Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2010/2011

Fach	**Mathematik (A)**
Prüfungstag	6. Juni 2011
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil; Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Aus den fünf Aufgaben **müssen** Sie **drei** auswählen. Die **Aufgabe 1** (Exponentialfunktionen) ist eine **Pflichtaufgabe**. Sie **muss** von allen bearbeitet werden! Zwischen **Aufgabe 2** (Gebrochenrationale Funktionen) und **Aufgabe 3** (Trigonometrische Funktionen) müssen Sie **wählen**. Auch zwischen **Aufgabe 4** (Analytische Geometrie) und **Aufgabe 5** (Stochastik) müssen Sie **wählen**. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchstrichene Lösung zählt.**

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: ______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte

Aufgabe Nr.	**Soll %**	**Ist**	**Ist (Zweitkorrektur)**
1 2 oder 3 4 oder 5			
Summe:	100		
Notenpunkte	15	**__ /15 Punkte**	**__ /15 Punkte**
Maluspunkt	**-1**	**__ Punkt**	**__ Punkt**
Insgesamt		**__ Punkte**	**__ Punkte**
Datum, Unterschrift:			

1 Exponentialfunktionen /34

Ein Unternehmen stellte über einen Zeitraum von 20 Jahren ein Produkt her. Die **Kosten** K und der **Umsatz** U lassen sich durch die Funktionen

$K(t) = 5 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$ und $U(t) = 2t \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$ ($K(t), U(t)$: in Millionen €; t: Zeit in Jahren)

beschreiben und sind im Koordinatensystem auf der folgenden Seite dargestellt.

Die Differenz aus dem erzielten Umsatz und den aufgewendeten Kosten stellt den **Gewinn** dar. Die Gewinnfunktion hat also die Gleichung $G(t) = U(t) - K(t)$.

Ihre Ableitungen lauten $G'(t) = (-0,4t + 3) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$ und $G''(t) = (0,08t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$.

Ihre Stammfunktion hat den Term $(-10t - 25) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$.

1.1 Wie lautet die Funktionsgleichung von G? /1

1.2 Berechnen Sie, wann die Gewinnschwelle erreicht wurde, d. h. zu welchem Zeitpunkt der Umsatz und die Kosten gleich groß waren? /3

1.3 Weisen Sie nach, dass gilt: $G'(t) = (-0,4t + 3) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}$ /2

1.4 Wann wurde der Gewinn maximal und wie hoch war er dann? /7

1.5 Wann nahm der Gewinn am stärksten ab und wie groß war diese Abnahmegeschwindigkeit (in Millionen € pro Jahr)? /5

[***Hinweis***: Auf einen Nachweis mittels höherer Ableitungen kann verzichtet werden.]

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von G im Intervall $I = [0; 20]$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite. /8

Ergänzen Sie dafür die folgende Wertetabelle:

t	0	1	3	5	10	15	20
$G(t)$	$-5,00$			1,84			0,64

1.7 Erläutern Sie, welche Größe mit dem folgenden Integralterm berechnet wird: /2

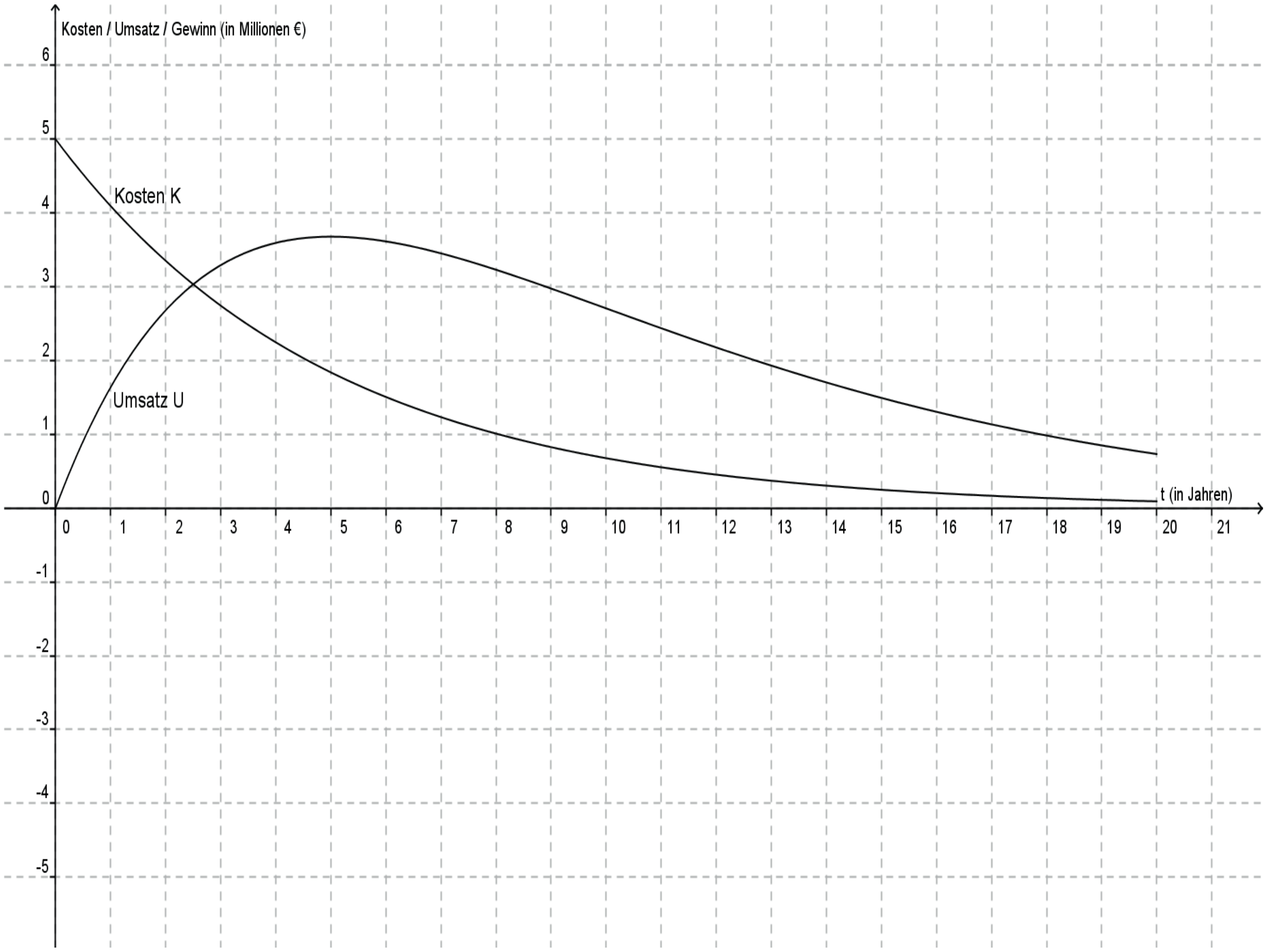
$$I(a) = \frac{1}{a} \int_0^a G(t)\,\mathrm{d}t$$

1.8 Berechnen Sie die Integralausdrücke: /6

$$I(5) = \frac{1}{5} \int_0^5 G(t)\,\mathrm{d}t\,;\; I(10) = \frac{1}{10} \int_0^{10} G(t)\,\mathrm{d}t\,;\; I(15) = \frac{1}{15} \int_0^{15} G(t)\,\mathrm{d}t\,;\; I(20) = \frac{1}{20} \int_0^{20} G(t)\,\mathrm{d}t$$

Begründen Sie mithilfe dieser Größen, warum es für das Unternehmen sinnvoll ist, trotz abnehmenden Gewinns das Produkt über einen so langen Zeitraum weiter zu produzieren.

1 Exponentialfunktionen (Fortsetzung)



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Die Funktion f sei gegeben mit $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$.

2.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von f. /2

2.2 Zeigen Sie, dass $f'(x)=\frac{-4x^2+4}{\left(x^2+1\right)^2}$. /2

2.3 Bestimmen Sie die Extrempunkte von f.

[***Hinweis***: Verwenden Sie: $f''(x)=\frac{8x^3-24x}{\left(x^2+1\right)^3}$] /4

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f unter Verwendung der berechneten Werte für $-5 \le x \le 5$ in ein Koordinatensystem.

Berechnen Sie dafür auch die nachfolgenden Funktionswerte: /6

x	-5	-4	-2	1,5	3,5	5
$f(x)$	$-0{,}77$		$-1{,}60$		1,06	

Die Tangenten an den Graphen von f in den Punkten $P\left(\sqrt{3} \mid \sqrt{3}\right)$ und $Q\left(-\sqrt{3} \mid -\sqrt{3}\right)$ bilden zusammen mit den Geraden $x=\sqrt{3}$ und $x=-\sqrt{3}$ ein Viereck.

2.5 Begründen Sie, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist. /2

2.6 Ermitteln Sie eine dieser Tangentengleichungen. /3

2.7 Zeichnen Sie das Parallelogramm in das Koordinatensystem ein. /3

2.8 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms. /3

Die Gerade $g_t(x)=t\,x$, $0<t<4$, schneidet den Graphen von f außer im Ursprung in einem weiteren Punkt S_t im 1. Quadranten.

2.9 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_t in Abhängigkeit von t.

