



Auf dem Weg zum veränderten Mathematikunterricht in der Grundschule

Teil II



Impressum

Herausgeber:

Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg)
14974 Ludwigsfelde-Struveshof

Tel.: 03378 209-153

Fax: 03378 209-303

Internet: www.lisum.brandenburg.de

Autorinnen und Autoren:

Ute Baumann, Elke Binner, Angelika Möller

© Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg); 2006

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte einschließlich Übersetzung, Nachdruck und Vervielfältigung des Werkes vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des LISUM Bbg in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Eine Vervielfältigung für schulische Zwecke ist erwünscht. Das LISUM Bbg ist eine Einrichtung im Geschäftsbereich des Ministeriums für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (MBS).

Inhalt

0	Vorwort	4
1	Notwendigkeit des Themenfeldes „Daten und Zufall“	5
2	Beziehung zwischen Fachwissenschaft, KMK - Bildungsstandards und Rahmenlehrplan	7
2.1	Kombinatorik.....	7
2.1.1	Rahmenlehrplan zur Kombinatorik	7
2.1.2	Fachlicher Hintergrund - Kombinatorisches Rechnen und Zählstrategien	7
2.2	Beschreibende Statistik	8
2.2.1	Rahmenlehrplan zur beschreibenden Statistik	8
2.2.2	Fachlicher Hintergrund - Elemente der beschreibenden Statistik	10
2.3	Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	11
2.3.1	Rahmenlehrplan zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	11
2.3.2	Fachlicher Hintergrund - Wahrscheinlichkeitsrechnung	13
3	Anregungen für den Unterricht mit Beispielen für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen	14
3.1	Jahrgangsstufen 1/2.....	15
3.2	Jahrgangsstufen 3/4.....	18
3.3	Jahrgangsstufen 5/6.....	20
4	Verwendete Literatur.....	25

0 Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

im Prozess der Implementierung des zum Schuljahr 2004/05 in Kraft getretenen Rahmenlehrplans Mathematik Grundschule nehmen neben Fragen zur Kompetenzentwicklung und zur Erstellung eines schulinternen Fachplans immer wieder Fragen zu veränderten Inhalten des Mathematikunterrichts einen breiten Raum ein.

Dazu wurden vom Landesinstitut für Schulen und Medien Brandenburg Materialien auf den Seiten des Bildungsservers unter www.bildung-brandenburg.de veröffentlicht, die mit diesem Beitrag fortgesetzt werden. Sie finden Ausführungen im Abschnitt „Schulinterne Curricula-Werkstatt“ und die Handreichungen zum Mathematikunterricht im Abschnitt „Ergänzende Materialien zu den Rahmenlehrplänen“. Darin sind Akzentsetzungen in den Themenfeldern des Rahmenlehrplans, zur veränderten Aufgabenkultur und zu ersten Erfahrungen auf dem Weg zur schulinternen Fachplanung Erfahrungsberichte veröffentlicht. Diese Reihe wird mit diesem Beitrag fortgesetzt.

Teil der grundlegenden Bildung ist es, die Schülerinnen und Schüler mit den mathematischen Interpretationsmustern der Welt bekannt zu machen und sie zu befähigen, sich damit auseinander zu setzen. D. h. auch, sie heranzuführen an den Umgang mit Massendaten und zufälligen Ereignissen und sie zu befähigen, auf Daten basierende Entscheidungen treffen und diese begründen zu können. Aus diesem Grund ist das Themenfeld „Daten und Zufall“ in den Rahmenlehrplan Grundschule Mathematik in Brandenburg aufgenommen worden. Es ist besonders geeignet, themenfeldübergreifende Ansätze zu verwirklichen.

In diesem Sinne sollen die folgenden Ausführungen Unterrichtserfahrungen wiedergeben und Impulse für den Auseinandersetzungsprozess der Lehrkräfte - u.a. in den Fachkonferenzen - mit diesem Themenfeld geben.

Dr. Roswitha Röpke

Leiterin der Abteilung Schulentwicklung in den Fächern und Lernbereichen

1 Notwendigkeit des Themenfeldes „Daten und Zufall“

„Die Magie des Zufalls hat jeder schon erlebt – beim „Mensch ärgere dich nicht“ oder beim Lotto...

Um den Zufall angemessen zu erfassen und zu beschreiben, ist eine ganz eigene Art des Denkens gefordert. Im Alltag kommt man kaum dazu, die Erfahrungen bei zufallshaltigen Situationen zu ordnen und zu reflektieren – weit verbreitete Fehlschlüsse bis hin zu Aberglauben bei der Deutung stochastischer Phänomene sind die Folge.

Andererseits ist die Stochastik angewandte Mathematik par excellence:

Nicht auf das Rechnen kommt es an, sondern aufs Modellieren und Interpretieren.“

W. Herget /1/

In unserer Lebensumwelt begegnet uns eine zunehmende Informationsflut, die von uns einen bewussten und kritischen Umgang mit dieser erfordert. Ganze Wissenschaftszweige beschäftigen sich mit der Analyse empirischer Daten, um Vorhersagen auf bestimmten Gebieten zu treffen und Alternativen zu eröffnen. Stochastische Modelle werden gebildet, um in Situationen der Ungewissheit, Entscheidungen zu finden und zu begründen.

Moderne Medien reden von Chancengleichheit und hoher oder niedriger Wahrscheinlichkeit des Eintreffens bestimmter Situationen. Die Werbung preist uns Glücksspiele an, die einen sicheren Gewinn versprechen, bei denen die Chancen zu gewinnen oft weit geringer sind als bei Würfelspielen. Eine Vielzahl von Informationen wird durch Diagramme verschiedenster Art in vielen Veröffentlichungen illustriert. Dabei werden Begriffe verwendet, die oft mit anderen Inhalten verbunden sind als in der Mathematik. Z. B. wird in der Umgangssprache der Zufall als ein selten auftretendes oder außergewöhnliches Ereignis verstanden. Wie gehen wir und unsere Schülerinnen und Schüler mit diesen Aussagen um? Nehmen wir sie hin, weil wir Bestätigungen in unserem Leben dafür finden oder überprüfen wir, welche Bedingungen zu diesen Aussagen geführt haben und ob sie wirklich zutreffen? Eine kritische Haltung gegenüber Daten und ein bewusster Umgang mit ihnen machen unsere Schülerinnen und Schüler zu kompetenten Gestaltern ihrer Lebenssituationen und befördern eine solide mathematische Grundbildung.

