Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2009/2010

Fach	**Mathematik (B)**
Prüfungstag	4. Juni 2010
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil; Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (Duden)
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Aus den fünf Aufgaben **müssen** Sie **drei** auswählen. Die **Aufgabe 1** (Exponentialfunktionen) ist eine **Pflichtaufgabe**. Sie **muss** von allen bearbeitet werden! Zwischen **Aufgabe 2** (Gebrochenrationale Funktionen) und **Aufgabe 3** (Trigonometrische Funktionen) müssen Sie **wählen**. Auch zwischen **Aufgabe 4** (Analytische Geometrie) und **Aufgabe 5** (Stochastik) müssen Sie **wählen**. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchstrichene Lösung zählt.**

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: ______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte

Aufgabe Nr.	**Soll %**	**Ist**	**Ist (Zweitkorrektur)**
1 2 oder 3 4 oder 5	34 33 33		
Summe:	100		
Notenpunkte	15	**__ /15 Punkte**	**__ /15 Punkte**
Maluspunkt	**-1**	**__ Punkt**	**__ Punkt**
Insgesamt		**__ Punkte**	**__ Punkte**
Datum, Unterschrift:			

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben seien die Funktionen
f mit $f(x) = 0{,}5\,x \cdot \mathrm{e}^{2-x}$ und F mit $F(x) = (-0{,}5 - 0{,}5\,x) \cdot \mathrm{e}^{2-x}$, $-0{,}5 \leq x \leq 3$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von f. /1

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) = (0{,}5 - 0{,}5\,x) \cdot \mathrm{e}^{2-x}$ /2

1.3 Bestimmen Sie den Extrempunkt und den Wendepunkt von f.
Verwenden Sie $f''(x) = (-1 + 0{,}5\,x) \cdot \mathrm{e}^{2-x}$. /7

[Auf den Nachweis mithilfe von f''' kann verzichtet werden.]

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe der berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite. /6

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	3
$f(x)$				

Der Graph von f, der bereits eingezeichnete Graph von F und eine von Nord nach Süd verlaufende Bahnlinie mit der Gleichung $x = 3$ begrenzen ein Waldstück vollständig.
Eine Einheit sei 1 km.
Ein Weg entlang der x-Achse teilt das Gebiet in einen nördlich der Achse liegenden Nadelwald und einen südlich gelegenen Mischwald.

1.5 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom nördlich gelegenen Nadelwald eingenommen wird. /5

Zeigen Sie zunächst, dass F eine Stammfunktion von f ist.