[***Zur Kontrolle***: $x_{S_t}=\sqrt{\frac{4-t}{t}}$] /4

2.10 Der Punkt S_t bilde mit dem Koordinatenursprung O und dem Punkt R_t auf der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel liege im Punkt R_t.

Untersuchen Sie, ob es ein t gibt, für das der Flächeninhalt des Dreiecks extremal wird. /4

3 Trigonometrische Funktionen /33

Gegeben seien die Funktionen f und g im Intervall $I=[0;2\pi]$ mit

$$f(x)=\sin x-\sin 2x \text{ und } g(x)=2\sin\frac{x}{2}.$$

f ist eine Überlagerung von trigonometrischen Funktionen und g ist die "umhüllende" Funktion (Amplitude), denn es gilt: $\sin x-\sin 2x=-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$. Der Graph von g ist auf der folgenden Seite dargestellt.

3.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f im Intervall $I=[0;2\pi]$. **/4**

3.2 Berechnen Sie die Extrempunkte von f im Intervall $I=[0;2\pi]$.
[***Hinweis***: Auf einen Nachweis mithilfe der 2. Ableitung kann verzichtet werden.] **/9**

3.3 Zeichnen Sie mit Hilfe der berechneten Punkte den Graphen der Funktion f in das vorgegebene kartesische Koordinatensystem (siehe nächste Seite). **/6**

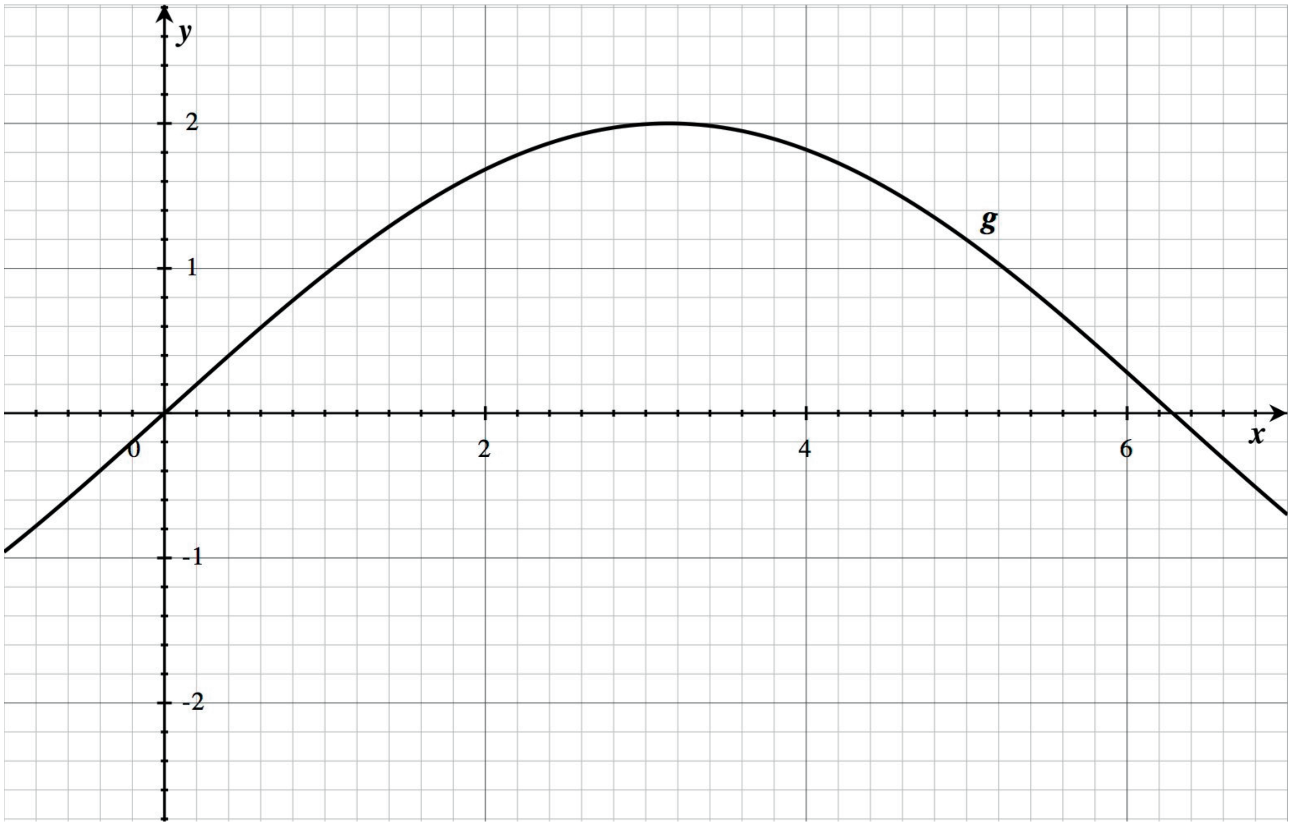
3.4 Weisen Sie nach: $\sin x-\sin 2x=-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$ **/3**