Mathematische Grundbildung ermöglicht das Erfassen unserer Lebenswirklichkeit mit mathematischen Augen gesehen, dabei kann man den Aspekt des Zufalls nicht außer Acht lassen. Durch den starken Anwendungsbezug der Stochastik kann der Prozess der Modellbildung realisiert werden. Wir bilden Modelle immer dann, wenn wir Mathematik in Beziehung zu unserer sozialen und natürlichen Umwelt bringen, wenn wir Sachrechnen betreiben. Stochastische Aufgabenstellungen bergen geheimnisvolle und spannende Probleme, die nicht sofort und gradlinig lösbar sind. Dadurch machen sie neugierig und erhalten einen starken Aufforderungscharakter. Sie sind geeignet innermathematische Verknüpfungen zu realisieren.

Der Arbeitskreis Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik gibt dazu folgende Empfehlung: „Die Arbeit mit Daten und auf Daten aufbauende Modellbildung können als Unterrichtsprinzip in verschiedenste Gebiete des Mathematikunterrichts integriert werden. Damit Schülerinnen und Schüler lernen, Daten sachgerecht zu interpretieren und nach Zusammenhängen in Daten suchen zu können, sollten möglichst reale Daten aus dem Umfeld der Schülerinnen und Schüler verwendet werden. Wie im Mathematikunterricht allgemein ist es insbesondere auch im Stochastikunterricht nicht sinnvoll, zuerst alle benötigten Begriffe und Verfahren einzuführen und dann zu komplexen Anwendungen überzugehen. Stattdessen sollte man von Anfang an Anwendungen und Projekte in den Unterricht einbeziehen. Solche „Anfangsbegegnungen“ sollten besonders ansprechend, typisch und einprägsam sein.“ /2/

Mit dem Einfügen des neuen Themenfeldes „Daten und Zufall“ in den Rahmenlehrplan wurde diesen Überlegungen Rechnung getragen. Neben den Elementen der beschreibenden

Statistik und der Kombinatorik nehmen die Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit in allen Jahrgangsstufen einen festen Platz ein. Sind diese doch in besonderem Maße dazu geeignet, das Modellieren, Argumentieren und Kommunizieren zu befördern und ein Verständnis davon zu entwickeln, dass es im Mathematikunterricht nicht nur um die Frage geht, welche Lösungen richtig oder falsch sind, sondern auch darum, welche Lösungen überhaupt möglich sind.

2 Beziehung zwischen Fachwissenschaft, KMK - Bildungsstandards und Rahmenlehrplan

In diesem Kapitel werden die im Rahmenlehrplan beschriebenen Standards und Anforderungen des Themenfeldes Daten und Zufall und die KMK - Bildungsstandards den fachwissenschaftlichen Inhalten der Stochastik gegenübergestellt. Die fachwissenschaftlichen Inhalte werden mit Beispielaufgaben veranschaulicht. Dieses Kapitel hat das Ziel, Lehrkräften Hilfestellung zu geben, den propädeutischen Charakter des Themenfeldes Daten und Zufall durch Vergleich herauszuarbeiten. Andererseits können Lehrkräfte ihren fachwissenschaftlichen Fortbildungsbedarf konkretisieren.

2.1 Kombinatorik

2.1.1 Rahmenlehrplan zur Kombinatorik

Themenfeldübersicht

„Bei einfachen kombinatorischen Aufgaben geht es um Möglichkeiten der Auswahl und/oder der Anordnung von bestimmten Objekten. Sie erwerben Fähigkeiten zur Ausführung systematischer Probiervverfahren für das Auffinden von Möglichkeiten und lernen dazu hilfreiche Darstellungsweisen kennen.“ (vgl. /3/ S.30)

Anforderungen/ Standards

Jahrgangsstufen 1/ 2	Jahrgangsstufen 3/ 4	Jahrgangsstufen 5/ 6	Standards am Ende der Jahrgangsstufe 4	KMK Bildungsstandards	Standards am Ende der Jahrgangsstufe 6
... einfache kombinatorische Aufgaben lösen			...lösen einfache kombinatorische Aufgaben	Einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen	... lösen kombinatorische Aufgaben

2.1.2 Fachlicher Hintergrund - Kombinatorisches Rechnen und Zählstrategien

• Anordnungen	Permutationen (alle Elemente)	ohne Wiederholung	Anziehaufgaben Ziffern – Zahlbildung (Jede Zusammenstellung in irgendeiner Anordnung) Anordnungen von Flächen und Körpern
		mit Wiederholung	Ziffern - Zahlbildung (Zahlen aus 2 x Ziffer 1 und 3 x Ziffer 8)

	Kombinationen (k aus n Elementen)	Ohne Wiederholung	Wie viele Zahlen lassen sich aus vier verschiedenen Ziffern bilden? (Jede Ziffer darf nur einmal in jeder Zahl auftreten)
		mit Wiederholung	Palindrome (Anna-Zahlen)
	Anordnung beliebig	ohne Wiederholung	6 aus 49
		mit Wiederholung	Aus einem Topf drei Kugeln ziehen
• Zählstrategien	Geordnete Auswahl	ohne Wiederholung	Im Topf sind sieben Kugeln – zwei sollen entnommen werden (ohne zurücklegen)
		mit Wiederholung	Im Topf sind sieben Kugeln – zwei sollen entnommen werden (mit zurücklegen)
	Ungeordnete Auswahl		

2.2 Beschreibende Statistik

2.2.1 Rahmenlehrplan zur beschreibenden Statistik

Themenfeldübersicht

„Im Rahmen der beschreibenden Statistik befassen sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Ermitteln, Darstellen und Auswerten von Daten. Sie gewinnen die Einsicht, dass und unter welchen Bedingungen Ergebnisse verschiedener Untersuchungen vergleichbar werden. Sie erwerben Fähigkeiten zum Lesen und Erstellen von Grafiken und lernen dabei, funktionale Zusammenhänge zwischen den darzustellenden Größen zu erkennen und zu verstehen. Die Schülerinnen und Schüler erleben, dass Daten unter verschiedenen Aspekten zu untersuchen sind. Sie erfahren, dass oft mehr als eine Schlussfolgerung erlaubt ist und unterschiedliche Interpretationen kritisch zu reflektieren sind.“

(vgl. /3/ S.31)

