Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Beispielaufgaben Mathematik
Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1 für Prüflinge

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	255 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.
Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden spätestens nach 45 Minuten abgegeben.
Eine frühere Abgabe ist möglich.
Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgabenstellung 1 kann mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 45 Minuten verwendet werden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

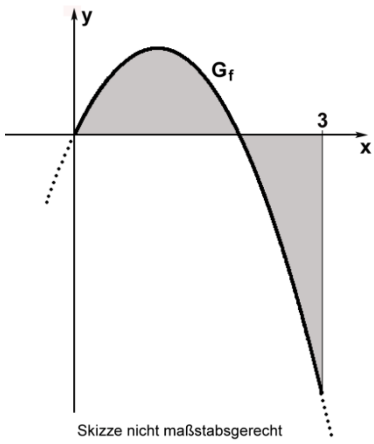
Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

In der Abiturprüfung im Schuljahr 2018/2019 besteht die Aufgabenstellung 1 für das 3. Prüfungsfach (Grundkurs) aus vier Aufgaben. Zwei der Aufgaben beziehen sich auf das Sachgebiet Analysis, je eine auf die Sachgebiete Geometrie und Stochastik. Zur Veranschaulichung unterschiedlicher Aufgabenstellungen werden hier jeweils zwei Beispielaufgaben für jedes Sachgebiet vorgelegt. Zur besseren Übersicht sind die Erwartungshorizonte direkt unter der Aufgabenstellung angeordnet.

Aufgabe 1 (*Analysis, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe*)

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = -3x^2 + 6x$. Der Graph von *f* ist in der Abbildung skizziert.



a) Geben Sie eine Stammfunktion von *f* an.

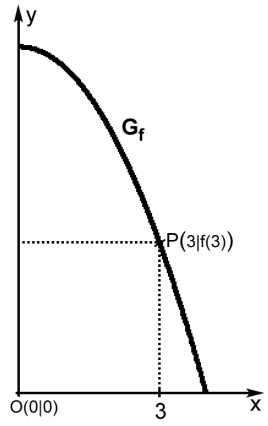
b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von *f* und der *x*-Achse im Bereich [0 ; 3] eingeschlossen wird (in der Abbildung grau unterlegt).

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	1	4	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	$F(x) = -x^3 + 3x^2$ ist eine Stammfunktion von *f*.	1		
b)	$f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = (-3x+6)x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$ $A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 -f(x)\,dx = [-x^3 + 3x^2]_0^2 + [x^3 - 3x^2]_2^3 = 8$ FE.		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	1	4	
	Summe der BE	5		

Aufgabe 2 (*Analysis, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)



Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}(16 - x^2)\ ;\ 0 \leq x \leq 4$.
Jeder Punkt *P(x|f(x))* auf dem Graphen legt ein achsenparalleles Rechteck mit den Eckpunkten *O(0|0)* und *P* fest.

a) Weisen Sie nach, dass der Umfang des Rechtecks 13 LE beträgt, wenn *P* die Koordinaten *P(3|f(3))* hat.

b) Für einen beliebigen Punkt *P(x|f(x))* ergibt sich für den Umfang die Gleichung $U(x) = 2x + 2f(x)$.
Ermitteln Sie den Wert für *x*, für den der Umfang des Rechtecks maximal ist.
Hinweis: Es genügt die Betrachtung der notwendigen Bedingung.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	1	4	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$f(3) = 3{,}5$; $U = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3{,}5 = 13$ LE.	1		
b)	Es ist $U(x) = 2x + 2f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{1}{2}(16 - x^2) = -x^2 + 2x + 16$ und damit $U'(x) = -2x + 2$, also $U'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Für $x = 1$ wird der Umfang des Rechtecks maximal.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	1		4
	Summe der BE	5		

Aufgabe 3 (*Geometrie, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

Gegeben ist die Ebene *E* durch $E: 3x - 4y + z = 11$ und die Gerade *g* durch
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade *g* in der Ebene *E* liegt.
b) Ermitteln Sie eine Gleichung für eine Gerade *h*, die ebenfalls in der Ebene *E* liegt und gleichzeitig senkrecht zur der Geraden *g* verläuft.

