



**Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule/FOS 13 im Schuljahr 2021/2022**

Fach	Mathematik (A)
<h1>Nur für die Lehrkraft</h1>	
Prüfungstag	25.05.2022
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmiereteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.
Erwartungshorizonte	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.	Soll
1	34
2	33
3	33
Summe¹:	Je nach Wahl 67 oder 66

¹ Jeder Prüfling bearbeitet nur zwei Aufgaben

1 Exponentialfunktion

/34

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 4x^2 \cdot e^{-0,5x}, D_f = \mathbb{R}.$$

1.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. **/3**

1.2 Zeigen Sie, dass $f'(x) = (8x - 2x^2) \cdot e^{-0,5x}$ gilt. **/3**

1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten und Art der Extrempunkte von f . **/7**
[Hinweis: Ohne Nachweis darf verwendet werden: $f''(x) = (x^2 - 8x + 8) \cdot e^{-0,5x}$]

1.4 Der Graph von f hat zwei Wendepunkte. **/4**
Zeigen Sie, dass die beiden Wendepunkte an den Stellen $x_1 \approx 1,17$ und $x_2 \approx 6,83$ liegen und geben Sie die Koordinaten der Wendepunkte an.
[Hinweis: Auf den Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

x	-1	1	2	4	6	8	9	10
$f(x)$	6,59			8,66				2,70

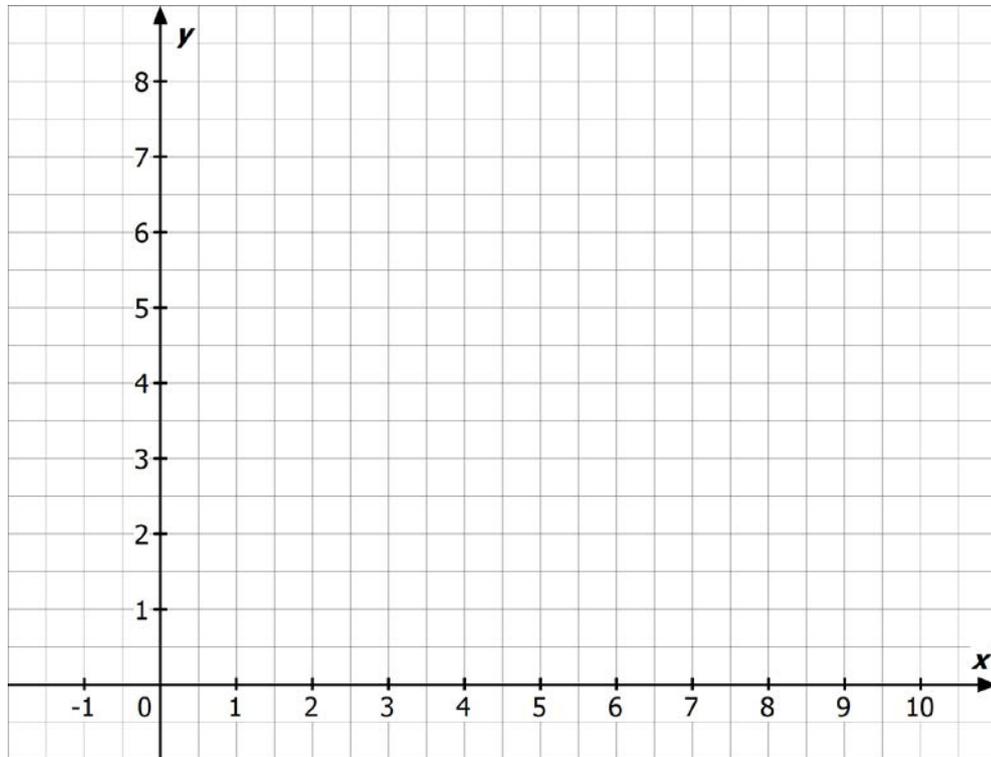
Zeichnen Sie unter Verwendung aller Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 10$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

1.6 Die Gerade g schneidet den Graphen von f in den Punkten $P(-1|f(-1))$ und $Q(9|f(9))$. **/4**
Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem ein.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Geraden.

