Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Beispielaufgaben Mathematik
Leistungskurs

Aufgabenvorschlag **Teil 1** **für Prüflinge**

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt:	hilfsmittelfreier Teil
Hinweis:	Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden spätestens nach 75 Minuten abgegeben. Eine frühere Abgabe ist möglich. Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgabenstellung 1 kann mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen begonnen werden. In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 75 Minuten verwendet werden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

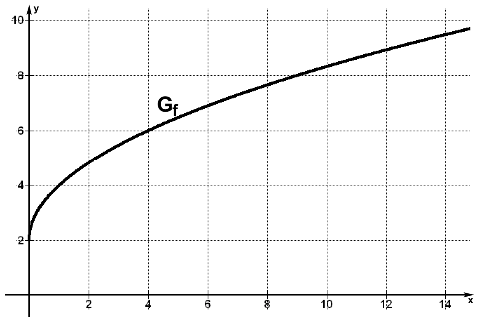
Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

In der Abiturprüfung im Schuljahr 2018 /2019 besteht die Aufgabenstellung 1 für den Leistungskurs aus sechs Aufgaben. Jeweils zwei der Aufgaben beziehen sich auf die Sachgebiete Analysis, Geometrie und Stochastik. Zur besseren Übersicht sind die Erwartungshorizonte direkt unter der Aufgabenstellung angeordnet.

Aufgabe 1 (*Analysis, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

In der Abbildung ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2 + 2\sqrt{x}\ ; x \geq 0$ skizziert.
Die Gerade *g* mit der Gleichung $g(x) = \frac{2}{3}x + 2\ ; x \geq 0$ schneidet den Graphen von *f* im Punkt $P(0|2)$.



a) Die Gerade *g* und der Graph von *f* haben einen weiteren Schnittpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

b) Es gibt eine Tangente an den Graphen von *f*, die parallel zu der Geraden *g* verläuft. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, an dem diese Tangente den Graphen von *f* berührt.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

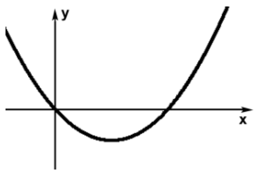
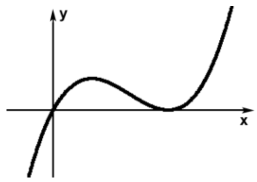
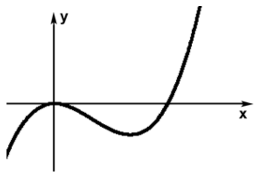
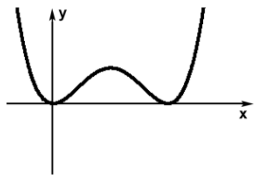
Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{2}{3}x = 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$; $Q(9\|8)$ ist ein weiterer Schnittpunkt von *g* mit dem Graphen von *f*.		2	
b)	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Für die Tangente muss also gelten: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$. $f\left(\frac{9}{4}\right) = 5$. Die Tangente berührt den Graphen von *f* im Punkt $Q\left(\frac{9}{4}\middle\|5\right)$.			3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen		2	3
	Summe der BE		5	

Aufgabe 2 (*Analysis, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

a) In einer der folgenden Skizzen ist der Graph der Ableitungsfunktion von *f* prinzipiell *) richtig skizziert. Entscheiden Sie, welche Skizze die richtige ist.

Skizze A	Skizze B	Skizze C	Skizze D
			
☐	☐	☐	☐

b) Der Graph von *f* hat einen Sattelpunkt und einen Tiefpunkt. (Das brauchen Sie nicht nachzuweisen).
Ermitteln Sie die Koordinaten des Sattelpunktes und die Koordinaten des Tiefpunktes.

**) Die Einteilung der y-Achse ist stark getaucht.*

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	Skizze C ist prinzipiell richtig.		2	
b)	$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$. Bei $x = 0$ ist $f'(x) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel, also liegt dort der Sattelpunkt $S(0\|1)$. Bei $x = 1$ ist $f'(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel, also liegt dort der Tiefpunkt $T(1\|0)$.			3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen		2	3
	Summe der BE	5		

Aufgabe 3 (*Geometrie, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

Gegeben sind die drei Punkte $A(3|5|1)$, $B(-5|7|17)$ und $C(6|2|13)$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte *A* und *B* geht. Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathrm{M}(-1|6|9)$ der Mittelpunkt der Strecke *AB* ist.