3.5 Berechnen Sie unter Verwendung der Umformung aus 3.4 die Schnittstellen von f und g im Intervall $I=[0;2\pi]$. **/4**

3.6 Zeigen Sie, dass sich f und g an der Stelle $\frac{2}{3}\pi$ berühren. **/3**

3.7 Berechnen Sie den Inhalt der von f und g im Intervall $I=[0;2\pi]$ eingeschlossenen Fläche. **/4**

3 Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)



4 Analytische Geometrie /33

Gegeben seien die vier Eckpunkte einer Pyramide:

$A(1|2|7)$, $B(7|2|1)$, $C(1|8|1)$ und $S(9|10|9)$

Das Dreieck ABC soll die Grundfläche, S soll die Pyramidenspitze sein.

Die Ebene, in der die Grundfläche liegt, heiße G.

4.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. **/3**

4.2 Berechnen Sie den Mittelpunkt M des Dreiecks ABC. **/2**

4.3 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Grundebene G.
[***Zur Kontrolle***: $G: x + y + z = 10$] **/5**

4.4 Berechnen Sie den Schnittwinkel der Kante $\overline{BS}$ mit der Ebene G. **/5**

4.5 Bestimmen Sie die Lotgerade der Ebene G durch den Punkt $M(3|4|3)$ und zeigen Sie, dass S auf dieser Geraden liegt. **/4**

Jetzt wird eine neue Pyramide über ABC mit der Spitze P untersucht.

4.6 Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass alle Kanten der Pyramide $ABCP$ gleich lang sind.
[***Zur Kontrolle***: Ein mögliches Ergebnis ist $P(7|8|7)$.] **/6**

4.7 Berechnen Sie die Höhe und das Volumen dieser Pyramide $ABCP$. **/2**

4.8 A und C werden am Punkt $P(7|8|7)$ gespiegelt.
Bestimmen Sie die Spiegelpunkte A' und C' und zeigen Sie, dass das Viereck $AC'A'C$ ein Rechteck ist. **/6**

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Aron möchte nach bestandener Hochschulreifeprüfung ein wenig feiern. Für die Beleuchtung sollen zehn LED-Strahler mit rotem Licht sorgen. Beim nahe gelegenen Baumarkt gibt es sie im Sonderangebot. In einer Schütte liegen 75 verpackte LED-Strahler. Obwohl alle 75 LED-Strahler laut Verpackung rotes Licht spenden sollten, strahlen in Wirklichkeit nur zwölf Exemplare in Rot, 23 Exemplare in Grün und der Rest, also 40 Exemplare, in Blau.
Nichts ahnend greift Aron zu zehn Exemplaren.

5.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit strahlen alle zehn gewählten Strahler in Rot? **/4**

5.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit strahlen genau zwei gewählte Strahler in Rot? **/1**

5.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit strahlen zwei gewählte Strahler in Rot, drei in Grün und die restlichen fünf in Blau? **/4**

So geht es natürlich nicht, sagt sich der Hersteller, als er von seinen Verpackungsproblemen erfährt. Er schafft einen sündteuren Verpackungsautomaten an, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}97$ die LED-Strahler korrekt verpackt.

5.4 Ein kleiner Leuchtenladen nimmt 100 LED-Strahler ab.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 97 Strahler korrekt verpackt? **/6**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens zwei Strahler falsch verpackt?

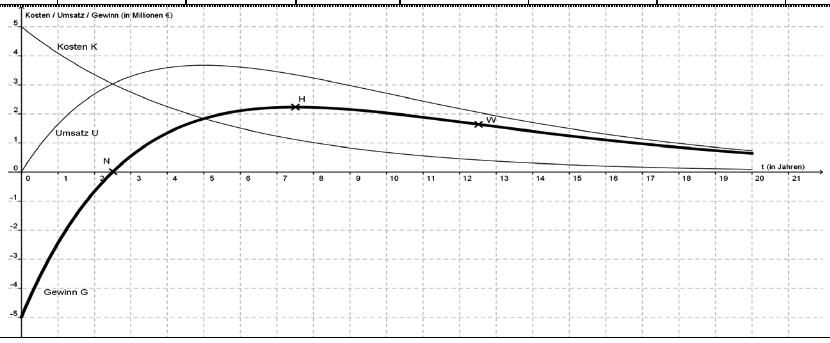
5.5 Wie viele Strahler müsste man bestellen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest 90 % mindestens ein falsch verpackter Strahler dabei ist? **/5**

