Aufgabenvorschläge aus dem Pool des IQB für das Jahr 2018
Aufgaben für den hilfsmittelfreien Aufgabenteil für das grundlegende Anforderungsniveau (Grundkurs)

Hier werden 9 Aufgaben vorgestellt, die vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen veröffentlicht worden sind, unabhängig davon, ob sie für die Verwendung in Berlin geeignet gewesen wären. Die Lösungen – in der vom IQB gewählten, äußerst knappen Form – und die Zuordnung zu Anforderungsbereichen finden Sie unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik

Aufgabe 1 (grundlegendes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 1)

	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x^2}+1$.	
a Skizzieren Sie den Graphen von f.	2
b Der Graph von f schließt mit der Gerade mit der Gleichung $y=1$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=1$ und $x=2$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.	3
	5

Aufgabe 2 (grundlegendes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 1)

	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3-2\sin x$.	
a Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\,|\,f(0))$.	3
b Geben Sie den Wertebereich von f an.	2
	5

Aufgabe 3 (grundlegendes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 2)

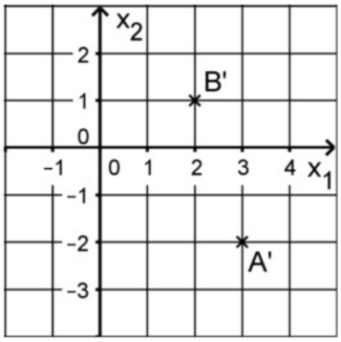
	BE
Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t)=-t\cdot(t-4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.	
a Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt.	3
b Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält.	2
	5

Aufgabe 4 (grundlegendes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 1)

	BE
Gegeben sind die Punkte $A(1\|1\|-1)$, $B(3\|-5\|2)$ und C. Für die Ortsvektoren von A und C gilt $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$.	
a Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$.	2
b Begründen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die A, B und C sowie den Koordinatenursprung enthält.	3
	5

Aufgabe 5 (grundlegendes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 1)

	BE
Die Punkte $A(3\|-2\|1)$, $B(2\|1\|1)$ und $C(0\|-0{,}5\|1)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(1\|-1{,}5\|5)$.	
a Begründen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Geben Sie die Höhe der Pyramide an.	2
b Verschiebt man die Punkte A und B parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene, so ergeben sich die Punkte A' bzw. B', die in der Abbildung dargestellt sind. Entscheiden Sie mithilfe geeigneter Ergänzung der Abbildung, ob der Fußpunkt der Höhe der Pyramide ABCS innerhalb oder außerhalb ihrer Grundfläche liegt.	3
	5



Aufgabe 6 (grundlegendes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 2)

	BE
Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7\|3\|0)$, $B(5\|3\|4)$ und $C_t(5+2t\|3\|4+t)$ ein Dreieck.	
a Zeigen Sie, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat.	2
b Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.	3
	5

Aufgabe 7 (grundlegendes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 1)

	BE
Von acht Karten sind zwei mit „1“, zwei mit „2“, zwei mit „3“ und zwei mit „4“ beschriftet. Die Karten werden gemischt und nacheinander verdeckt abgelegt.	
a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden zuerst abgelegten Karten mit „1“ beschriftet sind.	2
b Die Karten werden nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die dritte aufgedeckte Karte mit einer geraden Zahl beschriftet ist.	3
	5

Aufgabe 8 (grundlegendes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 1)

BE

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit „A“ bzw. „B“ beschriftet sind. Für ein Spiel gelten folgende Regeln:

- Die Spielerin bzw. der Spieler setzt einen Betrag von 4 Euro ein und dreht das Glücksrad anschließend zweimal.
- Wird beim ersten Drehen „A“ erzielt, wird der eingesetzte Betrag halbiert, wird „B“ erzielt, wird er verdoppelt.
- Wird beim zweiten Drehen „A“ erzielt, wird der nach dem ersten Drehen bestehende Betrag halbiert, wird „B“ erzielt, wird er verdoppelt.
- Der nach dem zweiten Drehen bestehende Betrag wird der Spielerin bzw. dem Spieler ausgezahlt.

a Zeigen Sie mithilfe der beschriebenen Spielregeln, dass nur die Beträge 1 Euro, 4 Euro und 16 Euro ausgezahlt werden können. 2

b Die Zufallsgröße X gibt den ausgezahlten Betrag in Euro an. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 3

x	1	4	16
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie diesen unter Berücksichtigung des Spieleinsatzes im Sachzusammenhang.

5

Aufgabe 9 (grundlegendes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 2)

BE

Ein Glücksrad besteht aus einem blauen, einem gelben und einem roten Sektor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen „Rot“ erzielt wird, ist $\frac{1}{3}$.

Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zweimal „Gelb“ erzielt wird, beträgt $\frac{1}{4}$.

a Ermitteln Sie für den gelben Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels. 2

b Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term 3

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{i} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{10-i}$$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

5

Aufgabenvorschläge aus dem Pool des IQB für das Jahr 2018
Aufgaben für den hilfsmittelfreien Aufgabenteil für das erhöhte Anforderungsniveau (Leistungskurs)

Hier werden 9 Aufgaben vorgestellt, die vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen veröffentlicht worden sind, unabhängig davon, ob sie für die Verwendung in Berlin geeignet gewesen wären. Die Lösungen – in der vom IQB gewählten, äußerst knappen Form – und die Zuordnung zu Anforderungsbereichen finden Sie unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik

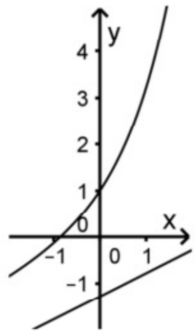
Aufgabe 1 (erhöhtes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 1)

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. 2

b Für eine positive reelle Zahl c wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c. Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c. 3

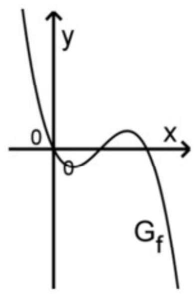


5

Aufgabe 2 (erhöhtes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 1)

BE

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f, der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.



a Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat. 2

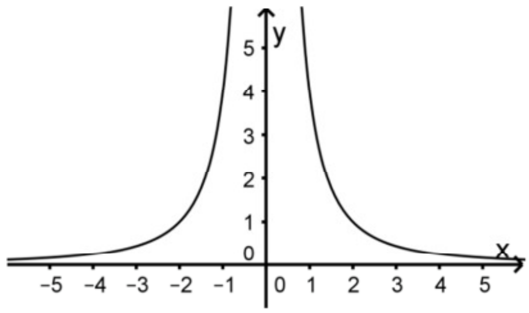
b Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an. 3

5

Aufgabe 3 (erhöhtes Niveau, Analysis, Aufgabengruppe 2)

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2}$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.



a Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p. 2

b Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q. 3

5

Aufgabe 4 (erhöhtes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 1)

BE

Gegeben sind die Ebene $E: x_2 - 3x_3 = -19$ sowie die Punkte $P(1|2|2)$, $Q(1|-1|11)$ und $S(-2|-4|5)$.

a Zeigen Sie, dass S in der Ebene E liegt. 1

b Weisen Sie nach, dass die Gerade durch P und Q senkrecht zu E steht. 2

c Die Punkte P und Q haben den gleichen Abstand von der Ebene E. Die Punkte S und P legen die Gerade g fest. Spiegelt man g an E, so erhält man die Gerade h. Geben Sie eine Gleichung von h an. 2

5

Aufgabe 5 (erhöhtes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 1)

BE

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen. 2

b Die Ebene E enthält die Geraden g und h. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

5

Aufgabe 6 (erhöhtes Niveau, Geometrie, Aufgabengruppe 2)

BE

Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz-Ebene liegt. 2

b Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0|8|4)$ in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind. 3

5

Aufgabe 7 (erhöhtes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 1)

BE

a Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar. 3

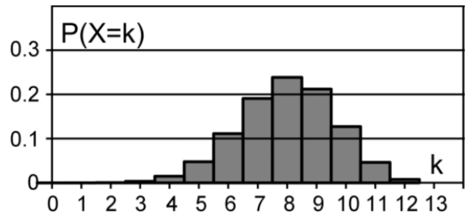


Abb. 1

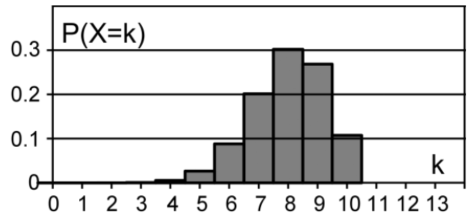


Abb. 2

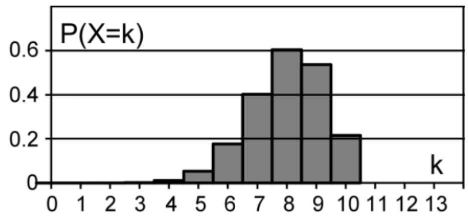


Abb. 3

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p. Es gilt: 2

- Der Erwartungswert von Y ist 8.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

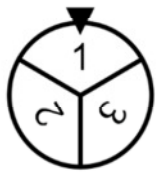
Ermitteln Sie den Wert von n.

5

Aufgabe 8 (erhöhtes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 1)

BE

Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte. 2

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

b Betrachtet werden die Ereignisse A und B: 3

A: „Es wird $(1;3)$, $(2;2)$ oder $(3;1)$ erzielt."

B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt."

Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

5

Aufgabe 9 (erhöhtes Niveau, Stochastik, Aufgabengruppe 2)

BE

Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X=3)=\frac{1}{3}$ und $P(X=4)=\frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. 2

b Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y=3)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)\geq\frac{1}{6}$ und $P(Y=5)\geq\frac{1}{6}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen. 3

5