	Anforderungen	Inhalte
Jahrgangsstufen 1 / 2	<ul style="list-style-type: none"> – Daten erfassen, aufbereiten und darstellen – aus Bildern, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen und Aussagen dazu treffen 	Tabelle Strichliste Streifendiagramme durch Ausmalen von Rechenkästchen ↗↗ Größen und Messen ↗ Sachunterricht
Jahrgangsstufen 3/ 4	<ul style="list-style-type: none"> – Methoden zur Datenerfassung auswählen – Daten erfassen, aufbereiten und darstellen – Daten sachgerecht interpretieren und kritisch reflektieren – verschiedene Darstellungen, auch des gleichen Sachverhalts, miteinander vergleichen 	<i>Befragungen in der Schule (schriftlich, mündlich), Beobachtungen, Recherchen in verschiedensten Medien</i> Schaubilder, Strecken- und Streifendiagramme <i>Baumdiagramme</i> ↗↗ Größen und Messen
Standards am Ende der Jahrgangsstufe 4	<ul style="list-style-type: none"> – erfassen Daten aus Sachtexten und Sachsituationen und stellen sie in unterschiedlicher Weise dar – entnehmen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen und interpretieren diese 	
KMK Bildungsstandards	<ul style="list-style-type: none"> – in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen – aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen 	
Jahrgangsstufen 5/ 6	<ul style="list-style-type: none"> – einschätzen, welche Daten zur Problembearbeitung notwendig sind – Methoden zur Datenerfassung – Daten aufbereiten, darstellen, sachgerecht interpretieren und adressatengerecht präsentieren 	Erhebung von Daten ↗ Geografie, Physik* Formen zur Datenaufbereitung Arithmetisches Mittel ↗↗ Zahlen und Operationen
Standards am Ende der Jahrgangsstufe 6	<ul style="list-style-type: none"> – erfassen Daten, stellen sie sachgerecht dar und interpretieren sie – entnehmen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen und interpretieren diese – verstehen, dass die Aussagekraft von Daten von der Art der Datenerhebung und der Datenverarbeitung abhängt 	

2.2.2 Fachlicher Hintergrund - Elemente der beschreibenden Statistik

Statistik			
Beschreibende Erfassen Ordnen Zusammenstellen		Beurteilende Analysieren Auswerten Aufstellen von Hypothesen	
• Erfassen und auswerten	Daten/ Ergebnisse	Absolute Häufigkeit Relative Häufigkeit	Urliste und erste Form – Strichliste Bsp. fünf Würfe mit der Augenzahl 6 Bsp. fünf von 50 Würfeln mit der Augenzahl 6 \Rightarrow 6/50
	Grafische Darstellungen		Streckendiagramm Balkendiagramm/Streifendiagramm Kreisdiagramm
• Kenngrößen		Mittelwert (von Ausreißern bestimmt) Zentralwert (in der Mitte) Modalwert (häufigste) Spannweite/Streubreite	

2.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.3.1 Rahmenlehrplan zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Themenfeldübersicht

Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit werden zumeist an die Durchführung von Spielen gebunden. In diesem Zusammenhang gewinnen Schülerinnen und Schüler auch Erfahrungen mit einfachen Zufallsexperimenten. Dabei lernen sie Charakteristika einzelner Zufallsgeräte kennen und sicher mit diesen umzugehen. Die experimentell gewonnenen Ergebnisse werden zusammengetragen, als Datenbasis veranschaulicht und gedeutet. Die Schülerinnen und Schüler reflektieren Spielverläufe unter verschiedenen Aspekten.

In den Jahrgangsstufen 1/2 steht das Erfassen und Akzeptieren verschiedener Spielausgänge im Vordergrund.

In den Jahrgangsstufen 3/4 beginnen Überlegungen darüber, ob alle Spieler die gleichen Chancen haben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, beim Spiel zu gewinnen oder zu verlieren und wie man seine Gewinnchancen verbessern kann. Die Schülerinnen und Schüler verstehen die Wahrscheinlichkeit als ein Maß dafür, wie sicher mit dem Eintreten eines Ereignisses gerechnet werden kann. Sie gehen auf einer naiven Ebene mit Begriffen wie Chance, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit oder Gewinnmöglichkeit um, ohne dafür mathematische Definitionen zu erfahren.

Zu diesem inhaltlichen Verständnis gelangen die Schülerinnen und Schüler nicht nur über spielerische Tätigkeiten, sondern auch über die Beschreibung von Alltagssituationen mit Hilfe von Begriffen wie *wahrscheinlich*, *unwahrscheinlich*, *sicher*, *möglich* und *unmöglich*. (vgl. /3/ S.31)

	Anforderungen	Inhalte
Jahrgangsstufen 1 / 2	<ul style="list-style-type: none"> – in Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt zufällige Ereignisse finden – den Ereignissen Begriffe zuordnen 	<p>Spiele</p> <p>Verständnis von Wahrscheinlichkeit: ist möglich (aber nicht sicher), ist sicher, ist unmöglich</p> <p>↗↗ Zahlen und Operationen</p>
Jahrgangsstufen 3/ 4	<ul style="list-style-type: none"> – einfache Zufallsexperimente planen, durchführen und dokumentieren – Versuchsreihen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen – Anordnungen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen 	<p>Zufallexperimente</p> <p>Genauso wahrscheinlich wie, die Chance ist größer als, kommt häufiger vor als</p> <p>↗↗ Zahlen und Operationen</p>
Standards am Ende der Jahrgangsstufe 4	<ul style="list-style-type: none"> – vergleichen Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ergebnissen und verwenden die Begriffe „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ 	
KMK Bildungsstandards	<ul style="list-style-type: none"> – Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) – Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z.B. Würfelspielen) einschätzen 	
Jahrgangsstufen 5/ 6	<ul style="list-style-type: none"> – Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Bruchdarstellung angeben und vergleichen – theoretisch ermittelte Wahrscheinlichkeiten mit dazu empirisch ermittelten Häufigkeiten vergleichen – Bedingungen von Zufallsexperimenten analysieren, verändern und Auswirkungen beschreiben und einschätzen 	<p>Angabe von Wahrscheinlichkeiten in Form von Brüchen</p> <p>↗↗ Zahlen und Operationen</p> <p>Veränderungen an Zufallsgeräten</p> <p>Gerechtigkeit von Spielen, Gewinnchancen</p>
Standards am Ende der Jahrgangsstufe 6	<ul style="list-style-type: none"> – ermitteln und vergleichen Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ergebnissen – führen Zufallsexperimente durch, können deren Bedingungen analysieren und Auswirkungen von Bedingungsänderungen einschätzen 	