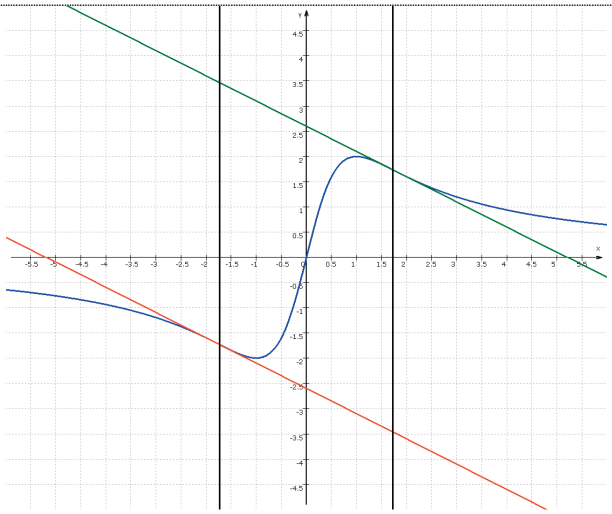
Der Hersteller ist noch nicht zufrieden, er lässt die vom Automaten verpackten Strahler von Mitarbeitern überprüfen. Auch diese Prüfung ist nicht perfekt: 1 % der falsch verpackten Strahler wird als richtig verpackt deklariert (und gelangt daher in den Handel), 2 % der richtig verpackten Strahler werden als falsch verpackt ausgemustert (und gelangen daher nicht in den Handel).

5.6 Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Strahler in den Handel? Erstellen Sie ein Baumdiagramm. **/9**

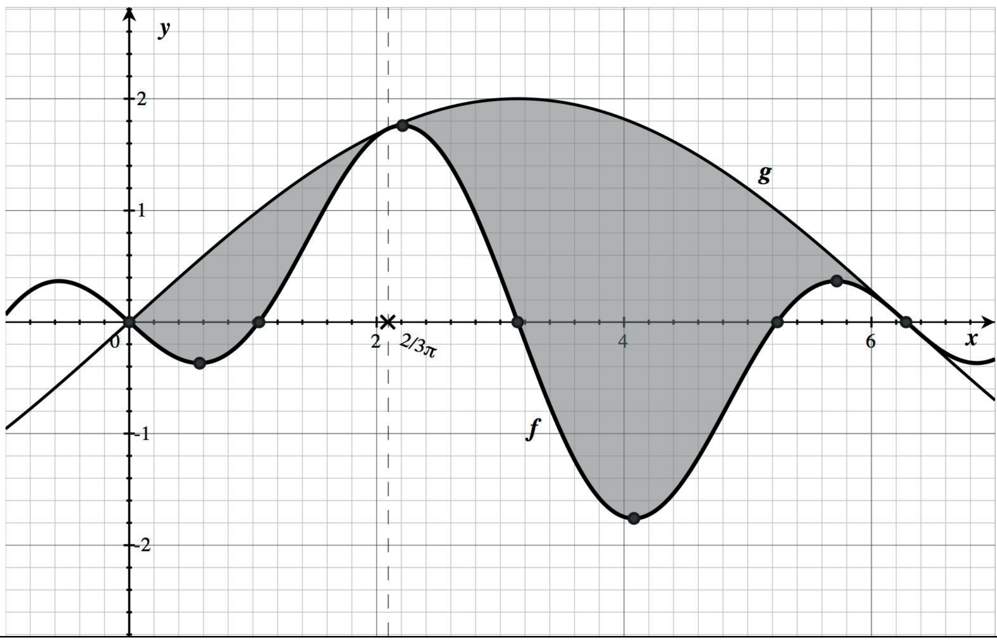
5.7 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Strahler, der im Handel auftaucht, nun falsch verpackt? **/4**