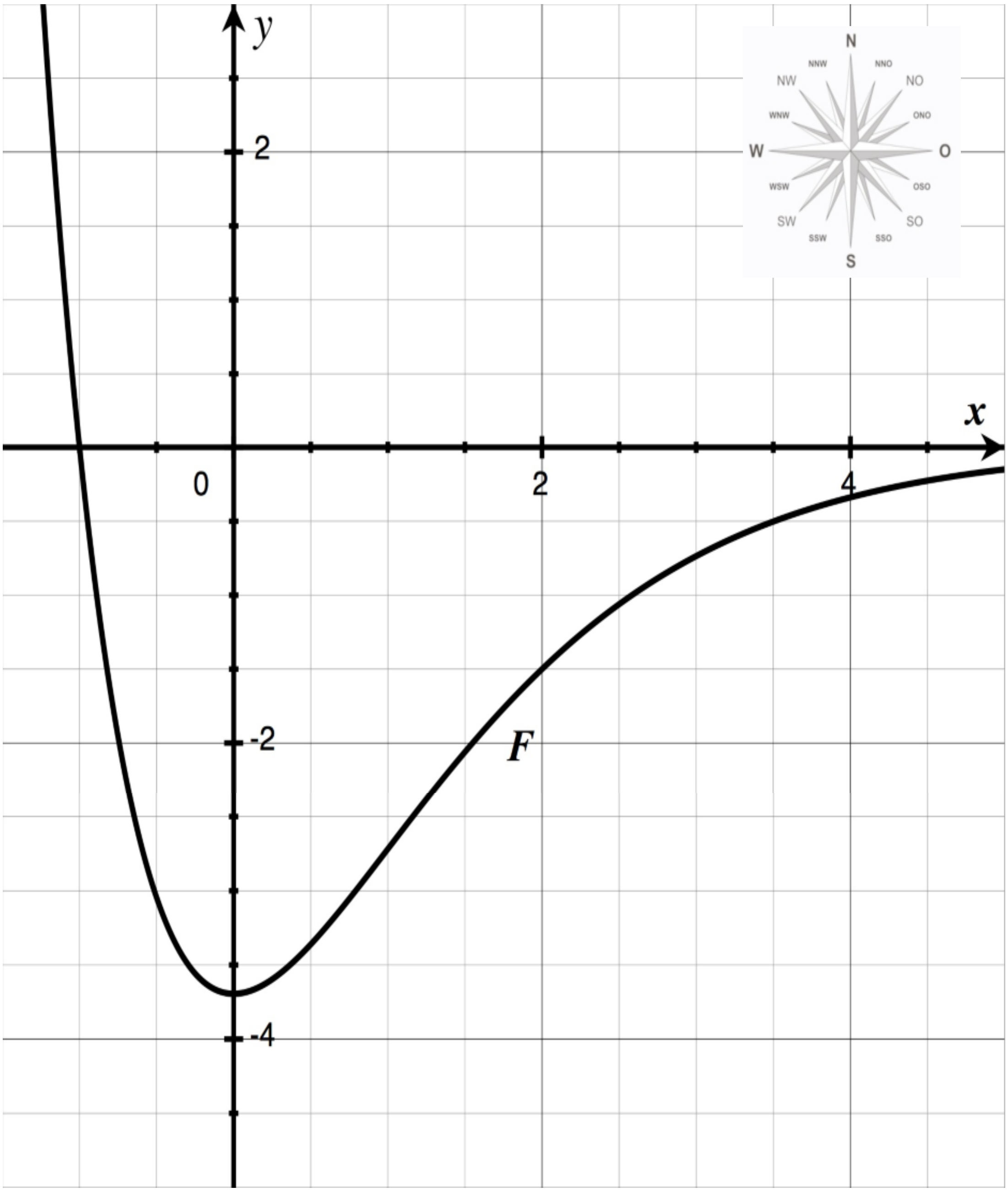
1.6 Am westlichsten Punkt des Waldes soll ein Feuerwachturm entstehen. /4

Berechnen Sie die Koordinaten des Standortes des Turmes.

1.7 Bestimmen Sie die maximale Nord-Süd-Ausdehnung des gesamten Waldgebietes. /9

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

1 Exponentialfunktionen (Fortsetzung)



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Die Funktion f sei gegeben mit $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$ sowie ihren Ableitungen

$f'(x)=\dfrac{6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2}$ und $f''(x)=\dfrac{-18x^2+36x-24}{\left(x^2-2x\right)^3}$.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f von f. **/2**

2.2 Untersuchen Sie f auf Polstellen und ermitteln Sie das Verhalten der Funktion in deren Umgebung. **/6**

2.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote a. **/2**

2.4 Berechnen Sie die Nullstellen von f. **/2**

2.5 Weisen Sie nach, dass gilt: $f'(x)=\dfrac{6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2}$ **/3**

2.6 Ermitteln Sie den Extrempunkt von f. **/4**

2.7 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und die Asymptote a unter Verwendung der berechneten Werte für $-3 \le x \le 5$ in ein Koordinatensystem.

Ergänzen Sie dafür die folgende Wertetabelle: **/8**

x	-3	$-0{,}5$	$0{,}5$	5
$f(x)$				$0{,}8$

2.8 Die Funktion g mit $g(x)=\dfrac{x^2-k\cdot x-3}{x^2-k\cdot x}$ hat einen ähnlichen Graphen wie f.

Bestimmen Sie den Wert k so, dass g seinen Tiefpunkt bei $x_T=2$ hat. **/6**

[Auf den Nachweis mithilfe von g'' kann verzichtet werden.]

3 Trigonometrische Funktionen /33

Eine Bio-Firma möchte ein Logo entwickeln lassen, das einem schlanken Maisblatt ähnelt. Da das Logo zu verschiedenen Zwecken verwendet werden soll, muss es für die elektronische Bearbeitung mathematisch beschrieben und berechnet werden.

