weinheim: Beltz.

Gerster, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In: A. Abele, H. Kalmbach (Hrsg.). Handbuch zur Grundschulmathematik. Band 1: Erstes und zweites Schuljahr, S. 35–102. Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D., Schultz, R. (2000). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Überarbeitete und erweiterte Auflage. Freiburg: Pädagogische Hochschule.

Ingenkamp, K., Lissmann, U. (2008). Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik. Weinheim: Beltz.

Kaufmann, S., Wessolowski, S. (2006). Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Auflage. München: Spectrum.

Kuhn, J.-T. (2017): Rechenschwäche – eine interdisziplinäre Einführung. In: A. Fritz, S. Schmidt, G. Ricken (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche. 3. Auflage, S. 14–29. Weinheim: Beltz.

Kuhnke, K. (2013). Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr. Wiesbaden: Springer.

Kutzer, R. (1999). Überlegungen zur Unterrichtssituation im Sinne strukturorientierten Lernens. In: H. Probst (Hrsg.). Mit Behinderungen muss gerechnet werden, S. 15–69. Solms: Jarick Oberbiel.

LISUM (2019). ILeA plus. Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer. Ludwigsfelde: Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg.

Lorenz, J. H. (1998). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistungen. Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. H. (2008). Mathematikus. 3 Lehrermaterialien. Braunschweig: Westermann.

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.

Nührenbörger, M., Pust, S. (2011): Mit Unterschieden rechnen: Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Padberg, F., Benz, C. (2011): Didaktik der Arithmetik: für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Akademischer Verlag.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B., Grüßing, M. (2007). ElementarMathematisches BasisInterview. Offenburg: Mildenberger.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. In: Journal für Mathematikdidaktik, 31, S. 257–283.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2015). Einen Blick für Zahl- und Aufgabenbeziehungen entwickeln – (gerade) auch mit schwachen Kindern. In: Fördermagazin Grundschule, 4, S. 10–15.

Rinkens, H. D. (1996). Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang. https://www.rinkens-hd.de/en/projekte/AritFaeh.pdf (Zugriff am 27.02.2019).

Ruwisch, S. (2015). Keine Zahl steht für sich allein. Von direkten zu relationalen Zahlvorstellungen. In: Grundschule Mathematik, 44 (1), S. 40–43.

Scherer, P., Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (1998). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen." – Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In: Peter-Koop, A. (Hrsg.). Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 117–131. Offenburg: Mildenberger.

Schipper, W. (2003). Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: M. Baum, H. Wielpütz (Hrsg.). Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch, S. 221–237. Seelze: Kallmeyer.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? In: Grundschule, 29 (10), S. 43–45.

Schipper, W., Schulz, A. (2008). Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schüler. In: Schulverwaltung NRW, 19 (11), S. 297–299.

Schipper, W., Wartha, S., von Schroeders, N. (2011). Birte 2 – Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr – Handbuch zur Diagnostik und Förderung. Braunschweig: Schroedel.

Schulz, A. (2014). Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften – Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schulz, A., Reinold, M. (2017). Stellenwerte gemeinsam verstehen. In: Selter, Chr. (Hrsg.). Guter Mathematikunterricht – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt PIKAS (S. 49-53). Berlin: Cornelsen.

Schulz, A. (2018). Der „Werkzeugkoffer" – Mentale Werkzeuge für die grundlegenden Rechenoperationen. In: Grundschule Mathematik, 57, S. 4–7.

Schulz, A., Schülke, C. (2017). Aufbau von Zahlvorstellungen mit Hilfe von Materialien. In: M. Nührenbörger, U. Häsel-Weide: Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen, S. 132–142. Frankfurt am Main: Grundschulverband e. V.

Schulz, A., Wartha, S. (2011). Materialeinsatz im Mathematikunterricht. In: MNU-Primar, 3 (2), S. 49–56.

Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der „Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, 16 (2), S. 11–19.

Selter, Ch. (2017). Förderorientierte Diagnose und diagnosegeleitete Förderung. In: A. Fritz, S. Schmidt, G. Ricken (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche. 3. Auflage, S. 375–395. Weinheim: Beltz.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen. Berlin: Cornelsen.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Streit-Lehmann, J. (2013). Zusammenarbeit von Lehrkräften und Eltern bei Rechenschwäche. Kiel: IPN.

Sundermann, B., Selter, Ch. (2006). Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.

Verboom, L. (2010): „Ich habe 3 Plättchen mehr als du" In: Mathematik Grundschule, 25, S. 6–7.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrern und Schülern. In: J. H. Lorenz (Hrsg.). Mathematik und Anschauung, S. 147–166. Köln: Aulis.

Voß, S., Sikora, S., Hartke, B. (2017). In: A. Fritz, S. Schmidt, G. Ricken (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche. 3. Auflage, S. 339–355. Weinheim: Beltz.

Wartha, S., Schulz, A. (2012). Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen – Zahlen und Rechnen bis 100. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S., Schulz, A. (in Vorb.). Übergänge gestalten – Mathematiklernen in Primar- und Sekundarstufe.

Wessel, J. (2015). Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion. Stoffdidaktische Analysen und empirische Befunde von Schülerinnen und Schülern des 1. Schuljahres. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozess. In: E. Ch. Wittmann, G. N. Müller, Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1993). „Weniger ist mehr": Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: K. P. Müller (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 394–397. Hildesheim: Franzbecker.