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$G(t)=U(t)-K(t)=(2t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}$</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$G(t_N)=(2t_N-5)\mathrm{e}^{-0,2t_N}=0$; $2t_N-5=0$; $t_N=2,5$
Die Gewinnschwelle wurde nach 2,5 Jahren erreicht.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$G'(t)=2\,\mathrm{e}^{-0,2t}+(2t-5)(-0,2)\cdot\mathrm{e}^{-0,2t}=(-0,4t+3)\mathrm{e}^{-0,2t}$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">1.4</td><td>$G'(t_E)=(-0,4t_E+3)\cdot\mathrm{e}^{-0,2t_E}=0$; $-0,4t_E+3=0$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$t_E=7,5$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$G''(7,5)\approx-0,089<0$; G hat bei $t=7,5$ ein lokales Maximum.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$G(7,5)\approx 2,231$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Der maximale Gewinn von ca. 2,231 Mio. € wurde nach 7,5 Jahren erreicht.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">1.5</td><td>Der „schnellste Rückgang“ tritt im Wendepunkt ein.
$G''(t_W)=(0,08t_W-1)\mathrm{e}^{-0,2t_W}=0$; $0,08t_W-1=0$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$t_W=12,5$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$G'(12,5)\approx-0,1642$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die größte Abnahmegeschwindigkeit mit ca. 164.200 € pro Jahr war nach 12,5 Jahren zu verzeichnen.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.6</td><td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr><tr><td>$G(t)$</td><td>– 5,000</td><td>**– 2,46**</td><td>**0,55**</td><td>1,839</td><td>**2,03**</td><td>**1,25**</td><td>0,64</td></tr></table></td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>Mit dem Integralterm wird der durchschnittliche Gewinn pro Jahr für den Zeitraum von 0 Jahren bis a Jahren berechnet.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>$I(5)=\frac{1}{5}\int_0^5 G(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[(-10t-25)\mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^5\approx-0,518$;
$I(10)\approx 0,808$; $I(15)\approx 1,086$; $I(20)\approx 1,044$
Für das Unternehmen ist ein solch langer Produktionszeitraum sinnvoll, weil der durchschnittliche Jahresgewinn erst nach ca. 15 Jahren ein Maximum erreicht und nach 20 Jahren nur minimal rückläufig ist.
(Das tatsächliche Maximum wird nach rund 16,1 Jahren mit einem durchschnittlichem Jahresgewinn von ca. 1,091 Mio € erreicht.)</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe (Aufgabe 1)</td><td>10</td><td>16</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$f(-x)=\frac{-4x}{x^2+1}=-f(x)$; f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Nachweis $f'(x)$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>$f'(x_E)=0$; $4-4x_E{}^2=0$; $x_{E_1}=-1$; $x_{E_2}=1$
$f''(-1)=2>0$; $T(-1\,|\,-2)$, $f''(1)=-2<0$; $H(1\,|\,2)$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.4</td><td><table><tr><td>x</td><td>-5</td><td>-4</td><td>-2</td><td>1,5</td><td>3,5</td><td>5</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>- 0,77</td><td>-0,94</td><td>- 1,60</td><td>1,85</td><td>1,06</td><td>0,77</td></tr></table></td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
(Geraden zu Aufgabe 2.6)</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>Die Geraden $x=-\sqrt{3}$ und $x=\sqrt{3}$ verlaufen parallel zueinander.
Wegen der Punktsymmetrie sind auch die Tangenten parallel zueinander.
Da je zwei Paare Gegenseiten parallel sind, ist das Viereck ein Parallelogramm.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$t(x)=mx+b$
$m_1=f'(-\sqrt{3})=-0{,}5$ oder $m_2=f'(\sqrt{3})=-0{,}5$
$t_1(x)=-0{,}5x-1{,}5\sqrt{3}\approx-0{,}5x-2{,}60$ $t_2(x)=-0{,}5x+1{,}5\sqrt{3}\approx-0{,}5x+2{,}60$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.7</td><td>Einzeichnen der Tangenten (auf Parallelität achten)</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>und Geraden</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>$A_{\text{Parallelogramm}}=mh=3\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=18$
(m : Mittellinie, $m=1{,}5\sqrt{3}-(-1{,}5\sqrt{3})=3\sqrt{3}$; h : Höhe, $h=2\sqrt{3}$)</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.9</td><td>$f(x_S)=g_t(x_S)$; $\frac{4x_S}{x_S{}^2+1}=t\,x_S$; $-t\,x_S{}^3-t\,x_S+4x_S=0$; $x_{S_1}=0$ entfällt;</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$x_S{}^2-\frac{4}{t}+1=0$; $x_{S_{2/3}}=\pm\sqrt{\frac{4}{t}-1}$; negativer Wert entfällt, $S\left(\sqrt{\frac{4}{t}-1}\,\middle|\,\sqrt{4t-t^2}\right)$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>Zwischensumme (Aufgabe 2)</td><td>10</td><td>17</td><td>2</td></tr>
</table>

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 2)	10	17	2
2.10	$A = 0{,}5\,x\,y$; $A(t) = 0{,}5\sqrt{\frac{4}{t} - 1} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{4}{t} - 1} = 2 - 0{,}5\,t$; $A'(t) = -0{,}5 \neq 0$ Daher gibt es im Intervall $(0;4) = \left]0;4\right[$ kein Extremum. (Da das Intervall offen ist, gibt es auch kein Randextremum.)			4
	Summe (Aufgabe 2)	10	17	6
	Mögliche BE	33		