1.7 Weisen Sie nach, dass F mit $F(x) = (-8x^2 - 32x - 64) \cdot e^{-0,5x}$ eine Stammfunktion **/3**
von f ist.

1.8 Im Bereich $-1 \leq x \leq 9$ schließen der Graph von f und die Gerade g eine Fläche ein, **/5**
die aus zwei Teilflächen besteht.
Schraffieren Sie die Fläche.
Erläutern Sie, wie vorgegangen werden muss, um den Flächeninhalt dieser Fläche zu berechnen.
Führen Sie dabei keine Berechnungen durch!

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5, 1.6 und 1.8

2 Gebrochenrationale Funktionen**/33**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} + 2 = \frac{2x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$. Der Graph der Funktion ist G_f .

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f zwei Polstellen besitzt. **/5**
 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Polstellen.
 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

2.2 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den **/4**
 Koordinatenachsen.

2.3 Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion f . **/6**
 Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion keine Extrempunkte besitzt.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2}$.]

2.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x	-5	-3	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1,5	3	5
$f(x)$	1,52	0,80	3,71		2,27		1,33			2,48

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von f im Intervall $[-5; 5]$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite** ein.

Gegeben ist eine lineare Funktion g mit $g(x) = -\frac{8}{7}x + 2$.

2.5 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen g und f an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5$ und **/4**
 $x_3 = -1,5$ schneiden.

2.6 Zeichnen Sie den Graphen von g und die Schnittpunkte der Graphen g und f in das **/2**
Koordinatensystem auf der folgenden Seite ein.

2.7 Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) = f(x) - 2$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist. **/3**

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

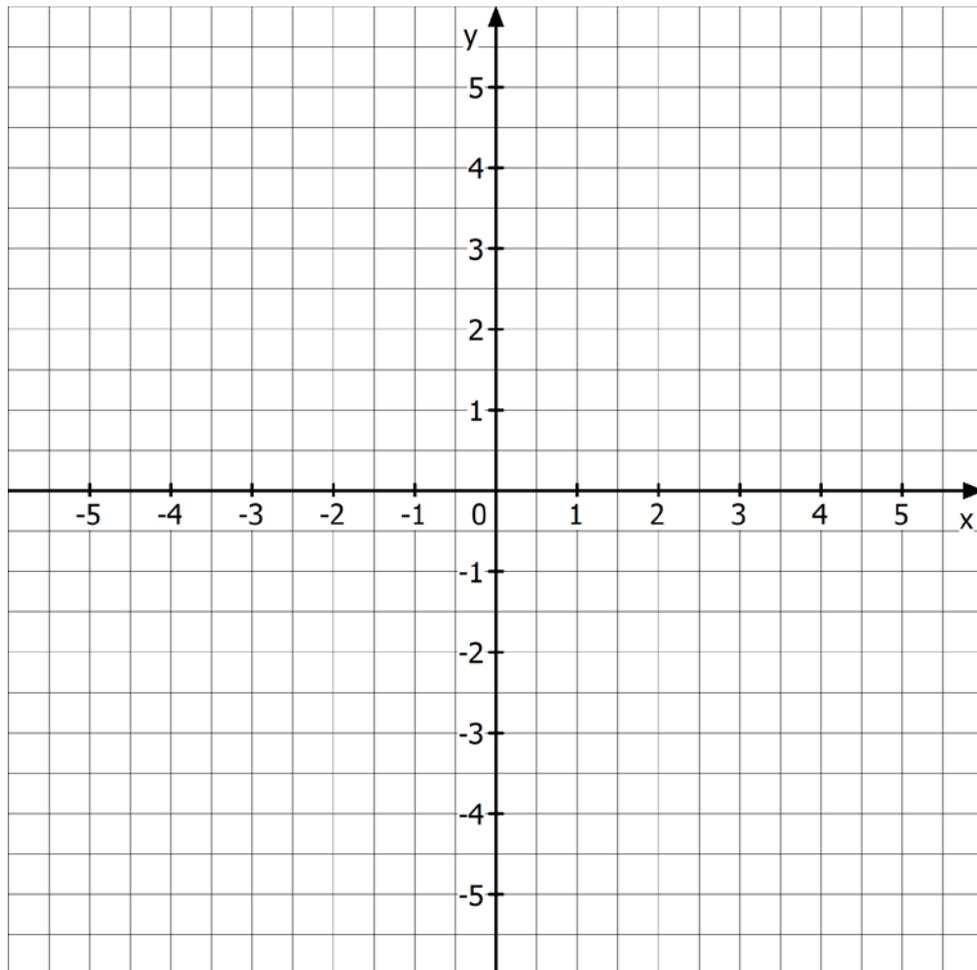
2.8 Begründen Sie ohne eine Stammfunktion zu bilden, dass gilt:

/3

$$\int_{-1,5}^{1,5} (f(x) - g(x)) dx = 0.$$

Sie können dabei die Aussage aus der Teilaufgabe 2.7 verwenden.

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.4 und 2.6:



3 Analytische Geometrie

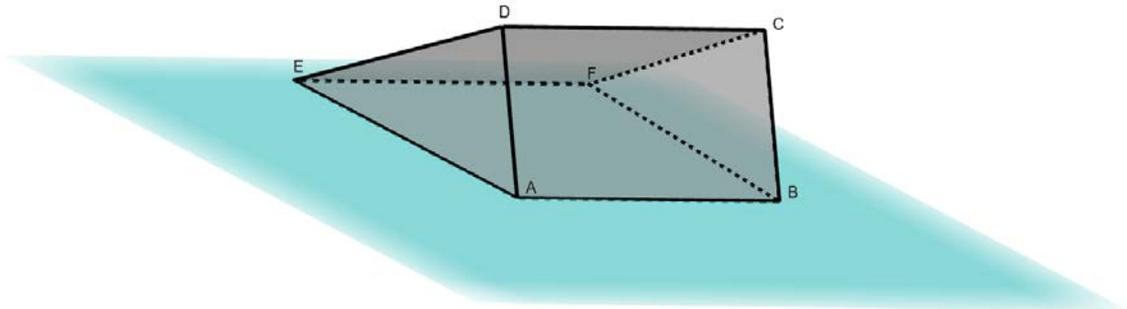
/33

Die Abbildung zeigt das Modell eines Gebäudes auf einer schiefen Ebene.

In diesem Modell haben die Eckpunkte des Gebäudes folgende Koordinaten:

$A(0|0|0)$, $B(-32|24|0)$, $C(-33,8|21,6|21)$ und $D(-1,8|-2,4|21)$, $E(-27|-36|15)$ und $F(-63|-9|15)$.

Es gilt: 1 LE = 1 cm.



- 3.1** Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck. /5
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks.
- 3.2** Weisen Sie nach, dass das Dreieck ADE rechtwinklig ist. /4
- 3.3** Geben Sie eine Gleichung der Ebene K , in der das Dreieck ADE liegt, in Parameterform an. /5
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene K in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: $K : -4x + 3y = 0$.]

Die Punkte A , B und E liegen in der Ebene H mit der Gleichung $H: 3x + 4y + 15z = 0$.

- 3.4** Weisen Sie nach, dass der Punkt F in der Ebene H liegt. /1
- 3.5** Ermitteln Sie den Winkel, unter dem die Ebene H gegenüber der Horizontalen ansteigt. /4
- 3.6** Weisen Sie nach, dass das Viereck $CDEF$ ein Trapez, aber kein Rechteck ist. /5
- 3.7** Zeigen Sie, dass das Dreieck EAD senkrecht zur Ebene H liegt. /4
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes D zur Ebene H .