2.3.2 Fachlicher Hintergrund - Wahrscheinlichkeitsrechnung

<p>Vorgänge mit zufälligen Ergebnis – zufällige Ereignisse</p>	<p>sicheres Ereignis – alle Ergebnisse sind günstig unmögliches Ereignis – kein Ergebnis ist günstig Elementarereignis – genau 1 ist günstig</p>	<p>Vorgang heißt bzgl. eines bestimmten Merkmals zufällig – mehrere Ergebnisse</p> <p>Zufallsexperiment:</p> <ul style="list-style-type: none"> - mehrere mögliche Ergebnisse - zwei Ergebnisse können nicht gleichzeitig eintreten - Ergebnis kann nicht vorausgesagt werden <p>Experiment kann beliebig oft wiederholt werden</p>
<p>Elementarer Wahrscheinlichkeitsbegriff</p>	<p>Absolute Häufigkeit Relative Häufigkeit</p>	<p>mehrmaliges Wiederholen Große Stichprobe</p> <ul style="list-style-type: none"> • Schwankungen um einen festen Wert (stabil werden) – Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses <p>Anzahl der günstigen Ereignisse Anzahl der möglichen Ereignisse</p>
<p>Mehrstufige Zufallsversuche</p>	<p>Abhängigkeit/ Unabhängigkeit von Ereignissen Simulation (Nachahmen)</p>	<p>⇒ Baumdiagramme – Münze werfen ⇒ Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten</p> <p>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln eine gerade Zahl gewürfelt wird? $P(E) = P(2) + P(4) + P(6)$</p> <p>⇒ Pfadregel - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wappen dreimal fällt?</p> <ul style="list-style-type: none"> - Produkt- /Summenregel - Wahrscheinlichkeit, dass zweimal hintereinander die Zahl 5 fällt

3 Anregungen für den Unterricht mit Beispielen für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen

Kombinatorisches Rechnen (auch Zählstrategien) und Elemente der beschreibenden und beurteilenden Statistik sind für Lehrkräfte vertraute Unterrichtsinhalte. Das gilt für Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit nicht gleichermaßen. Deshalb sei hier exemplarisch nur auf diesen Teilbereich der Stochastik eingegangen.

Die nachfolgenden Unterrichtsbeispiele sind gleichartig aufbereitet. Es werden Aufgaben/Aufträge formuliert und diesen mögliche Schülertätigkeiten zugeordnet. Die zugehörigen Anforderungen weisen diejenigen Sachkompetenzen aus, welche die Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Tätigkeiten erwerben.

Für jede Doppeljahrgangsstufe werden zwei Beispiele angeführt, die sich jeweils auf die gleichen Zufallsgeneratoren beziehen. Es handelt sich um Würfel und Kartenspiele. Diese sind den Schülerinnen und Schülern gut vertraut und deshalb neben anderen Zufallsgeneratoren in allen Jahrgangsstufen zur Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeiten geeignet.

Die dargestellten Unterrichtssituationen konkretisieren die nachfolgend angeführten fachdidaktischen Positionen.

Schülerinnen und Schüler können auf statistisch - empirischem Weg und klassisch - kombinatorischem Weg an den Begriff der Wahrscheinlichkeit herangeführt werden. Beide Wege schließen einander nicht aus und können auch nebeneinander genutzt werden.

Der statistisch - empirische Weg bietet allen Schülerinnen und Schülern aller Jahrgangsstufen die Möglichkeit, aktiv entdeckend zu lernen (enaktive Ebene). Das bildliche bzw. sprachliche Darstellen der Ergebnisse, (ikonischen bzw. symbolischen Ebene) wird von Anfang an geschult.

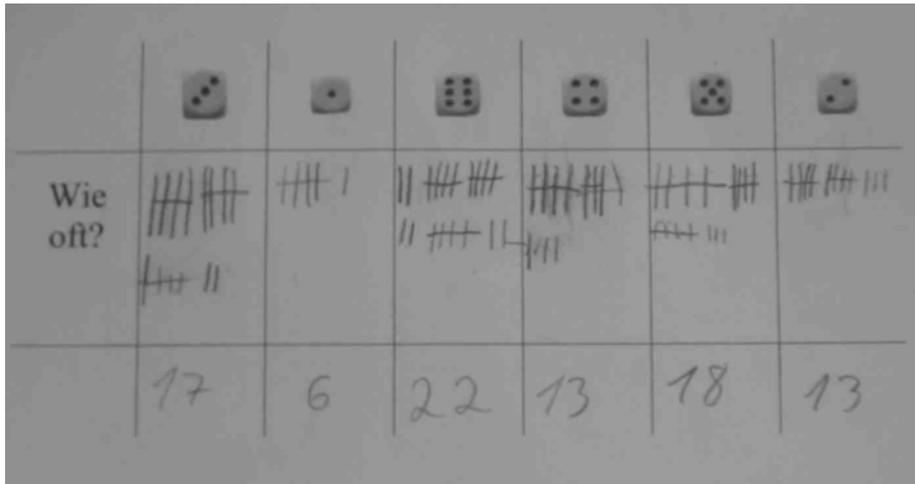
Beim klassisch-kombinatorischen Weg besteht die Chance zwischen den Repräsentationsebenen zu wechseln und damit das Modellieren zu schulen.

3.1 Jahrgangsstufen 1/2

Die Kinder werden sich durch spielerisch-experimentelles Tätigsein der Existenz zufälliger Vorgänge bewusst. Sie erahnen die Bedeutung von Zufall und Wahrscheinlichkeit, ohne zugehörige Fachbegriffe zu verwenden.

Beispiel 1

Aufgabe	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen																					
Jana sagt: „Immer würfle ich eine Zwei. Hab ich ein Pech.“ Hat Jana Recht?	Die Schülerinnen und Schüler vermuten und begründen aus ihren Erfahrungen heraus.	Sie erkennen, dass Würfeln ein Vorgang mit zufälligen Ergebnissen ist .																					
Würfelt so wie Jana mindestens zwanzigmal. (Partnerarbeit, Gruppenarbeit) Schreibt eure Ergebnisse in eine Strichliste.	In der experimentellen Phase einigen sich die Schülerinnen und Schüler über ihr Vorgehen, einer würfelt, der andere führt die Strichliste und umgekehrt o. ä.	Die Schülerinnen und Schüler ermitteln absolute Häufigkeiten, ohne den mathematischen Begriff zu verwenden. Sie erstellen eine Häufigkeitstabelle (Strichliste). ➔ soziale Kompetenzen																					
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20%;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Wie oft?</td> <td></td> <td>IIII</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>								Wie oft?		IIII							4						
																							
Wie oft?		IIII																					
		4																					
Schreibe dazu, wie oft du jede Zahl gewürfelt hast.	Die Schülerinnen und Schüler ordnen ihren Ergebnissen in der Strichliste Ziffern zu.	Zahlen werden unterschiedlich dargestellt.																					
Stellt euer Ergebnis vor. Vergleiche mit euren Mitschülerinnen und Mitschülern. Errechnet die Anzahl der Würfe pro Augenzahl an eurem Arbeitstisch. Impuls: Könnt ihr ein Klassenergebnis nennen?	Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die Anzahl in verschiedenen Darstellungen. Sie entdecken, wie man die Gesamtzahl der Würfe ermitteln und kontrollieren kann.	In der Kommunikation werden die ermittelten absoluten Häufigkeiten in Relation zu anderen ermittelten Häufigkeiten gesetzt. Es wird ein zaghaftes erstes Verständnis für das empirische Gesetz der großen Zahlen entwickelt.																					