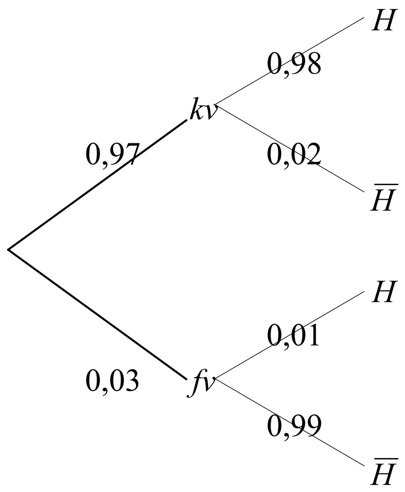
Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	$\sin x_N - \sin 2x_N = 0$	1		
	umgeformt (Additionstheorem): $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ Fallunterscheidung: $\sin x_N = 0$ oder $\cos x_N = \frac{1}{2}$ $x_N = 0; \pi; 2\pi$ oder $x_N = \frac{1}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi$		3	
3.2	$f'(x) = \cos x - 2\cos 2x$ $\cos x_E - 2\cos 2x_E = 0$	2		
	umgeformt (mit Additionstheorem und trigonometrischem Pythagoras): $-4\cos^2 x_E + \cos x_E + 2 = 0$ ergibt quadratische Gleichung $c^2 - \frac{1}{4}c - \frac{1}{2} = 0$ mit Lösungen $c_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$, $c_1 \approx 0{,}843$, $c_2 \approx -0{,}593$		3	
	An den vier Stellen $x_1 = \cos^{-1} c_1 \approx 0{,}57$ und $x_2 = 2\pi - x_1 \approx 5{,}72$ sowie $x_3 = \cos^{-1} c_2 \approx 2{,}21$ und $x_4 = 2\pi - x_3 \approx 4{,}08$		2	
	ergeben sich die Hoch- bzw. Tiefpunkte: $T_1(0{,}57 \mid -0{,}37)$, $H_2(5{,}72 \mid 0{,}37)$, $H_3(2{,}21 \mid 1{,}76)$ und $T_4(4{,}08 \mid -1{,}76)$		2	
3.3		6		
	Zwischensumme (Aufgabe 3)	9	10	0

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 3)	9	10	0
3.4	Differenzformel (Formelsammlung) angewendet ergibt: $\sin x - \sin 2x = 2\sin\frac{x-2x}{2}\,\cos\frac{x+2x}{2} = 2\sin\frac{-x}{2}\,\cos\frac{3x}{2} = -2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{3x}{2}$ (Andere Möglichkeit mit Additionstheorem und Zerlegung $x = \frac{3x}{2} - \frac{x}{2}$ und $2x = \frac{3x}{2} + \frac{x}{2}$)			3
3.5	$\sin x_S - \sin 2x_S = 2\sin\frac{x_S}{2}$	1		
	$-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$ (siehe Formel im Aufgabenblatt) Fallunterscheidung: $\sin\frac{x_S}{2} = 0$ oder $\cos\frac{3x_S}{2} = -1$; $x_S = 0;\, 2\pi$ oder $x_S = \frac{2\pi}{3};\, 2\pi$		3	
3.6	Berührungsnachweis mittels Gleichheit der Ableitungswerte: $g'(x) = \cos\frac{x}{2}$, $g'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ und $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} - 2\cos\frac{4\pi}{3} = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$			3
3.7	Aus 3.5 und 3.6 ergibt sich: $f(x) \le g(x)$ in I Daher kann der Flächeninhalt durch <u>ein</u> bestimmtes Integral berechnet werden. $A = \int_0^{2\pi}\left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x = \left[-4\cos\frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi} = 4{,}5 - (-3{,}5) = 8$ (Bei Berechnung der Teilflächen bis zur Stelle $x = \frac{2\pi}{3}$ und dahinter ergeben sich als Werte 1,25 und 6,75.)		4	
	Summe (Aufgabe 3)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Seitenvektoren berechnen: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$	2		
	Die Seiten sind offensichtlich gleichlang ($a=\sqrt{72}$).		1	
4.2	Im gleichseitigen Dreieck sind alle "Mittelpunkte" gleich, daher kann die Schwerpunktsberechnung verwendet werden. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$, Mittelpunkt $M(3\mid 4\mid 3)$	2		
4.3	$G:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$; $r,s\in\mathbb{R}$, ergibt nach Elimination von r und s die Koordinatenform $G:\ x+y+z=10$.		5	
4.4	Es gilt $\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}2\\8\\8\end{pmatrix}$; ein Normalenvektor von G ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, siehe 4.3. Durch Verwenden der Winkelformel für Gerade und Ebene ergibt sich $\sin\alpha=\frac{\left\lvert\vec{n}\cdot\overrightarrow{BS}\right\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{BS}\right\rvert}=\frac{18}{\sqrt{3}\sqrt{132}}\approx 0{,}9045$ und damit $\alpha\approx 64{,}76°$.		5	
4.5	Lotgerade $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$ Die Gleichung $\begin{pmatrix}9\\10\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ergibt eindeutig $t=6$, also liegt S auf l.	4		
	Zwischensumme (Aufgabe 4)	8	11	0