Internetquellen

(1) Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2019). Unterricht nicht zählendes Rechnen (online). Dortmund: Projekt PriMaKom. Verfügbar unter: https://primakom.dzlm.de/463, Zugriff am 18.10.2019

(2) Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2019). Hintergrund strukturiertes Üben (online). Dortmund: Projekt PriMaKom. Verfügbar unter: https://primakom.dzlm.de/212, Zugriff am 18.10.2019

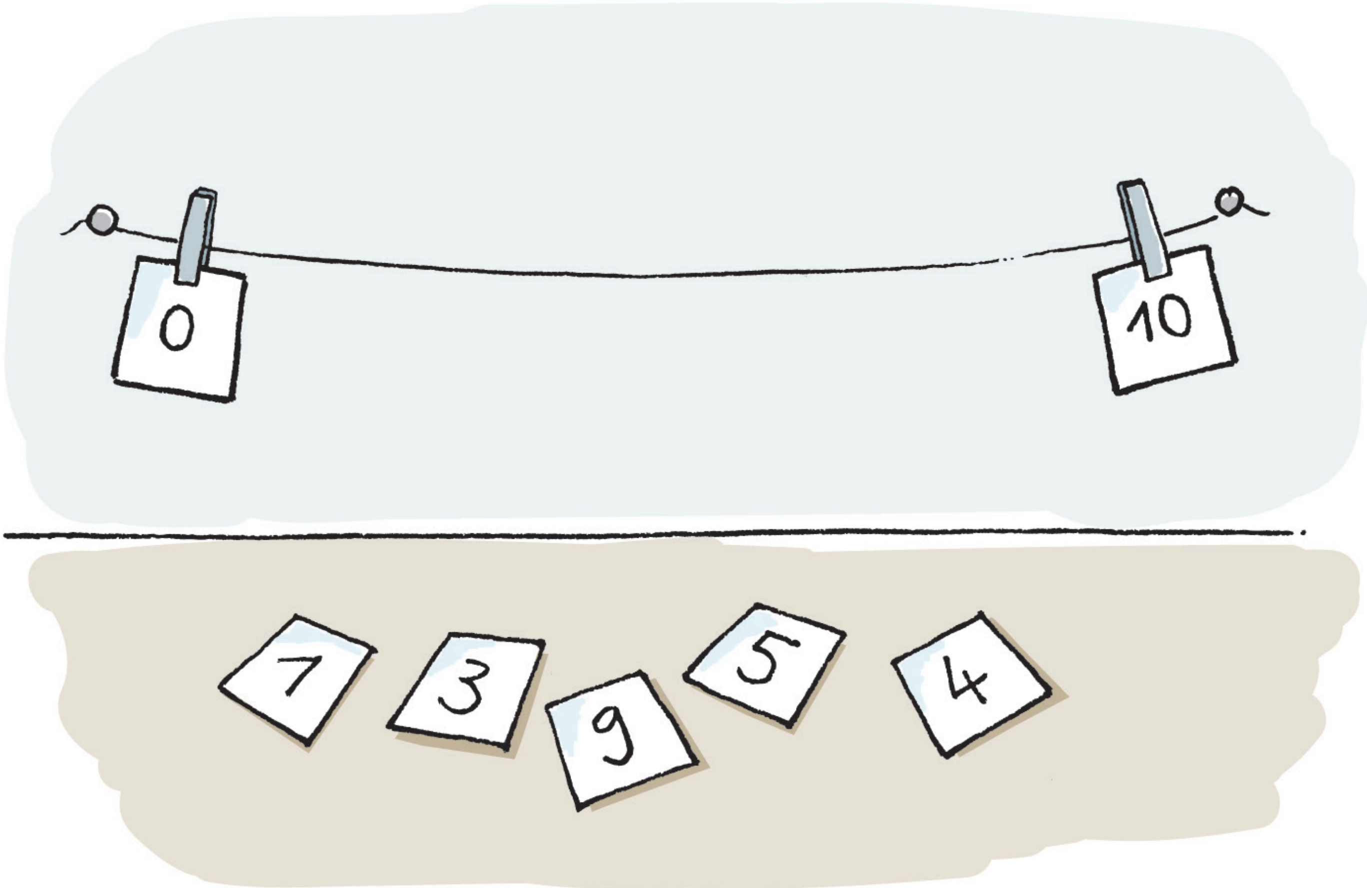
(3) Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2019). Hintergrund gestütztes Üben (online). Dortmund: Projekt PriMaKom. Verfügbar unter: https://primakom.dzlm.de/482, Zugriff am 18.10.2019

(4) Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2019). Diagnosegeleitet fördern (online). Dortmund: Mathe inklusiv mit Pikas. Verfügbar unter: pikas-mi.dzlm.de/201, Zugriff am 18.10.2019

(5) Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2019). Hamstern (online). Dortmund: Mathe inklusiv mit Pikas. Verfügbar unter: pikas-mi.dzlm.de/003, Zugriff am 18.10.2019

8 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 18	Christa Penserot	Strukturierung, Nachzeichnen und Beschriften von gesehenen Mustern
Abbildung 19	Angela Buchholz	Schnelles Sehen in Partnerarbeit – wichtig sind die Beschreibungen und Erklärungen
Abbildung 20	Christa Penserot Sventje Marquardt	Mentales oder reales Umstrukturieren zum „besseren Sehen“ und Erklären
Abbildung 21	Angela Buchholz	Beispiele für die Vernetzung von Darstellungsebenen als Grundlage für verstehendes Üben
Abbildung 22	Angela Buchholz	Aufgabenfamilien als Beispiel für die Vernetzung von Inhalten als Grundlage für verstehendes Üben
Abbildung 23	Angela Buchholz	Sortieren und Fortsetzen als Beispiele für die Vernetzung von Inhalten als Grundlage für verstehendes Üben



ISBN 978-3-944541-55-6