Sonnenstrahlen treffen aus der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix}$ auf das Modell. Dabei wirft das Gebäudemodell einen Schatten auf die schiefe Ebene.

- 3.8** Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes von D . /5



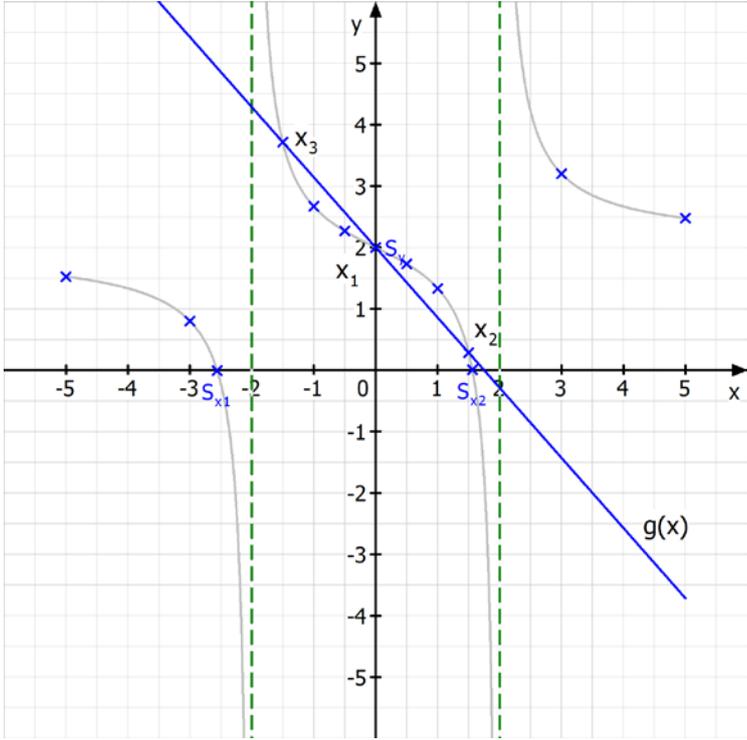
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	$S_y : f(0) = 0$ $S_y(0 0)$	1		
	$S_x : f(x) = 0$ $4x^2 \cdot e^{-0,5x} = 0$ $x_{1/2} = 0$ $S_x(0 0)$ $e^{-0,5x} \neq 0$			
1.2	$f(x) = 4x^2 \cdot e^{-0,5x}$ $f'(x) = 8x \cdot e^{-0,5x} + 4x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5)$ $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (8x - 2x^2)$		3	
1.3	$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$ $f'(x) = (8x - 2x^2) \cdot e^{-0,5x} = 0$ $e^{-0,5x} \neq 0$ $8x - 2x^2 = 0$ $2x(4 - x) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ $f''(0) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt } T(0 0)$ $f''(4) \approx -1,08 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$ $f(4) = 8,66 \quad \Rightarrow \quad H(4 8,66)$		7	
1.4	$f''(x) = 0$ $f''(x) = (x^2 - 8x + 8) \cdot e^{-0,5x} = 0$ $e^{-0,5x} \neq 0$ $x^2 - 8x + 8 = 0$ $x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 8}$ $x_1 \approx 1,17$ $f(1,17) \approx 3,05$ $W_1(1,17 3,05)$ $x_2 \approx 6,83$ $f(6,83) \approx 6,13$ $W_2(6,83 6,13)$		4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																				
		I	II	III																		
1.5	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>6,59</td> <td>2,43</td> <td>5,89</td> <td>8,66</td> <td>7,17</td> <td>4,69</td> <td>3,60</td> <td>2,70</td> </tr> </table>	x	-1	1	2	4	6	8	9	10	f(x)	6,59	2,43	5,89	8,66	7,17	4,69	3,60	2,70	2		
	x	-1	1	2	4	6	8	9	10													
f(x)	6,59	2,43	5,89	8,66	7,17	4,69	3,60	2,70														
	3																					
Hinweis: Die Gerade gehört zu 1.6.																						
1.6	$g(x) = mx + n$ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6,59 - 3,60}{-1 - 9} \approx -0,30$ P(-1 f(-1)) einsetzen ergibt $6,59 = -0,30 \cdot (-1) + n$ $n = 6,29$ Geradengleichung: $g(x) = -0,30x + 6,29$ Einzeichnen ins Koordinatensystem	1	3																			
1.7	$F'(x) = f(x)$ $F(x) = (-8x^2 - 32x - 64) \cdot e^{-0,5x}$ $F'(x) = (-16x - 32) \cdot e^{-0,5x} + (-8x^2 - 32x - 64) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$ $F'(x) = [-16x - 32 + 4x^2 + 16x + 32] \cdot e^{-0,5x}$ $F'(x) = 4x^2 \cdot e^{-0,5x} = f(x)$		3																			
1.8	Schraffur Beschreibung des Vorgehens: <ul style="list-style-type: none"> - Schnittstelle x_s der Graphen von f und g bestimmen - Für das Intervall $[-1; x_s]$ muss $g \cdot f$ integriert werden, für $[x_s; 9]$ muss $f \cdot g$ integriert werden - Stammfunktionen $G \cdot F$ bzw. $F \cdot G$ bilden, Intervallgrenzen einsetzen - Flächeninhalte der Teilflächen addieren 		1	4																		
Summen der BE in den Anforderungsbereichen		6	24	4																		
Summe der BE		34																				

