

Handreichung zur Themenkiste Brüche

Inhaltsverzeichnis

1	Worum es geht	2
2	Bezug zum Rahmenlehrplan	4
3	Grundsätzliche didaktische und methodische Überlegungen für den Einsatz einer Lernumgebung	7
4	Lernumgebungen aus dieser Themenkiste.....	8
5	Umgang mit sprachlichen Hilfen.....	8
6	Materialliste	10
7	Evaluation.....	11
8	Ergänzende Literatur / Links	12


1 Worum es geht

Das Kernstück jeder Lernumgebung sind die vernetzten Aufgaben. Sie sind mathematisch fundiert und reichhaltig genug, um alle Kinder zu Entdeckungen und neuen Erkenntnissen anzuregen. Die Einstiegsaufgabe in die Lernumgebung ist so konzipiert, dass alle Kinder sie bewältigen können; gleichzeitig hält die Lernumgebung auch anspruchsvollere Anforderungen bereit. Alle Kinder befassen sich mit demselben Themenkomplex und können ihrem unterschiedlichen Lern- und Arbeitstempo entsprechend arbeiten. Auch wenn am Ende nicht alle gleich weit sind, gibt es genügend gemeinsame Sprechansätze: Durch das Präsentieren und den Austausch über individuelle Lösungswege werden die Kinder angeregt, ihr eigenes Handeln zu reflektieren, und sie lernen von- und miteinander.

Die Lernumgebungen stellen keine Abfolge einer Aufgabenreihe dar, sondern jede Lernumgebung steht für sich. Sie bereichern den Unterricht zum jeweiligen Thema.


Die Einführung der gebrochenen Zahlen (Bruchzahlen) ist die erste systematische Zahlenbereichserweiterung. Sie stellt hohe Anforderungen an die Lernenden. Deshalb ist es besonders wichtig, dass sich die Kinder den neuen Zahlenraum aktiv handelnd erschließen. Ein zu zeitiges Zurückziehen auf die formal-mathematische Ebene führt zu Verständnisproblemen.

Der Begriff der Bruchzahl ist sehr komplex. MALLE¹ und PADBERG² unterscheiden - ohne Anspruch auf Vollständigkeit - folgende Aspekte:

- Bruch als Teil des Ganzen $\frac{5}{6}$ 
- Bruch als relativer Anteil ($\frac{2}{3}$ von 60)
- Bruch als Maßzahl $\frac{3}{4}$ h, $\frac{1}{2}$ l
- Bruch als Skalenwert (z.B. bei einem Messgefäß oder der Benzinanzeige)
- Bruch als Vergleichsoperator (Das Buch ist $\frac{1}{2}$ mal so dick wie das andere.)
- Bruch als Quotient $\frac{4}{5} = 4 : 5$
- Bruch als absoluter Anteil (3 von 4)

¹ Malle, Günther: Grundvorstellung zu Bruchzahlen. Mathematik lehren. (2004) 123, S. 4-8

² Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.S. 29-31

- Bruch als Quasikardinalzahl ($\frac{3}{4} = 3$ Viertel )
- Bruch als Quasiordinalzahl (jeder Dritte)
- Bruch als Verhältnis ($\frac{4}{5} = 4 : 5$ Der Doppelpunkt steht hier für das Verhältnis 4 zu 5, z.B. bei Spielergebnissen oder Mischungsverhältnissen)
- Bruch als Lösung der linearen Gleichung

Die Tabelle gibt einen Überblick darüber, welcher Bruchzahlaspekt in der jeweiligen Lernumgebung behandelt wird.