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck *AMC* rechtwinklig ist.
Geben Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* an.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ Für $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\mathrm{M}(-1\|6\|9)$.	2		
b)	$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, also ist *AMC* rechtwinklig. $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = 9$ und $\left\|\overrightarrow{MC}\right\| = 9$ und $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = 18$, also hat das Dreieck *ABC* einen Flächeninhalt von 81 FE.			3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2		3
	Summe der BE	5		

Aufgabe 4 (*Geometrie, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1*)

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ und der Punkt $B(0|3|6)$ legen eine Ebene *E* fest.

a) Weisen Sie nach, dass $3x + 2y + z = 12$ eine Gleichung für die Ebene *E* ist.

b) Die Ebene *E* schneidet die *x*-*y*-Ebene. Geben Sie die Koordinaten von zwei Punkten an, die auf der Schnittgeraden der Ebene *E* mit der *x*-*y*-Ebene liegen.

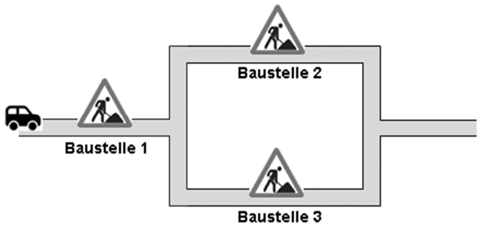
Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	3	2	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Die Punkte $A(4|0|0)$ und $C(0|0|12)$ liegen auf *g*. *A*, *B* und *C* erfüllen die Gleichung $3x + 2y + z = 12$.		3	
b)	Für Punkte der *x*-*y*-Ebene ist $z = 0$, also muss für Punkte der Schnittgeraden gelten $3x + 2y = 12$. Dies erfüllen z. B. der Punkt *A* und der Punkt $P(0|6|0)$.	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	3	
	Summe der BE	5		

Aufgabe 5 (*Stochastik, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2***)**

Für ihre tägliche Fahrt zur Arbeit hat eine Autofahrerin zwei Möglichkeiten. Auf beiden Routen liegen Baustellen, an denen es zu Verkehrsstaus kommen kann. Ob an den Baustellen Staus entstehen, ist unabhängig voneinander.



Die Autofahrerin hat beobachtet, wo es zu Staus kommt. Ihrer Erfahrung nach gilt:

$P(\text{"Stau an Baustelle 1"}) = \frac{1}{4}$; $P(\text{"Stau an Baustelle 2"}) = \frac{1}{3}$; $P(\text{"Stau an Baustelle 3"}) = \frac{1}{5}$

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es gleichzeitig an Baustelle 2 und an Baustelle 3 zu einem Stau kommt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es für die Autofahrerin einen Fahrweg gibt, auf dem es nicht zu einem Stau kommt.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	1	4	5

Erwartungshorizont

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	$P(\text{"Stau an Baustelle 2 und an Baustelle 3"}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$	1		
b)	Ein Fahrweg ohne Stau ist möglich, wenn es an Baustelle 1 keinen Stau gibt und nicht an beiden Baustellen 2 und 3 einen Stau gibt. $P(\text{"Es gibt Fahrweg ohne Stau"}) = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{15}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{15} = \frac{7}{10}$ Alternativ: Baumdiagramm: Drei Pfade führen zum Ereignis „Es gibt Fahrweg ohne Stau“ $P(\text{1frei/2frei/3frei}) + P(\text{1frei/2frei/3Stau}) + P(\text{1frei/2Stau/3frei}) =$ $= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	1		4
	Summe der BE	5		

Aufgabe 6 (*Stochastik, EN, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2*)

Ein Landwirt verpackt Eier in Packungen zu jeweils 6 Stück. Bei einer Kontrolle wird festgestellt, dass bei 5% der verpackten Eier die Schale beschädigt ist.

a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis E an, für das die Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}95)^6$ ermittelt werden kann.

b) Bei einer genaueren Kontrolle wird zusätzlich registriert, ob die beschädigten Eier eine weiße oder eine braune Schale haben. Daraus ergibt sich folgende unvollständige Vierfeldertafel:

	Schale weiß	Schale braun	
Schale beschädigt	150	350	
Schale nicht beschädigt			
			10000

Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel unter der Annahme, dass der Zustand der Schale (beschädigt / nicht beschädigt) stochastisch unabhängig ist von der Farbe der Schale.

Aufgabenteil	a)	b)	Summe
BE	2	3	5

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2">Teilaufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>E: Mindestens ein Ei in einer 6er-Packung ist beschädigt.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Schale weiß</th><th>Schale braun</th><th></th></tr>
<tr><td>Schale beschädigt</td><td>150</td><td>350</td><td>500</td></tr>
<tr><td>Schale nicht beschädigt</td><td>2850</td><td>6650</td><td>9500</td></tr>
<tr><td></td><td>3000</td><td>7000</td><td>10000</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">5</td></tr>
</table>