Die Blattfläche ist die Fläche, die im ersten Quadranten zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$ liegt und von den Funktionen f und g begrenzt wird:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\pi\left(1 - \cos\frac{x}{4}\right)$$

3.1 Bestätigen Sie, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$ Schnittstellen von f und g sind. /3

3.2 Untersuchen Sie die Funktion f im Intervall $[0; 2\pi]$ auf Extrem- und Wendepunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten. /9

3.3 Vervollständigen Sie die Wertetabelle für f und g und zeichnen Sie das Blatt-Logo in ein Koordinatensystem . /10

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x)$	0			π			2π
$g(x)$	0				π		2π

3.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Blattfläche. /5

3.5 Für die Anfertigung auf Stoffstreifen soll das Logo zwischen zwei parallelen Geraden eingeschlossen werden.

Berechnen Sie dazu die Gleichungen der beiden Tangenten mit dem Anstieg 1, die das Logo von oben bzw. von unten einschließen. /6

4 Analytische Geometrie **/33**

In der folgenden Schrägansicht ist ein Gebäude dargestellt. Es steht in Ost-West-Richtung (y-Richtung). Auf dem Dach befindet sich eine stabförmige senkrechte Antenne.

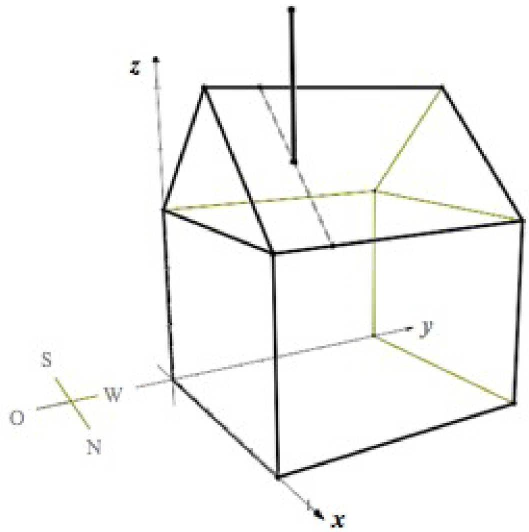
Die Eckpunkte sind

$A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,0\,|\,0)$,
$C(10\,|\,20\,|\,0)$, $D(0\,|\,20\,|\,0)$,

$E(0\,|\,0\,|\,6)$, $F(10\,|\,0\,|\,6)$,
$G(10\,|\,20\,|\,6)$, $H(0\,|\,20\,|\,6)$,

$I(5\,|\,0\,|\,10)$, $J(5\,|\,20\,|\,10)$

und die Antennenspitze
ist $K(7{,}5\,|\,4\,|\,12)$.



4.1 Bestimmen Sie für die Nord-Wand $BCGF$ Ebenengleichungen in Parameter-, Normalen- und in Koordinatenform. **/6**

4.2 Geben Sie eine Koordinatengleichung für die nördliche, schräge Dachebene D_{Nord} an. **/4**

[Zur Kontrolle: z. B. $4x + 5z = 70$]

4.3 Berechnen Sie den Neigungswinkel der nördlichen Dachebene D_{Nord}. **/4**

4.4 Berechnen Sie die Antennenlänge von der Spitze K bis zum Dach. **/5**

4.5 Untersuchen Sie, ob die Antennenspitze vom Punkt $P(15\,|\,4\,|\,1{,}5)$ aus sichtbar ist. **/6**

Die Sonne scheint mittags im Winkel α von Süden auf das Haus. Das Licht fällt also in Richtung des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\alpha \end{pmatrix}$, $0 \le \alpha \le 90°$, ein. Dabei entsteht von K ein Schattenpunkt K' auf dem Nord-Dach oder auf dem Erdboden.

4.6 Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schattenpunktes K' in Abhängigkeit vom Parameter α und geben Sie an, bis zu welchem Winkel α der Punkt auf dem Erdboden liegt. **/8**

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Auf einer fernen Insel wird ein neues Lottospiel „2 aus 16“ angeboten. Pro Woche gibt es eine Ziehung. Die Lottogesellschaft schüttet Woche für Woche 50 % ihrer Einnahmen an Spieler mit zwei Richtigen aus. Alle anderen gehen leer aus.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Zahlen auf den gezogenen Kugeln Nachbarn sind, also ein Paar $(i, i+1)$ mit $i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ bilden, beträgt $p = \frac{1}{8}$.