Ergebnis einer Schülergruppe

Hat Jana Recht?	Im Unterrichtsgespräch wird auf die Ausgangsfrage und auf die Vermutungen zurückgeführt. Es erfolgt eine Auswertung des Experiments. Die Schülerinnen und Schüler bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen und können schlussfolgern, ob Jana wirklich Pech hat oder ob andere Bedingungen Ursache dafür sein können.	Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit konkreten Beispielen, dass Ergebnisse, hier die verschiedenen Augenzahlen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreffen und es zufällig zu Abweichungen zur Gleichwahrscheinlichkeit kommt. Sie erkennen, dass man für zufällige Vorgänge das Eintreffen der Ergebnisse mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorhersagen kann.
Woran kann es liegen, dass Jana so häufig eine Zwei würfelt?	Vergleich von im Experiment ermittelten Häufigkeiten	Statistisch- empirische Annäherung an den Wahrscheinlichkeitsbegriff

Mögliche Aufgabenvariation:

- eine andere Augenzahl wählen
- Anzahl der Würfe/Züge verändern
- Farbwürfel oder andere Würfel benutzen, z. B. Schulwürfel oder sechsflächigen Würfel, der mit 1, 1, 2, 3, 3, 4 beschriftet ist
- Ziffernkarten, Bildkarten, Lose u.ä. zufällig ziehen
- Häufigkeiten in einfachen Diagrammen durch Ausmalen von Rechenkästchen darstellen

Beispiel 2

Aufgaben	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen																		
<p>In einer Schachtel liegen die Ziffernkarten (0 bis 9). Jens und Björn ziehen ohne Hinzusehen zwei Ziffernkarten gleichzeitig heraus. Sie bilden daraus zweistellige Zahlen.</p> <p>Zum Beispiel:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">4</td> </tr> </table>	8	4	<p>Zur Erfassung des Sachverhalts führen die Schülerinnen und Schüler den Versuch mehrfach aus.</p>	<p>Sie erkennen die jeweils gezogenen Kartenpaare als zufällige Ergebnisse. Sie erfassen, dass die Bildung der zweistelligen Zahlen abhängig ist von den gezogenen Ziffernkarten. Die Schülerinnen und Schüler stellen einen Zusammenhang zur Zahlenbildung her.</p>																
8	4																			
<p>Welche Zahlen können Jens und Björn bilden? Kreise ein.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">36</td> <td style="padding: 5px;">70</td> <td style="padding: 5px;">66</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 5px;">51</td> <td style="padding: 5px;">92</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 5px;">48</td> <td style="padding: 5px;">27</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">16</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 5px;">33</td> <td style="padding: 5px;">100</td> </tr> </table> <p>Warum können die anderen Zahlen nicht gebildet werden?</p>	36	70	66		51	92		4			48	27	16				33	100	<p>Die Schülerinnen und Schüler führen hier das Experiment nicht selbst aus, sondern hinterfragen die vorgegebenen Ergebnisse und suchen nach Begründungen dafür, ob es möglich ist, diese Zahlen zu bilden oder nicht.</p>	<p>Sie überprüfen Lösungen und begründen mathematische Zusammenhänge. Die Schülerinnen und Schüler ordnen den Ergebnissen die Begriffe „ist möglich“ und „ist nicht möglich“ zu. Es bildet sich eine inhaltliche Vorstellung von Zufall.</p>
36	70	66																		
	51	92																		
	4																			
	48	27																		
16																				
	33	100																		
<p>Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen können Jens und Björn bilden? Welche ist die kleinste, welches ist die größte Zahl?</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler können auf unterschiedlichen Darstellungsebenen arbeiten. Es ist möglich die Zahlenpaare mit Ziffernkarten zu legen (enaktiv) oder gleich mit Ziffern zu schreiben (symbolisch).</p>	<p>Es werden kombinatorische Aufgaben gelöst.</p>																		
<p>Kreuze die richtige Antwort an.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Es ist möglich 55 zu bilden. - Es ist möglich 83 zu bilden. - Es ist möglich 7 zu bilden. 	<p>Die Schülerinnen und Schüler arbeiten auf der symbolischen Ebene. Ohne auf die enaktive Ebene zurückgehen zu müssen, schätzen sie ein, welche Ergebnisse „möglich“ und welche „unmöglich“ sind.</p>	<p>Erfahrungen bezüglich der Voraussage von zufälligen Ergebnissen werden angewendet und verallgemeinert. Erkenntnisse bezüglich der Zahlbildung fließen ein.</p>																		

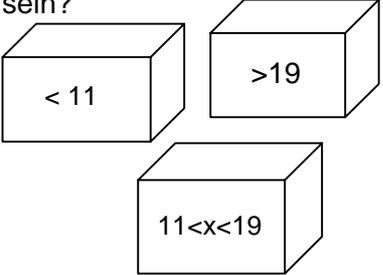
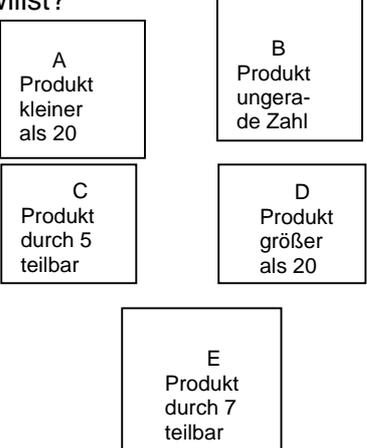
Mögliche Aufgabenvariation:

- Bildkarten (Domino), Farbstifte u. a. aus Säckchen ziehen
- zum Hinterfragen Dominopaare oder ausgemalte Motive (Blumen, Fähnchen usw.) vorgeben
- die Anzahl der verdeckt liegenden Elemente verändern
- Gegenstände mit Zurücklegen nacheinander ziehen, dazu ein Baumdiagramm zeichnen

3.2 Jahrgangsstufen 3/4

Die Kinder erarbeiten sich durch die Analyse von Zufallsexperimenten Einsichten in grundlegende Begriffe und Aussagen zur Wahrscheinlichkeit. Eine wichtige Position nehmen Erörterungen über gerechte oder ungerechte Spiele ein.