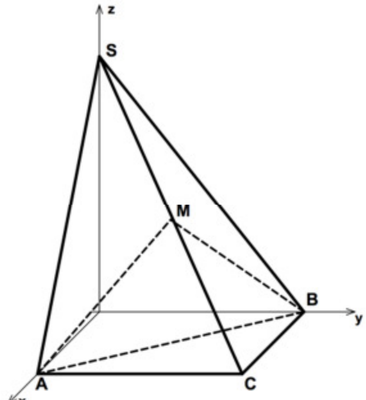
Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$g \cap E \Rightarrow 3(2+3r) - 4(2r) + (5-r) = 6 + 9r - 8r + 5 - r = 11$, also liegen alle Punkte der Geraden in der Ebene.	2		
b)	Der Richtungsvektor von *h* muss senkrecht zum Normalenvektor der Ebene *E* und senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade *g* verlaufen, d. h. $\overrightarrow{rv_h} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{rv_h} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Also z. B. $\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Eine Gleichung für h ist z. B. . $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$			3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2		3
	Summe der BE	5		

Aufgabe 4 (*Geometrie, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1*)

Ein Tetraeder hat die Eckpunkte *A(6|0|0)* , *B(0|8|0)* , *C(6|8|0)* und *S(0|0|10).*



Skizze nicht maßstabsgerecht

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte *S* und *C* geht.
Zeigen Sie, dass der Punkt *M(3|4|5)* der Mittelpunkt der Strecke *SC* ist.

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck *ABM* ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	$g_{SC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$. Für $r = 0{,}5$ ergibt sich *M(3|4|5).*	2		
b)	Es sind $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Daher ist $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$. Also hat das Dreieck *ABM* einen rechten Winkel bei *M*.		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	3	
	Summe der BE	5		

Aufgabe 5 (*Stochastik, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander und ohne Zurückzulegen 3 Kugeln gezogen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 3 gezogenen Kugeln schwarz sind.

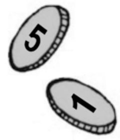
b) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 3 gezogenen Kugeln mindestens 2 schwarze Kugeln sind, genau $\frac{1}{3}$ beträgt.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2">Teilauf-
gabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mit der Bezeichnungen
S: Die gezogene Kugel ist schwarz
W: Die gezogene Kugel ist weiß
entspricht das Ereignis
SSS: Alle 3 gezogenen Kugeln sind schwarz
einem Pfad in einem dreistufigen Baumdiagramm und es ist:
$P(SSS) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$,</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Das Ereignis „Mindestens 2 der gezogenen Kugeln sind schwarz“ entspricht vier Pfaden in dem Baumdiagramm: SSS; SSW; SWS; WSS.
Es ist: $P(SSW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ und
$P(SSW) = P(SWS) = P(WSS)$, also ist
$P(\text{"}mind.\,2\ schwarze\ Kugeln\text{"}) = \frac{1}{30} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{30} + \frac{9}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">5</td></tr>
</table>

Aufgabe 6 (*Stochastik, GN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1*)



Für ein Spiel werden zwei Münzen verwendet, die auf der einen Seite eine 1 und auf der anderen Seite eine 5 tragen. Die Münzen werden gleichzeitig geworfen und es wird die Augensumme gebildet.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme 6 beträgt.

b) Bei dem Spiel erhält eine Spielerin soviel Euro ausgezahlt, wie sie als Augensumme erzielt hat.
Berechnen Sie, wie hoch der Einsatz bei dem Spiel sein muss, damit das Spiel fair.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Ein Baumdiagramm und die Pfadregeln ergeben: $P(AS=6)=P(1")\cdot P("5")+P("5")\cdot P("1")=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	2		
b)	Wegen $P(AS=2)=P(AS=10)=\frac{1}{4}$ ergibt sich für den Erwartungswert der Auszahlung: $E=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{4}\cdot 10=3$ Wenn der Einsatz 3 Euro beträgt, wird der Erwartungswert für den Gewinn null, also das Spiel fair.		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	3	
	Summe der BE	5		