5.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, in einem Tipp zwei Richtige anzukreuzen. /4

5.2 Hat jemand, der die Zahlen 1 und 2 ankreuzt, eine geringere Chance auf zwei Richtige als jemand, der die Zahlen 3 und 7 ankreuzt? /2

5.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in den kommenden drei Wochen keine Nachbarn gezogen werden. /4

5.4 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in den kommenden fünf Wochen zumindest bei zwei Ziehungen Nachbarn vorkommen. /4

5.5 Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % zumindest einmal Nachbarn gezogen werden: /5

5.6 Mit wie vielen Ziehungen mit Nachbarn kann man in den kommenden 80 Wochen rechnen? /1

5.7 Begründen Sie mithilfe eines zweistufigen Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit für eine Ziehung mit Nachbarn $p = \frac{1}{8}$ beträgt. Bei der ersten Stufe unterscheiden Sie bitte nur zwischen der Ziehung einer Kugel mit der Nummer 1 oder 16 und der Ziehung einer Kugel mit den Nummern 2 bis 15. /7

Unsere Insulaner halten Ziehungen mit Nachbarn für extrem unwahrscheinlich. Daher geben lediglich 5 % von ihnen stets Tipps mit Nachbarn ab, die restlichen 95 % hingegen nur Tipps ohne Nachbarn.

5.8 Der **durchschnittliche** Gewinn eines Einzelspielers für zwei Richtige mit Nachbarn werde mit N, der für zwei Richtige ohne Nachbarn werde mit $\cancel{N}$ bezeichnet.

Bestimmen Sie $\frac{N}{\cancel{N}}$. /6

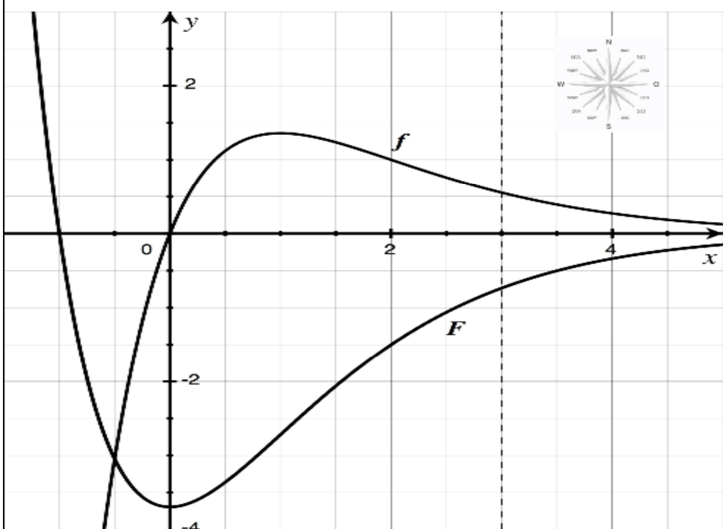
[Gehen Sie hierbei davon aus, dass Woche für Woche die gleiche Anzahl Tipps abgegeben werden.]

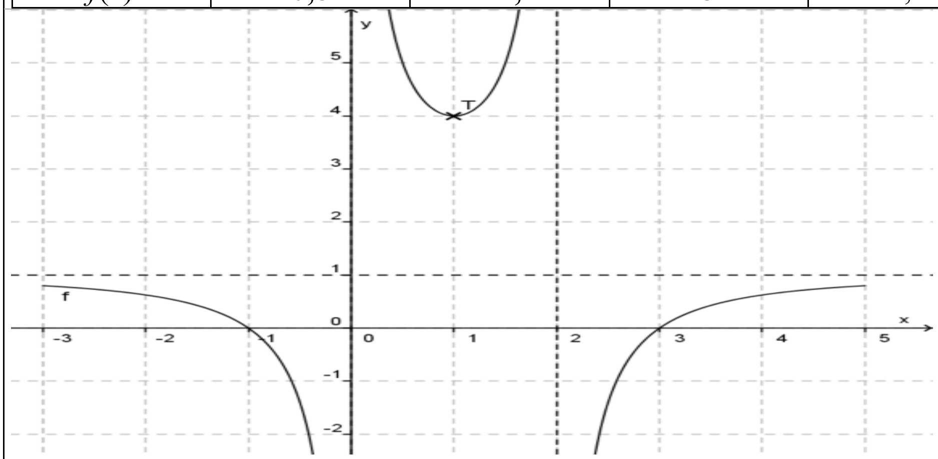
Welche Schlussfolgerung ergibt sich für das Spielverhalten?