Bruchzahlaspekt Bruch als	Teil des Ganzen	relativer Anteil	Maßzahl	Skalenwert	Vergleichsoperator	Quotient	Verhältnis	absoluter Anteil	Quasikardinalzahl	Quasiordinalzahl
Lernumgebung										
LU 1 Bruchteilplakate	x	x				x			x	
LU 2 Bruchteile von Strohhalmen	x	x				x		x	x	
LU 3 Bruchteile von Größen	x	x	x	x				x	x	x
LU 4 Brüche mit Wendepättchen		x			x					
LU 5 Brüche am Geobrett	x	x			x		x			
LU 6 Größer-Spiel	x	x	x	x						x
LU 7 Zahlenstrahl	x	x	x	x						
LU 8 Brüche am Tangram	x	x			x					
LU 9 Zauberhafte Bruchrechnung	x	x								
LU 10 Brüche multiplizieren						x	x			

2 Bezug zum Rahmenlehrplan

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzbereiche (Leitideen)		Bemerkungen
Zahlen und Operationen	L1	alle Lernumgebungen dieser Themenkiste
Größen und Messen	L2	LU 3 Bruchteile von Größen
Raum und Form	L3	LU 8 Tangram, LU 5 Brüche am Geobrett
Gleichungen und Funktionen	L4	LU 4 Brüche mit Wendepfättchen
Daten und Zufall	L5	

Niveaustufen (vgl. RLP)	A	B	C	D
Bemerkungen				

Prozessbezogene mathematische Kompetenzbereiche	
Die Schülerinnen und Schüler können	
K1 Mathematisch argumentieren	1.1.1 Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind (Gibt es...? Wie verändert sich...? Ist das immer so...?) 1.1.2 Zusammenhänge und Strukturen erkennen und Vermutungen zu mathematischen Situationen aufstellen 1.1.3 die Plausibilität von Vermutungen begründen
	1.2.1 Beispiele oder Gegenbeispiele für mathematische Aussagen finden 1.2.2 mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
	1.3.1 Routineargumentationen wiedergeben 1.3.2 Begründungen nachvollziehen und zunehmend selbstständig entwickeln 1.3.3 mehrschrittige Argumentationen zur Begründung und zum Beweisen mathematischer Aussagen entwickeln
	1.4.1 Fehler erkennen, beschreiben und korrigieren 1.4.2 Ergebnisse bzgl. ihres Anwendungskontextes bewerten 1.4.3 mehrschrittige Argumentationen, Begründungen und Beweise kritisch hinterfragen
K2 Probleme mathematisch lösen	2.1.1 Aufgaben bearbeiten, zu denen sie noch keine Routinestrategie haben („sich zu helfen wissen“) 2.1.2 mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bei der Bearbeitung von Problemen anwenden 2.1.3 Probleme selbst formulieren
	2.2.1 Lösungsstrategien (z.B. vom Probieren zum systematischen Probieren) entwickeln und nutzen 2.2.2 heuristische Hilfsmittel zum Problemlösen anwenden
	2.3.1 Zusammenhänge erkennen und Lösungsstrategien auf ähnliche Sachverhalte übertragen 2.3.2 Lösungswege reflektieren 2.3.3 Plausibilität von Ergebnissen überprüfen
K3 Mathematisch modellieren	3.1.1 relevante Informationen aus Sachtexten und anderen Darstellungen entnehmen 3.1.2 reale Situationen strukturieren und vereinfachen 3.1.3 Sachsituationen in die Sprache der Mathematik übersetzen und entsprechende Aufgaben innermathematisch lösen 3.1.4 reale Situationen mit mathematischen Modellen beschreiben