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																								
		I	II	III																						
2.1	$N(x) = 0$ $0 = x^2 - 4$ $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ $Z(x_1) \neq 0$ und $Z(x_2) \neq 0 \Rightarrow$ der Graph von f hat zwei Polstellen Verhalten an beiden Polstelle (Testeinsetzungen): VZW von - nach + $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$	5																								
2.2	$S_y : f(0) = 2 \Rightarrow S_y(0 2)$ $S_x : Z(x) = 0$ $0 = 2x^2 + 2x - 8$ $0 = x^2 + x - 4$ $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} \Rightarrow S_{x_1}(-2,56 0)$ und $S_{x_2}(1,56 0)$	4																								
2.3	1. Ableitung: $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4) - 4x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2}$ Extrempunkt: $f'(x) = 0$ $0 = -2x^2 - 8$ $x^2 = -4 \Rightarrow$ n.l. \Rightarrow es liegen keine Extrempunkte vor		3																							
2.4	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>-5</td> <td>-3</td> <td>-1,5</td> <td>-1</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>1</td> <td>1,5</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>1,52</td> <td>0,80</td> <td>3,71</td> <td>2,67</td> <td>2,27</td> <td>1,73</td> <td>1,33</td> <td>0,29</td> <td>3,20</td> <td>2,48</td> </tr> </table>	x	-5	-3	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1,5	3	5	f(x)	1,52	0,80	3,71	2,67	2,27	1,73	1,33	0,29	3,20	2,48	2		
x	-5	-3	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1,5	3	5																
f(x)	1,52	0,80	3,71	2,67	2,27	1,73	1,33	0,29	3,20	2,48																

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.4	 <p>[Hinweis: Die in der Abbildung dargestellte Gerade g ist aus 2.6.]</p>			4
2.5	$g(x) = f(x)$ $0 = -\frac{8}{7}x^3 + \frac{18}{7}x \quad x_1 = 0$ $0 = x^2 - \frac{9}{4} \quad x_{2/3} = -1,5$			4
2.6	siehe EWH 2.4		2	
2.7	$h(x) = f(x) - 2 = \frac{2x}{x^2 - 4}$ $h(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\frac{2x}{x^2 - 4} = -h(x)$			3
2.8	$f(x) - g(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{8}{7}x = h(x) + \frac{8}{7}x$ <p>Die Funktion $f(x) - g(x)$ ist somit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Die Teilflächen mit negativem und positivem Beitrag zum Integral sind gleich groß. Daher ist die Flächendifferenz null.</p>			3
Summen der BE in den Anforderungsbereichen		14	16	3
Summe der BE		33		