Beispiel 1

Aufgaben	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen
<p>Würfle zweimal. Bilde das Produkt. Welches ist das größtmögliche, welches das kleinstmögliche Produkt?</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler „erwürfeln“ sich das Ausgangsmaterial für die weiteren Betrachtungen. Sie erfassen die Spannweite der möglichen Produkte und entdecken dabei die Verteilung der möglichen Produkte.</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler berechnen sicher Produkte und vergleichen Zahlen. Sie lösen einfache Kombinationen. Sie können begründen, warum sie das größtmögliche und kleinstmögliche Produkt gefunden haben.</p>
<p>Würfle mit zwei Spielwürfeln gleichzeitig. Bilde das Produkt der Augenzahlen. Ordne deine Produkte in die Kästen ein. Vermute, in welchen Kästen werden die meisten Produkte sein?</p> 	<p>Die Schülerinnen und Schüler stellen Vermutungen über den Ausgang ihres Experiments an. Sie führen das Experiment durch und stellen ihre Vermutungen und ihr Ergebnis vergleichend gegenüber.</p>	<p>Sie planen ein einfaches Zufallsexperiment, führen es durch und stellen ihrer Lösungsprozesse dar. Sie nutzen die Versuchsreihe, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen.</p>
<p>Verändere die Beschriftung der Kästen, so dass in jedem Kästchen gleich viele Produkte sein können.</p>	<p>Wenn die Schülerinnen und Schüler einen Zusammenhang zur ersten Übung herstellen, finden sie die Veränderung der Beschriftung in $<7, >17, 7 < x < 17$ heraus.</p>	<p>Dabei erkennen sie mathematische Zusammenhänge und begründen, warum sie die Beschriftung so ändern.</p>
<p>Welche Spielregel wählst du aus, wenn du gewinnen willst?</p> 	<p>Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler herausfinden, welche Chance in jeder Spielregel steckt. Bei der Begründung der Auswahl können u. a. Formulierungen wie: „Bei Regel A gewinne ich in fünfzehn von einundzwanzig Fällen.“ „Bei Regel E gewinne ich in keinem Fall“ oder „Es ist unmöglich bei Regel E zu gewinnen“ gewählt werden. Im Unterrichtsgespräch formulieren Schülerinnen und Schüler andere Spielregeln.</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler überprüfen Lösungen und schätzen Vorgehensweisen von Mitschülerinnen und Mitschülern ein. Dazu vergleichen sie Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ergebnissen und begründen ihre Vergleiche.</p>

Beispiel 2

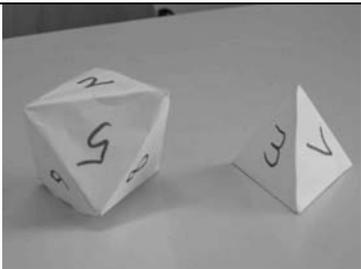
Aufgaben	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen
In einer Schachtel liegen die Ziffernkarten (0 bis 9). Jens und Björn ziehen ohne Hinzusehen drei Ziffernkarten gleichzeitig heraus. Sie bilden daraus dreistellige Zahlen.		Die Schülerinnen und Schüler verstehen die Fachsprache und wenden sie an.
Ist es möglich die Zahl 333 zu bilden?		Die Schülerinnen und Schüler erkennen mathematische Zusammenhänge und überprüfen Lösungen. Sie verwenden die Begriffe „möglich“ und „ist nicht möglich“ exakt.
Gemeinsam stellen sie Spielregeln auf. Jens gewinnt, wenn er eine Zahl, die kleiner als 400 ist, bilden kann. Björn gewinnt, wenn er eine Zahl, die größer als 400 ist, bilden kann. Ist das Spiel gerecht? Begründe.	Abwägen von Chancen durch den Vergleich von Möglichkeiten.	klassisch - kombinatorischer Weg der Annäherung an den Wahrscheinlichkeitsbegriff Begriffsklärung: „gerechtes Spiel“
Erfinde für das Spiel Regeln, so dass alle Mitspieler, die gleiche Chance haben zu gewinnen.	Kinder beschreiben Spielregeln und diskutieren diese.	einfache Zufallsexperimente planen, durchführen und dokumentieren, bewerten der Ergebnisse unter der Sicht der Chance ihres Auftretens.
Erfinde ein Spiel für welches deine Mitschülerinnen und Mitschüler herausfinden sollen, ob es gerecht ist.	Kinder führen die von Mitschülerinnen und Schülern entworfenen Spiele aus, erfassen die Ergebnisse und analysieren diese hinsichtlich ihrer Relevanz für die Aufgabenstellung.	Versuchsreihen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen

Ein weiteres Beispiel dazu ist das Wurmspiel - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Daten und Zufall (vgl. /6/ S.17 ff).

3.3 Jahrgangsstufen 5/6

„Die Schülerinnen und Schüler ermitteln und vergleichen Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ergebnissen auch mithilfe der gebrochenen Zahlen. Sie führen Zufallsexperimente durch, können deren Bedingungen analysieren und Auswirkungen von Bedingungsänderungen einschätzen.“ (vgl. /3/ S.22)

Beispiel 1

Aufgaben	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen
Die Schülerinnen und Schüler bauen ein Tetraeder und einen Oktaeder aus einem selbstkonstruierten Netz. Sie beschriften die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 4, bzw. von 1 bis 8.		Die Kinder lernen Charakteristika einzelner Zufallsgeräte kennen und sicher mit diesen umzugehen.
Würfle zwanzigmal mit dem Tetraeder. Vermute, wie das Ergebnis sein wird. Dokumentiere dein Experiment in einer Strichliste. Vergleiche deine Vermutung mit dem Ergebnis.	Im Anschluss an die selbständige Arbeit stellen die Schülerinnen und Schüler ein Klassenergebnis zusammen und interpretieren dieses. Dabei erkennen sie eine Annäherung an die Gleichverteilung, finden aber auch heraus, dass Klebefalzen an drei von sechs Kanten des Tetraeders die Gleichverteilung verschieben können.	Die selbst ermittelten absoluten Häufigkeiten werden in Relation zu von anderen ermittelten Häufigkeiten gesetzt. Es wird Verständnis für das empirische Gesetz der großen Zahlen entwickelt.
Das Experiment wird mit dem Oktaeder durchgeführt.	Vgl. untenstehende Schülerinnen und Schülerarbeiten	Die Schülerinnen und Schüler planen, verwirklichen und dokumentieren das Experiment selbständig. Sie nutzen die Versuchsreihen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen.