K3 Mathematisch modellieren	3.2.1 Sachaufgaben zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen formulieren
	3.2.2 mathematische Lösungen in Bezug auf die Ausgangssituation prüfen und interpretieren
	3.2.3 zu einem mathematischen Modell verschiedene Realsituationen angeben
	3.2.4 verwendete Modelle reflektieren
K4 Mathematische Darstellungen verwenden	4.1.1 geeignete Darstellungen für das Bearbeiten mathematischer Sachverhalte und Probleme auswählen, nutzen und entwickeln
	4.1.2 Darstellungen zielgerichtet verändern
	4.2.1 eine Darstellung in eine andere übertragen
	4.2.2 zwischen verschiedenen Darstellungen und Darstellungsebenen wechseln (übersetzen)
	4.3.1 verschiedene Darstellungen vergleichen
	4.3.2 Darstellungen bewerten oder interpretieren
K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen	5.1.1 Tabellen, Terme, Gleichungen und Diagramme zur Beschreibung von Sachverhalten nutzen
	5.1.2 Variablen und Funktionen zur Bearbeitung von Aufgaben nutzen
	5.1.3 symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
	5.2.1 formale Rechenstrategien (schnelles Kopfrechnen und automatisierte Verfahren) ausführen
	5.2.2 mathematische Verfahren routiniert ausführen
	5.2.3 Kontrollverfahren nutzen
	5.2.4 Lösungs- und Kontrollverfahren hinsichtlich ihrer Effizienz bewerten
	5.3.1 mathematische Hilfsmittel und Werkzeuge sachgerecht auswählen und flexibel einsetzen
K6 Mathematisch kommunizieren	6.1.1 eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer nachvollziehen und gemeinsam Lösungswege reflektieren
	6.1.2 mathematische Zusammenhänge adressatengerecht beschreiben
	6.1.3 eigene Problembearbeitungen und Einsichten dokumentieren und darstellen
	6.2.1 relevante Informationen aus Sachtexten und anderen Darstellungen entnehmen und sich darüber mit anderen austauschen
	6.2.2 mathematische Informationen in mathematikhaltigen Darstellungen und in nicht aufbereiteten, authentischen Texten erfassen, analysieren und bewerten
	6.3.1 mathematische Fachbegriffe und Zeichen bei der Beschreibung und Dokumentation von Lösungswegen sachgerecht verwenden
	6.3.2 mathematische Zusammenhänge unter Nutzung von Fachsprache und geeigneten Medien mündlich und schriftlich präsentieren
	6.4.1 Aufgaben gemeinsam bearbeiten 6.4.2 Verabredungen treffen und einhalten

3 Grundsätzliche didaktische und methodische Überlegungen für den Einsatz einer Lernumgebung

1. Struktur von Lernumgebungen:

Unter Lernumgebungen verstehen wir eine Arbeitssituation, bei der alle Kinder dieselbe Aufgabe bearbeiten, die aus mehreren Teilaufgaben besteht. Die Aufgabenstellung berücksichtigt die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler und bietet nach einer niedrigen Eingangsschwelle vertiefende Teilaufgaben auf unterschiedlichem Verständnis- und Abstraktionsniveau. Damit bietet sie allen Lernenden einen individuellen Lernzuwachs und begünstigt das aktiv-entdeckende Lernen.

2. Differenzierung:

Entsprechend dem Prinzip der natürlichen Differenzierung (vgl. Wittmann 1994) ist die Aufgabenstellung so gewählt, dass sie von Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen auf verschiedenem Lernniveau bearbeitet werden kann.

3. Instruktionsverbot:

Eine Einführung muss sicherstellen, dass jedes Kind die Problemstellung verstanden und einen Zugang zur Aufgabe gefunden hat. Ein Beispiel für einen möglichen Lösungsweg wird nicht gegeben, denn die Vorgabe eines Beispiels würde verhindern, dass die Schüler/innen ihren persönlichen Rechenweg suchen.

4. Eigenaktivität:

Der individuelle Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler steht im Mittelpunkt. Sie entscheiden selbst über den Einsatz von Arbeitsmitteln und die Art der Dokumentation. So können Lösungswege in einem Rechenbild oder in beschreibenden Formulierungen festhalten werden. Dabei gelingt es einigen auch, zu begründen bzw. Erklärungen für ihren Denk- und Lösungsweg zu finden. Aufgabe der Lehrkraft ist es, die Kinder zu beobachten, anzuregen und gegebenenfalls zu beraten.