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -32 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ -2,4 \\ 21 \end{pmatrix}$	2		
	$ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(-32)^2 + 24^2 + 0^2} = \sqrt{1600} \text{ LE} \text{ entspricht } 40 \text{ cm}$ $ \overrightarrow{AD} = \sqrt{(-1,8)^2 + (-2,4)^2 + 21^2} = \sqrt{450} \text{ LE} \text{ entspricht ca. } 21,2 \text{ cm}$ $A_{\text{Rechteck}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \sqrt{720000} \text{ FE} \text{ entspricht ca. } 849 \text{ cm}^2$			
3.2	$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -27 \\ -36 \\ 15 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -25,2 \\ -33,6 \\ -6 \end{pmatrix}$ $ \overrightarrow{AE} = \sqrt{(-27)^2 + (-36)^2 + 15^2} = \sqrt{2250} \text{ LE}$ $ \overrightarrow{DE} = \sqrt{(-25,2)^2 + (-33,6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1800} \text{ LE}$ $ \overrightarrow{AE} ^2 = \overrightarrow{AD} ^2 + \overrightarrow{DE} ^2$	4		
3.3	<p>Ebenengleichung in Parameterform:</p> $K: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -36 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1,8 \\ -2,4 \\ 21 \end{pmatrix}$ <p>Ebenengleichung in Koordinatenform:</p> $\vec{n} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -720 \\ 540 \\ 0 \end{pmatrix} = 180 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ somit gilt: } K: -4x + 3y = d$ <p>Einsetzen der Koordinaten von A liefert: $d = 0$</p> <p>$K: -4x + 3y = 0$</p>	1		
3.4	<p>F in die Koordinatengleichung von H einsetzen:</p> <p>$H: 3 \cdot (-63) + 4 \cdot (-9) + 15 \cdot 15 = 0$ ergibt eine wahre Aussage</p>	1		
3.5	<p>Der gesuchte Winkel entspricht dem Winkel zwischen H und der x-y-Ebene:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_H \cdot \vec{n}_{xy} }{ \vec{n}_H \cdot \vec{n}_{xy} } = \frac{15}{\sqrt{250} \cdot 1} \approx 0,9487$ <p>$\alpha = 18,43^\circ$</p>			4

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.6	<p>Wenn das Viereck $CDEF$ ein Rechteck wäre, müsste u. a. gelten: $\overline{EF} = \overline{DC}$ $\overline{EF} = \begin{pmatrix} -36 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit $\overline{EF} = 1,125 \overline{DC}$</p> <p>Somit sind die gegenüberliegenden Seiten \overline{EF} und \overline{DC} zwar parallel, aber nicht gleich lang. Das Viereck $CDEF$ ist also <u>kein</u> Rechteck, sondern ein Trapez.</p>		5	
3.7	<p>$\vec{n}_K \circ \vec{n}_H = -12 + 12 + 0 = 0$ Abstand zwischen Punkt D und der Ebene H: $d = \left \frac{0 - (3 \cdot (-1,8) + 4 \cdot (-2,4) + 15 \cdot 21)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 15^2}} \right = \frac{300}{5\sqrt{10}} \approx 19 LE$ entspricht 19 cm</p>	1	3	
3.8	<p>Geradengleichung für Sonnenstrahl s aufstellen: $s: \vec{x} = \overline{OD} + r \cdot \vec{v}$ $\Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ -2,4 \\ 21 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix}$</p> <p>Schnittpunkt von Sonnenstrahl s mit der Ebene H berechnen: $3(-1,8 + 3r) + 4(-2,4 + 9r) + 15(21 - 23r) = 0 \Rightarrow r = 1$ r in s einsetzen: $\Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ -2,4 \\ 21 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 6,6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D'(1,2 6,6 -2)$</p>			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	16	5
	Summe der BE	33		