Aufzeichnungen von Paul, Klasse 6

Vermutung: Ich glaube alle Zahlen haben die gleiche Chance gewürfelt zu werden.

1	2	3	4	5	6	7	8

Vergleich der Vermutung: Jede Zahl von 1-8 wurde mindestens einmal geworfen. Also war meine Vermutung richtig, jede Zahl hat die Chance gewürfelt zu werden. Gut!

Aufzeichnungen von Dagmara, Klasse 6

<p>Würfelt nun zuerst mit dem Tetraeder und dann mit dem Oktaeder. Bildet die Summe der Augenzahlen. Interpretiert.</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Partnerarbeit und kleinen Gruppen selbständig.</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler stellen ihren Lösungsprozess dar und reflektieren diesen im Vergleich zum vorhergehenden Experiment. D.h., sie planen und führen das Experiment durch und reflektieren Bedingungsänderungen.</p>
---	--	--

Vermutung: ~~alle werden gleich oft gewürfelt~~
die Zahlen 4 bis 10 werden am häufigsten gewürfelt

Vergleich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	5	1	3	3	1	2	3	1	1

ja, es stimmt weil die Zahl 4, 2, 3, 11, 12 schwer zu Würfeln sind

Aufzeichnungen von Leo, Klasse 6

Vermutung: Die 1 kann gar nicht gewürfelt werden. Die meisten Chancen haben 6, 8, 10.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

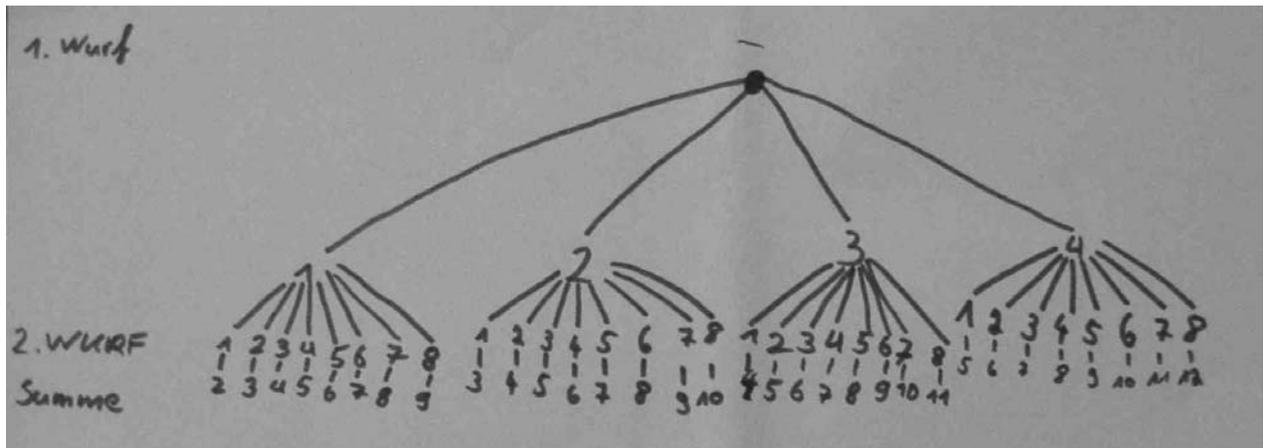
Vergleich: Die 6 hat am meisten, weil sie unter anderem die größte Chance hat z.B. 3+3, 2+4, 1+5, 4+2, 5+1.

Aufzeichnungen von Friedrich, Klasse 6

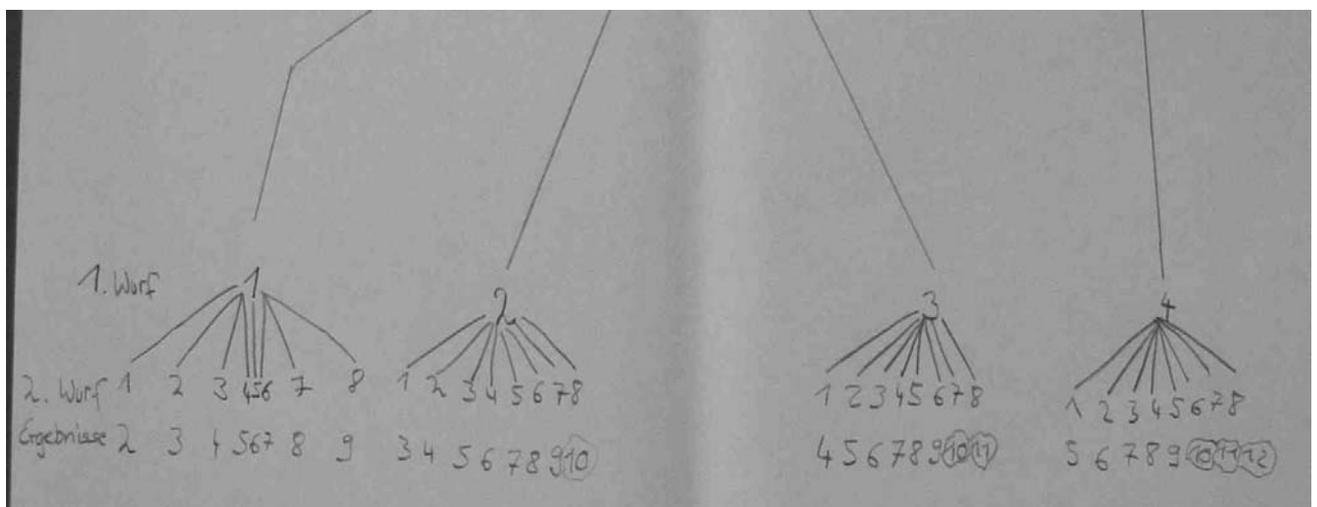
Als Impuls wurde von der Lehrkraft gegeben: Versucht ein Baumdiagramm zu zeichnen.

Im Auswertungsgespräch zum Experiment warfen die Schülerinnen und Schüler selbst die Frage auf, wie man vollständig begründen kann, welche Chancen jede Summe hat.

Die Schülerinnen und Schüler verwenden die Darstellungsform Baumdiagramm.