Teil-aufgaben		BE in AB I	II	III
1.1	$x_N = 0$	1		
1.2	$f'(x) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{2-x} + 0{,}5x\,\mathrm{e}^{2-x}(-1) = (0{,}5 - 0{,}5x)\mathrm{e}^{2-x}$		2	
1.3	$(0{,}5 - 0{,}5x_E)\mathrm{e}^{2-x_E} = 0$; $x_E = 1$; $f''(1) = -0{,}5\,\mathrm{e} < 0$;		3	
	$H(1 \mid 1{,}36)$	1		
	$(-1 + 0{,}5x_W)\mathrm{e}^{2-x_W} = 0$; $x_W = 2$;		2	
	$W(2 \mid 1)$	1		
1.4	Wertetabelle (siehe unten)	4		
	Graph (siehe unten)		2	
1.5	$F'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{2-x} + (-0{,}5 - 0{,}5x)\mathrm{e}^{2-x}(-1) = (-0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5x)\mathrm{e}^{2-x} = 0{,}5x\,\mathrm{e}^{2-x} = f(x)$		2	
	$A = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-0{,}5 - 0{,}5x)\mathrm{e}^{2-x}\right]_0^3 \approx -0{,}736 - (-3{,}695) \approx 2{,}96$		2	
	Die Waldfläche beträgt 2,96 km^2 oder 296 ha.	1		
1.6	$f(x_S) = F(x_S)$; $0{,}5x_S\,\mathrm{e}^{2-x_S} = (-0{,}5 - 0{,}5x_S)\mathrm{e}^{2-x_S}$; $x_S = -0{,}5$		3	
	$S(-0{,}5 \mid -3{,}05)$	1		
1.7	$d(x) = f(x) - F(x)$; $d(x) = (0{,}5 + x)\mathrm{e}^{2-x}$			2
	$d'(x) = (0{,}5 - x)\mathrm{e}^{2-x}$; $d'(x_E) = 0$; $x_E = 0{,}5$; $d''(x) = (x - 1{,}5)\mathrm{e}^{2-x}$; $d''(0{,}5) \approx -4{,}48 < 0$; Maximum			6
	$d(0{,}5) \approx 4{,}48$ Die größte Ausdehnung beträgt 4,48 km.	1		
	Summe (Aufgabe 1)	10	16	8
	Mögliche BE	34		

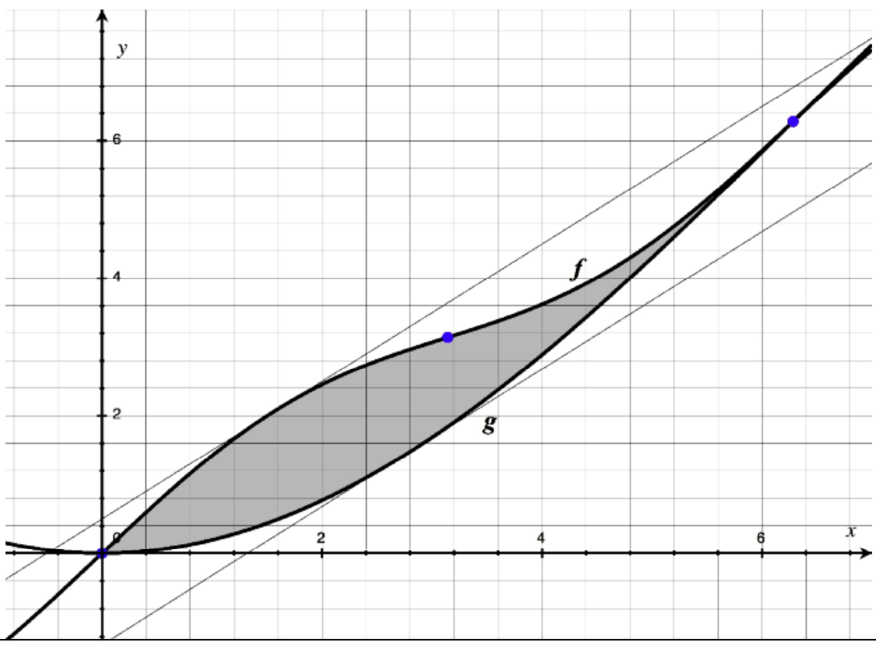
Zu 1.4:

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	3
$f'(x)$	**$-3{,}05$**	**$1{,}12$**	**$1{,}24$**	**$0{,}55$**