5. Präsentation

Der gemeinsame Austausch über die unterschiedlichen Bearbeitungswege einer Aufgabe, mit der sich alle Kinder beschäftigt haben, begünstigt das Lernen voneinander. Ein Vorstellen der Arbeitsergebnisse (vor der Klasse, als Museumsgang, als Partnerarbeit, in der Mathekonferenz etc.) ist wichtig, damit die Lernenden ihre unterschiedlichen Denkwege reflektieren können. In der Reflexion vertieft sich das mathematische Verständnis. Hier ist das Argumentieren gefragt: Was unterscheidet meinen Weg von dem der anderen Kinder? Worin liegt seine Stärke/Schwäche?

6. Anerkennungskultur

Die Rolle der Lehrkraft verändert sich, das Vormachen und Nachahmen von Verfahren tritt in den Hintergrund. Die unterschiedlichen Denkwege der Kinder, ihre Darstellung und Reflexion treten ins Zentrum. Fehler werden zum Ausgangspunkt, um Lösungswege genauer zu betrachten. Statt eines Abarbeitens vieler Aufgaben werden bewusst nur wenige angeboten. Ziel ist es, dass alle Kinder Einsicht in mathematische Strukturen gewinnen können, dabei wird das individuelle Arbeits- und Lerntempo respektiert. Die Lehrkraft wird zum Berater und Organisator. Sie muss zulassen, dass am Ende nicht alle Kinder im gleichen Umfang die Aufgabenstellung bewältigt haben.

4 Lernumgebungen aus dieser Themenkiste

LU 1 Bruchteilplakate	LU 6 Größer-Spiel
LU 2 Brüche mit Strohhalmen	LU 7 Brüche am Zahlenstrahl
LU 3 Bruchteile von Größen	LU 8 Brüche am Tangram
LU 4 Brüche mit Wendeplättchen	LU 9 Zauberhafte Bruchrechnung
LU 5 Brüche am Geobrett	LU 10 Brüche multiplizieren

5 Umgang mit sprachlichen Hilfen

Die Sprachförderung ist Bestandteil des Mathematikunterrichts, der alle Schülerinnen und Schüler beim Aufbau einer flexiblen und sicheren Sprachkompetenz unterstützt. Dabei wird adressatengerecht eine fachbezogene Sprache vermittelt, damit sie sich mündlich wie schriftlich über Entdeckungen und Vorgehensweisen, Strategien und Lösungswege austauschen können. (vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B, S. 4, Berlin, Potsdam 2015)

Das **Kapitel 4 jeder Lernumgebung** befasst sich aus diesem Grund mit der Sprachbildung. Unter 4.1 sind Hinweise auf „Sprachliche Stolpersteine“ und unter 4.2 eine „Wortliste zum Textverständnis“ aufgeführt.

Die „sprachlichen Stolpersteine“ sind Formulierungen des Aufgabentextes, die durch die Struktur der deutschen Sprache, z.B. die Verwendung zusammengesetzter Nomen, trennbarer Verben, Personal- und Reflexivpronomen, Gebrauch von Präpositionen, schwierige Satzkonstruktionen, Genitivbildung etc. für Schülerinnen und Schüler schwer verständlich sein können.

In einer Tabelle werden zu jeder Aufgabe aus dem Originaltext mögliche sprachliche Stolpersteine für die Lehrkraft bewusst gemacht und sprachliche Alternativen vorgeschlagen. Sie hat somit die Möglichkeit die Aufgabe sprachlich zu vereinfachen und ihrer Lerngruppe anzupassen.

Der Lehrkraft muss bewusst sein, dass das Verstehen des Textes (Lesekompetenz) die unabdingbare Voraussetzung dafür ist, die Aufgabenstellung der Lernumgebung zu verstehen und zu bearbeiten.

Um eine nachhaltige Sprachförderung zu erzielen, muss eine Wortschatzanalyse erfolgen. Die „Wortliste zum Textverständnis“ führt den fachbezogenen Wortschatz und Redemittel zum Thema auf, die in der Aufgabenstellung vorkommen und deren Bedeutung zum Verstehen der Aufgabe grundlegend ist. Bei der Einführung der Lernumgebung ist es für die Lernenden hilfreich, im Klassenverband einen Wortspeicher (z.B. als Plakat) zu erarbeiten. Hier werden diese und eventuell noch weitere spezifische Fachbegriffe, Satzmuster und Formulierungshilfen zum Thema sichtbar gemacht. Dieser kann stets erweitert werden.