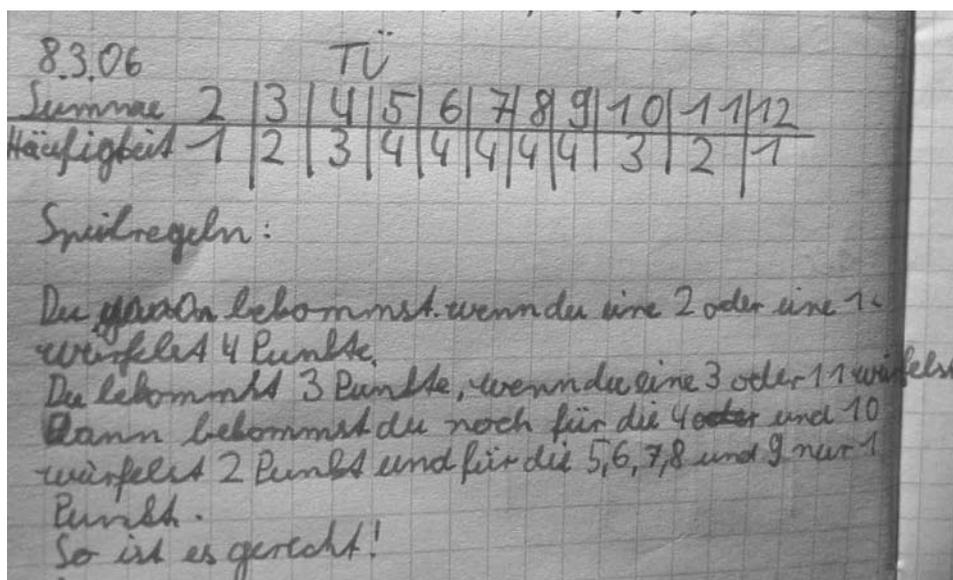


Aufzeichnungen von Robert und Leonard, Klasse 6



Aufzeichnungen von Domenika und Dajana, Klasse 6

	Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es 32 verschiedene Möglichkeiten gibt, die Summanden zu erwürfeln. Aber es gibt nur 11 verschiedene Augensummen, die berechnet werden können. Dabei entdecken sie die Pfadregel und wenden ihre Rechenfertigkeiten mit gebrochenen Zahlen an.	Die Schülerinnen und Schüler stellen Wahrscheinlichkeiten mit gebrochenen Zahlen dar.
Spielregeln wurden vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler wählten begründet aus, welche Spielregel die größte Gewinnchance bietet.	Die Schülerinnen und Schüler formulieren eigene Spielregeln und schätzen die Gewinnchancen ein.	Sie planen und führen ein Experiment durch und reflektieren Auswirkungen von Bedingungsänderungen. Sie verstehen die Wahrscheinlichkeit als ein Maß dafür, wie sicher mit dem Eintreten eines Ereignisses gerechnet werden kann.



Aufzeichnungen von Friedrich, Klasse 6

Mögliche Aufgabenvariation:

- mit ungewöhnlichen Würfeln (sechsmal die Ziffer 3 oder dreimal die Ziffer 5 und dreimal die Ziffer 1 u. ä.) würfeln und dazu gerechte Spielregeln finden
- mit einem „Schulwürfel“ (Dekaeder) würfeln
- mit Quadern würfeln
- nur Würfelnetze vorgeben

Beispiel 2

Aufgaben	Schülertätigkeiten	Anforderungen/ Standards/Zielstellungen
Vier Kinder spielen das Kartenspiel „17 und 4“.	Zunächst lernen die Schülerinnen und Schüler die Spielregeln des Spiels kennen und spielen einige Runden, um mit dem Spielverlauf vertraut zu werden.	Die Kinder lernen Charakteristika einzelner Zufallsgeräte kennen und sicher mit diesen umzugehen.
Wie groß ist die Chance beim Geben der ersten beiden Karten die Punktzahl 21 zu überschreiten? Wie groß ist die Chance genau 21 zu erhalten?	Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler die Zusammensetzung des Kartenspiels (je Spielfarbe acht Karten) und die Werte der einzelnen Karten (Bube 2, Dame 3, König 4, Ass 11 und Zahlen 7, 8, 9, 10) kennen.	Die Schülerinnen und Schüler übersetzen Sachprobleme in die Sprache der Mathematik und stellen Wahrscheinlichkeiten mit gebrochenen Zahlen dar.
Wie viele und welche Karten kann man im günstigsten Fall auf der Hand haben, ohne zu verlieren?	Die Schülerinnen und Schüler verwenden ihre Kenntnisse über die Werte der Karten.	Die Schülerinnen und Schüler lösen kombinatorische Aufgaben.
Kati bekommt zuerst eine 7 und einen König. Sven bekommt eine 7 und eine 9, Timo ein Ass und einen Buben und Anne eine 7 und eine 8. Wer von den Vieren wird nicht lange zögern eine dritte Karte aufzunehmen? Warum? Wie groß sind die Chancen von Kati, Sven, Timo und Anne noch eine Runde im Spiel zu bleiben?	Die Schülerinnen und Schüler finden zunächst heraus, welchen Wert jeder Mitspieler auf der Hand hat und welche Karten noch im Spiel sind. Die Anzahl setzen sie in Beziehung zu der Gesamtzahl der verbleibenden Karten. Bei der Begründung können neben mathematischen Argumenten auch andere Argumente benannt werden.	Sie ermitteln und vergleichen Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ergebnissen, indem sie die Wahrscheinlichkeiten mithilfe gebrochener Zahlen darstellen und vergleichen.
Die Vier sind mutig und nehmen eine dritte Karte. Zufällig erhalten alle eine Dame. Wie verändern sich die Chancen, noch eine Runde im Spiel zu bleiben?		Sie schätzen die Auswirkungen von Bedingungsänderungen ein.

Mögliche Aufgabenvariation:

- einen realen Spielverlauf aufschreiben und kommentieren
- die Anzahl der Mitspieler verändern

4 Verwendete Literatur

/1/ W. Herget, 2004, Materialsammlung SINUS

/2/ Arbeitskreis Stochastik in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., Herbstsitzung 2002

/3/ Rahmenplan Grundschule Mathematik. Herausgeber:
Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg; (2004)

/4/ Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (KMK) vom 15.10.2004
Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4), unter:
www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm

/5/ Prof. Herbert Kütting, 1994, Didaktik der Stochastik (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik; Bd.23) – Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich: BI-Wiss.-Verlag, 1994

/6/ Dorit Steinborn, 2005, Mathematik Grundschule, Illustration der Themenfelder des neuen Rahmenlehrplans und der KMK-Bildungsstandards für die Jahrgangsstufe 4, Senatsverwaltung für Bildung Jugend und Sport Berlin