<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2"></th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$N(x_0)=x_0^{\,2}-2x_0=0;\ x_{0_1}=0;\ x_{0_2}=2;\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.2</td><td>$N(0)=0\wedge Z(0)\neq 0$ bzw. $N(2)=0\wedge Z(2)\neq 0;\ \underline{\underline{x_{P_1}=0}};\ \underline{\underline{x_{P_2}=2}}$ sind Polstellen.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Durch Grenzwertbetrachtungen bzw. Testeinsetzungen ergibt sich:
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ bzw. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=+\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=-\infty$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>$f(x)=1-\dfrac{3}{x^2-2x};\ a(x)=1$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>$Z(x_N)=x_N^{\,2}-2x_N-3=0;\ \underline{\underline{x_{N_1}=-1}};\ \underline{\underline{x_{N_2}=3}}$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>$f(x)=1-3\left(x^2-2x\right)^{-1}$
$f'(x)=3\left(x^2-2x\right)^{-2}\cdot(2x-2)=\underline{\underline{\dfrac{6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2}}}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$f'(x_E)=\dfrac{6x_E-6}{\left(x_E^2-2x_E\right)^2}=0;\ 6x_E-6=0;\ \underline{x_E=1}$
$f''(1)=6>0;\ f$ hat bei $x_E=1$ ein lokales Minimum.
$f(1)=4;\ \underline{\underline{T(1\,|\,4)}}$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.7</td><td><table><tr><td>x</td><td>-3</td><td>$-0{,}5$</td><td>$0{,}5$</td><td>5</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>**0,8**</td><td>**–1,4**</td><td>**5**</td><td>0,8</td></tr></table></td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Zeichnen der Asymptote</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Zwischensumme (Aufgabe 2)</td><td>10</td><td>17</td><td>0</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 2)	10	17	0
2.8	$g'(x) = \frac{(2x-k)\cdot(x^2-kx)-(x^2-kx-3)\cdot(2x-k)}{(x^2-kx)^2} = \frac{6x-3k}{(x^2-kx)^2}$ $g'(2) = \frac{12-3k}{(4-2k)^2} = 0; \quad 12-3k = 0; \quad \underline{\underline{k=4}}$			6
	Summe (Aufgabe 2)	10	17	6
	Mögliche BE	33		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>$f(0)=g(0)=0$
$f(2\pi)=g(2\pi)=2\pi$
Schnittpunkte $S_1(0\mid 0)$ und $S_2(2\pi\mid 2\pi)$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$f'(x)=1+\frac{1}{2}\cos x$; $0=1+\frac{1}{2}\cos x_E$; $-2=\cos x_E$ hat keine Lösung,
d. h. f hat keine Extremstellen.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f''(x)=-\frac{1}{2}\sin x$; $\frac{1}{2}\sin x_W=0$; $x_{W_1}=0$; $x_{W_2}=\pi$; $x_{W_3}=2\pi$
ergibt drei Wendepunkte: $W_1(0\mid 0)$; $W_2(\pi\mid\pi)$; $W_3(2\pi\mid 2\pi)$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Test mit $f'''(x)=-\frac{1}{2}\cos x$; $f'''(x_{W_i})=\pm\frac{1}{2}\neq 0$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>0</th><th>$\frac{\pi}{3}$</th><th>$\frac{2\pi}{3}$</th><th>π</th><th>$\frac{4\pi}{3}$</th><th>$\frac{5\pi}{3}$</th><th>2π</th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>**1,48**</td><td>**2,53**</td><td>π</td><td>**3,76**</td><td>**4,80**</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0</td><td>**0,21**</td><td>**0,84**</td><td>**1,84**</td><td>π</td><td>**4,66**</td><td>2π</td></tr>
</table>
</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Zwischensumme (Aufgabe 3)</td><td>10</td><td>12</td><td>0</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 3)	10	12	0
3.4	f liegt über g. $A=\int_0^{2\pi}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ $A=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos x-\left(2\pi x-8\pi\sin\frac{x}{4}\right)\right]_0^{2\pi}=\left(-\frac{1}{2}+8\pi-2\pi^2\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\approx 5{,}39$		5	
3.5	Ansatz für die Geraden: $t(x)=mx+n;\ m=1$ obere Gerade: $f'(x_B)=1;\ 1+\frac{1}{2}\cos x_B=1$ ergibt $x_{B_1}=\frac{\pi}{2}$ ($x_{B_2}=\frac{3\pi}{2}$ entfällt) und $t(x_B)=f(x_B)$, d. h. $\frac{\pi}{2}+n=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$, ergibt $n=0{,}5$. $t_{\text{oben}}(x)=x+0{,}5$			3
	untere Gerade: $g'(x_B)=1;\ g'(x_B)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{x_B}{4}=1$ ergibt $x_B\approx 2{,}76$ und $t(x_B)=g(x_B)$, d. h. $2{,}76+n=2\pi\left(1-\cos\frac{2{,}76}{4}\right)$, ergibt $n\approx -1{,}32$. $t_{\text{unten}}(x)=x-1{,}32$			3
	Summe (Aufgabe 3)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2"></th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Mögliche Formen:

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix};\ r,s \in \mathbb{R}$

Normalenform: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform: $10x = 100$</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>D_{Nord}: Richtungsvektoren: $\overrightarrow{FI} = \begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}$

Normalenbedingung/Gleichungssystem: $-5x + 4z = 0$ und $20y = 0$

ergibt z. B. Normalenvektor: $\begin{pmatrix}-80\\0\\-100\end{pmatrix}$

also Koordinatengleichung z. B. $4x + 5z = 70$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Neigungswinkel α_{Dach} gleich Winkel zwischen der Normalen und z-Richtung:

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 5 = \sqrt{4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2} \cdot \cos\alpha_{\text{Dach}}$

$5 = \sqrt{41} \cdot \cos\alpha_{\text{Dach}};\qquad \cos\alpha_{\text{Dach}} \approx 0{,}781$

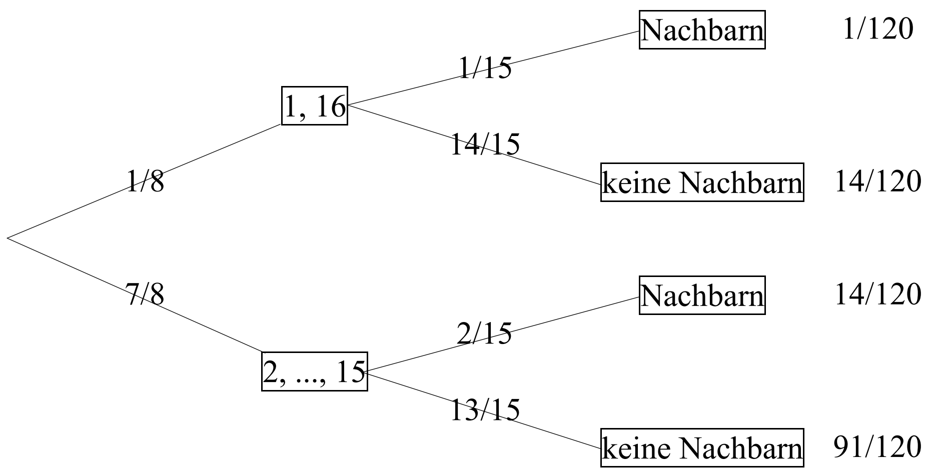
Der Neigungswinkel ist dann $\alpha_{\text{Dach}} \approx 38{,}7^\circ$.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Die Antennengerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}7{,}5\\4\\12\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$, schneidet die Fläche D_{Nord}:

$4 \cdot 7{,}5 + 5 \cdot (12 - r) = 70$; d. h. $r = 4$; also im Punkt $(7{,}5 \mid 4 \mid 8)$.