In jeder Lernumgebung enthält **Kapitel C („Sprachbildung“)** sprachliche Hilfen zur Darstellung der Lösung für die Hand der Schülerinnen und Schüler. Der Einsatz dieses Arbeitsbogens darf nicht zu früh erfolgen, um die individuellen Denkwege der Lernenden nicht einzuschränken!

Sprachsensibler Fachunterricht arbeitet mit dem Sprachstand, den die Lernenden in den Unterricht aktuell mitbringen. Die Schülerinnen und Schüler benutzen anfangs bei der Beschreibung ihres Lösungsweges ihren individuellen (alltagssprachlichen) Wortschatz. Bei der Präsentation der Lösungswege unterstützt die Lehrkraft durch ein aktives Zuhören und durch adressatengerechtes Übersetzen der Alltagssprache in die Fachsprache. Dabei kann sie (z.B. im Wortspeicher) weitere sprachliche Mittel zur Verfügung stellen und die Lernenden auffordern, mit diesen Mitteln ihre Aussagen zu wiederholen bzw. zu ergänzen.

Erst nachdem die Schülerinnen und Schüler einen eigenen Denk- und Lösungsweg entwickelt und den Fachwortschatz im Kontext verstanden haben, sollte der Arbeitsbogen „Sprachliche Hilfen zur Darstellung der Lösung“ - falls erforderlich - eingesetzt werden.

6 Materialliste

Eine Übersicht soll den Verantwortlichen dabei unterstützen, sich schnell einen Überblick zu verschaffen, ob alle Materialien in der Themenkiste vorhanden sind, sodass sie jederzeit einsatzbereit ist.

Lernumgebung	Materialien in digitaler Form	Weitere Materialien
LU 1 Bruchteilplakate	LU, Bögen mit geometrischen Formen	
LU 2 Brüche mit Strohhalmen	LU	Strohhalme, Pfeifenreiniger
LU 3 Bruchteile von Größen	LU	Muggelsteine, Schnur, Reis, Wasser, Messbecher, Waagen, Maßbänder
LU 4 Brüche mit Wendeplättchen	LU, AB, Vorlage 12 Wendeplättchen	Wendeplättchen
LU 5 Brüche am Geobrett	LU, AB, Vorlage Aufgabenkarten	Geobretter
LU 6 Größer-Spiel	LU, Bruchstreifen	Würfel, Zehnerwürfel, Zwölferwürfel
LU 7 Brüche am Zahlenstrahl	LU, Bruchkärtchen	Papierstreifen (z.B. Kassenrolle), Maßbänder
LU 8 Brüche am Tangram	LU, AB1, AB2, Tangram	alternativ: handelsübliche Tangrams (Seitenlänge 10 cm)
LU 9 Zauberhafte Bruchrechnung	LU	
LU 10 Brüche multiplizieren	LU, Ziffernkärtchen	

7 Evaluation

Ein Reflexionsbogen, der nach dem Einsatz der Lernumgebung ausgefüllt werden kann, soll als Grundlage für einen Erfahrungsaustausch innerhalb der Lehrerschaft, dienen. *Die Entwicklung einer Themenkiste ist ein Prozess, zu dem Sie beitragen können: Erfahrungen aus der Praxis sind uns sehr wichtig, um die Lernumgebungen zu aktualisieren. Wir freuen uns über eine Rückmeldung per Mail an maria.hums-heusel@senbjw.berlin.de. Vielen Dank!*