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	 II	 III
	Übertrag (Aufgabe 4)	8	11	0
4.6	P muss senkrecht über M, also auf l liegen. Falls A verwendet wird: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = \sqrt{72} \cdot \sqrt{72} = 72$			2
	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 24 + 0 \cdot p + 3p^2 = 72$			2
	$24 + 3p^2 = 72$ hat die Lösungen $p_1 = 4$ (und $p_2 = -4$) $P_1(7 \mid 8 \mid 7)$ (und $P_2(-1 \mid 0 \mid -1)$)			2
4.7	Pyramidenhöhe: $h = \left\lvert \overrightarrow{MP} \right\rvert = 4\sqrt{3}$	1		
	Volumen = ein Drittel von Grundfläche mal Höhe = $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{72}\sqrt{72}\right) \cdot 4\sqrt{3} = 72$ oder direkt mit der Volumenformel für ein gleichseitiges Tetraeder: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{72}\right)^3 = 72$	1		
4.8	Spiegelung ergibt: $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$, d. h. $A'(13 \mid 14 \mid 7)$ und entsprechend: $C'(13 \mid 8 \mid 13)$		2	
	Die Seitenvektoren des Vierecks $AC'A'C$ sind dann: $\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$		2	
	Da $AC'A'C$ ein Parallelogramm ist, genügt ein Nachweis: $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{C'A'} = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot (-6) = 0$, denn ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Rechteck.		2	
	Summe (Aufgabe 4)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
5.1	Sei X die Anzahl der gewählten rot strahlenden LED. X ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 75$, $K = 12$, $n = 10$ und $k = 0,1, ...,10$.		3	
	Es gilt $P(\{X = 10\}) = \frac{\binom{12}{10}\cdot\binom{63}{0}}{\binom{75}{10}} \approx 7{,}962\cdot 10^{-11}$.	1		
5.2	$P(\{X = 2\}) = \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{63}{8}}{\binom{75}{10}} \approx 0{,}3084$	1		
5.3	Der Faktor $\binom{63}{8}$ von 5.2 ist zu ersetzen durch $\binom{23}{3}\cdot\binom{40}{5}$.		3	
	Daher gilt $P(\{\text{zwei R-, drei G-, fünf B-LED}\}) = \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{23}{3}\cdot\binom{40}{5}}{\binom{75}{10}} \approx 0{,}09278$. Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit daher deutlich kleiner als bei 5.2.	1		
5.4	Sei Y die Anzahl der korrekt verpackten Strahler. Y ist binomialverteilt mit $n = 100;\ p = 0{,}97;\ k = 0, \ldots, 100$.		2	
	Daher gelten $P(\{Y = 97\}) = \binom{100}{97}\cdot 0{,}97^{97}\cdot 0{,}03^{3} \approx\ 0{,}2275$ und	1		
	$P(\{X \geq 98\}) =$ $\binom{100}{98}\cdot 0{,}97^{98}\cdot 0{,}03^{2} + \binom{100}{99}\cdot 0{,}97^{99}\cdot 0{,}03 + \binom{100}{100}\cdot 0{,}97^{100}\cdot 0{,}03^{0} \approx 0{,}4198$.	3		
	Zwischensumme (Aufgabe 5)	7	8	0

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 5)	7	8	0
5.5	Gefragt ist nach n, so dass $P(\{Y < n\}) \geq 0{,}9$.			2
	Es folgt $1 - P(\{Y = n\}) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \; 0{,}97^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}97)} \approx 75{,}60$. Man müsste daher mindestens 76 Strahler bestellen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest 90 % mindestens ein falsch verpackter dabei sein soll.		3	
5.6	Mit den Abkürzungen *kv*: „korrekt verpackt“ *fv*: „falsch verpackt“ und *H*: „kommt in den Handel“ gilt  		5	
	und daher $P(H) = P(H \cap kv) + P(H \cap fv) =$		1	
	$0{,}97 \cdot 0{,}98 + 0{,}03 \cdot 0{,}01 = 0{,}9506 + 0{,}0003 = 0{,}9509$.	3		
5.7	$P_H(fv) = \frac{P(H \cap fv)}{P(fv)} = \frac{0{,}0003}{0{,}9509} \approx 0{,}0003155 \approx 0{,}032\,\%$			4
	Summe (Aufgabe 5)	10	17	6
	Mögliche BE	33		