Die Antenne hat die Länge 4.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Zwischensumme (Aufgabe 4)</td><td>10</td><td>9</td><td>0</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 4)	10	9	0
4.5	Der Sehstrahl $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$, trifft die Nordwand-Ebene im Punkt $(10 \mid 4 \mid 8{,}5)$. Herleitung (mit **4.1**): $10 \cdot (15 - 7{,}5r) = 100;\ r = \frac{2}{3}$ Er liegt damit über der Traufhöhe $z = 6$. Also ist die Antennenspitze sichtbar.		6	
4.6	Schattenstrahl $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\alpha \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$		2	
	Erdboden-Bedingung: $12 - r\tan\alpha = 0;\ r = \frac{12}{\tan\alpha}$ x-Koordinate der Schattenspitze K': $x = 7{,}5 + \frac{12}{\tan\alpha}$ d. h. mit größerem Sonnenwinkel liegt K' näher am Haus.			3
	Größtmöglicher Sonnenwinkel α_T bedeutet z. B.: Schattenstrahl s trifft die Traufe im Punkt $T(10 \mid 4 \mid 6)$. $\begin{array}{lcl} 7{,}5 + r_T & = & 10 \\ 12 - r_T \tan\alpha_T & = & 6 \end{array}$ $\quad r_T = 2{,}5;\ \tan\alpha_T = 2{,}4;\ \alpha_T \approx 67{,}4°$ Ergebnis: Solange die Sonne mittags nicht höher als 67,4° steht, liegt der Schattenpunkt der Antennenspitze auf dem Erdboden. (In Berlin also immer ☺ !)			3
	Summe (Aufgabe 4)	10	17	6
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
5.1	Sei R die Anzahl der Richtigen. R ist hypergeometrisch verteilt mit $N=16$, $K=2$, $n=2$ und $k=0;1;2$.		3	
	Daher gilt $P(\{R=2\})=\frac{1}{\binom{16}{2}}=\frac{1}{120}$.	1		
5.2	Nein, alle Tipps haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{120}$.		2	
5.3	Sei X die Anzahl der Ziehungen mit Nachbarn. X ist binomialverteilt mit $p=\frac{1}{8}$ und bei diesem Aufgabenteil $n=3$ und $k=0$.		2	
	$P(\{X=0\})=\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0{,}6699$	2		
5.4	Mit $n=5$ gilt $P(\{X\geq 2\})=1-P(\{X=0\})-P(\{X=1\})=$ $1-\left(\frac{7}{8}\right)^5-\binom{5}{1}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^4\approx 0{,}1207$.	4		
5.5	Gesucht ist das kleinste n, so dass $P(\{X\geq 1\})=1-P(\{X=0\})\geq 0{,}99$. Es folgt $0{,}01\geq\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^n$, also $n\geq\frac{\lg 0{,}01}{\lg\frac{7}{8}}\approx 34{,}49$, also $n=35$.		5	
5.6	$E(X)=n\cdot p=80\cdot\frac{1}{8}=10$	1		
	Zwischensumme (Aufgabe 5)	8	12	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Übertrag (Aufgabe 5)	8	12	0
5.7			5	
	Am Baumdiagramm kann abgelesen werden, dass $p = \frac{1}{120} + \frac{14}{120} = \frac{1}{8}$.	2		
5.8	Von den 120 möglichen Ziehungen sind 15 **mit** Nachbarn, 105 **ohne** Nachbarn. Andererseits werden 5 % der Tipps **mit** Nachbarn und 95 % der Tipps **ohne** Nachbarn abgegeben. Auf lange Sicht werden zwei **benachbarte** Richtige daher von $\frac{1}{15} \cdot 5\% = \frac{1}{3}\%$ der Spieler, zwei **nicht benachbarte** Richtige aber von $\frac{1}{105} \cdot 95\% = \frac{19}{21}\%$ der Spieler getippt. Die konstante Ausschüttung verteilt sich bei zwei **benachbarten** Richtigen daher im Durchschnitt auf $\frac{1}{3}\%$ der Spieler, bei zwei **nicht benachbarten** Richtigen aber auf $\frac{19}{21}\%$ der Spieler. Daher gilt $\frac{N}{\cancel{N}} = \frac{\frac{19}{21}}{\frac{1}{3}} = \frac{19}{7}$. Auf dieser Insel ist es günstig, Nachbarn zu tippen. Dadurch erhöht sich zwar nicht die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen (sie ist für alle Spieler gleich), aber wenn man gewinnt, erhält man im Mittel mehr ausgezahlt.			6
	Summe (Aufgabe 5)	10	17	6
	Mögliche BE	33		

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2010 Mathematik Aufgabenvorschlag B

Schule ______________________ **Lehrkraft** ______________________

Gutachten für ______________________

Aufgabe 5 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Auf-gaben-teil	Erwartetes Ergebnis	erreich-bare BE	erreichte BE	Begutachtung
5.1	Bestimmung einer Verteilung (hypergeometrische V.)	3		
	Berechnung einer Wahr-scheinlichkeit (1/120)	1		
5.2	Berechnung zweier Wahr-scheinlichkeiten (1/120)	2		
5.3	Bestimmung einer Verteilung (Binomialverteilung)	2		
	Berechnung einer Wahr-scheinlichkeit (0,6699)	2		
5.4	Berechnung einer Wahr-scheinlichkeit (0,1207)	4		
5.5	Lösung einer Ungleichung ($n = 35$)	5		
5.6	Berechnung eines Erwartungs-wertes (10)	1		
5.7	Baumdiagramm	5		
	Berechnung einer Wahr-scheinlichkeit (0,125)	2		
5.8	Bestimmung von $N/\overline{N} = 19/7$, Schlussfolgerung	6		
	Summe	**33**	**0**	