Reflexionsbogen zur Lernumgebung _____ aus der Themenkiste _____

Name: _____ durchgeführt in Klassenstufe: _____ Datum: _____

	ja	nein	Anmerkungen/Anregungen
Waren die didaktisch-methodischen Hinweise für die Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsdurchführung hilfreich?			
War der zeitliche Rahmen angemessen?			
War die Einführung so konzipiert, dass jedes Kind wusste, worum es geht, und selbständig arbeiten konnte?			
Konnten alle Kinder die Einstiegsaufgabe lösen?			
Waren die Aufgaben verständlich formuliert?			
Bot die LU Differenzierungsmöglichkeiten an? (Alle Kinder arbeiten am selben Thema, auf unterschiedlichem Niveau, nach eigenem Lern- und Arbeitstempo.)			
Waren die Schülerinnen und Schüler durch die LU motiviert?			
Wurden die Schülerinnen und Schüler durch die Aufgaben zum selbstständigen Arbeiten angeregt?			
Kamen die Schülerinnen und Schüler über die Aufgaben und ihre Lösungen miteinander ins Gespräch?			
Würden Sie die Lernumgebung noch einmal einsetzen?			

8 Ergänzende Literatur / Links

Titel / Autor	Beschreibung
Besuden, Heinrich: Bruchbegriff und Bruchrechnen. In: Mathematik lehren. (2004) 122, S. 15-19	Anregungen zur Veranschaulichung von Brüchen mit unterschiedlichen Materialien
Bruchrechnung Aufgabenkartei zur Arbeit mit dem Geobrett (2011): http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/schule/schulentwicklung/Modellversuche_Schulversuche/SINUS-Grundschule-Berlin/materialien/rueckblick/roemer_brueche_sep_2011/Bruchrechnung_Geobrett.pdf [17.06.2016]	Aufgabenkartei mit vielfältigen Aufgaben für das Geobrett
Hengartner, Elmar; Hirt, Ueli; Wälti, Beat (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Zug: Klett und Balmer Verlag	Lernumgebungen zum Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen
Köhler, Egon (1998): Drei auf einen Streich. Spielen – Bruchrechnung – Geometrie. In: Mathematik in der Schule. Heft 9/1998 S. 462-469	Anregungen zur Veranschaulichung von Brüchen mit unterschiedlichen Materialien
Malle, Günther: Grundvorstellung zu Bruchzahlen. Mathematik lehren. (2004) 123, S. 4-8	
Müller, Gerhard, Wittmann, Erich (1990): Handbuch der produktiven Rechenübungen. Stuttgart: Klett-Verlag www.mathe2000.de [06.03.2016]	
Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag	Standardwerk
Prediger, Susanne: Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen. In: Mathematik lehren. (2004) 123, S. 9-13	
Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik. Berlin, Potsdam 2015	

<p>Römer, Matthias (2011): Brüche und Bruchrechnung-Annäherung an ein schwieriges Thema. http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/schule/schulentwicklung/modellversuche-schulversuche/sinus-grundschule-berlin/sinus-be-rueckblick/sinus-be-roemer-brueche [17.06.2016]</p>	
<p>Römer, Matthias: Anteile verstehen mit LEGO. In: Schulmagazin 5-10. (2014) 4, S. 21-25</p>	Lernumgebung zur Bruchrechnung mit LEGO-Steinen
<p>Roth, Jürgen (2009): Eine geometrische Lernumgebung. Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, Annemarie; Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fordernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Weinheim: Beltz Verlag, S. 186-200. https://mathematikunterricht.files.wordpress.com/2011/04/roth_bruchrechnung_exi.pdf [17.06.2016]</p>	Sehr handlungsorientierte Lernumgebung, die Sechseckteile zur Veranschaulichung von Brüchen nutzt
<p>Schumacher, Stefan: Kunstwerke als anschaulicher Zugang zur Bruchrechnung. In: Mathematik differenziert. (2014) 3, S 38-46</p>	
<p>Varney, Rüdiger (2011): Brüche zum Anfassen. Seelze: Friedrich-Verlag</p>	Sammelband mit Artikeln zur Bruchrechnung
<p>Wittmann, Gerald: Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln - Grundvorstellungen entwickeln. In: Mathematik lehren. (2014) 142, S. 17-23</p>	