Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Herbst 2013

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	22. November 2013
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus- Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ____ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	**Soll**	**Ist**	**Ist (ggf. Zweitkorrektur)**
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	_____ Punkte	_____ Punkte
Maluspunkt	-1	_____ Punkt	_____ Punkt
Insgesamt:		______ **Punkte** **Note:**______	______ **Punkte** **Note:**______
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$; $x \in \mathrm{IR}$.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f. **/2**
Begründen Sie Ihre Aussage.

1.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von f. **/6**

1.3 Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f. **/11**
[zur Kontrolle: $f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x$]

1.4 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von f. **/8**

1.5 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. **/2**

1.6 Zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f im Intervall [–2,6; 0,5]. Ergänzen Sie dafür auch folgende Wertetabelle. **/6**

x	–2,6	–1,5	–0,5	0,1	0,3	0,5
$f(x)$		-2,25				2,25

Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der **nächsten Seite**.

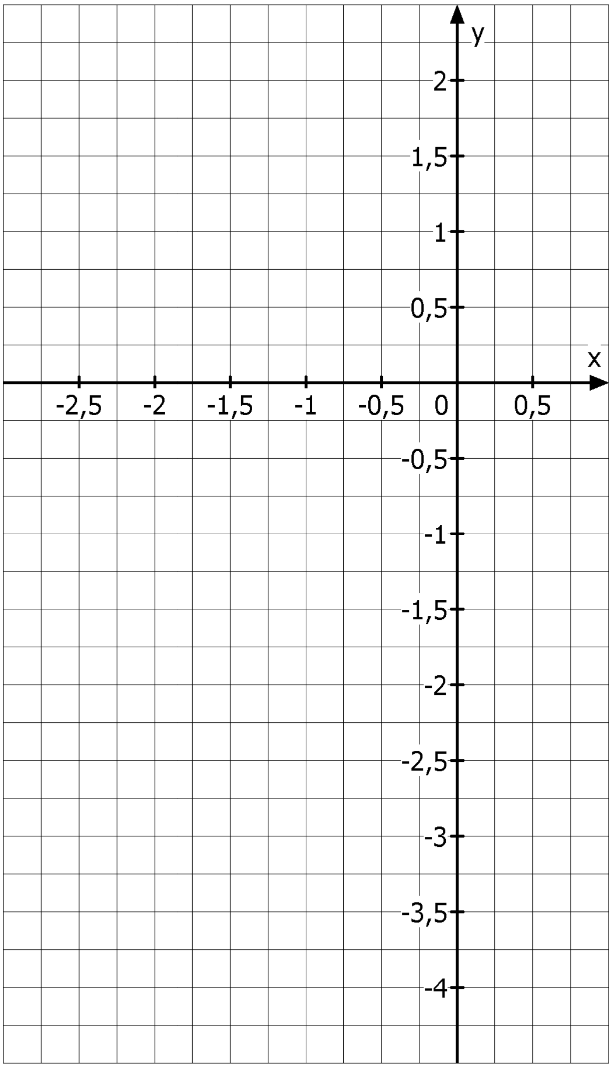
1.7 Zeigen Sie, dass an der Stelle $x_W = -1,47$ eine Wendetangente w durch folgende Gleichung beschrieben wird: **/5**

$$w(x) = 5,27x + 5,66 .$$

Zeichnen Sie diese Wendetangente in das Koordinatensystem auf der **nächsten Seite**.

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 und 1.7 → nächste Seite

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 und 1.7



2 Rekonstruktion /15

Die Firma SchulWebDe wurde in eine Aktiengesellschaft umgewandelt und wird nun an der Börse gehandelt.
Die Aktien werden zu einem Ausgabepreis von 30 € ausgegeben (Zeitpunkt $t = 0$).
Nach einem Monat (Zeitpunkt $t = 1$) erreichte die Aktie ihren höchsten Tageskurs von 37 €.
Anschließend fällt der Kurs immer schneller.
Nach dem 3. Monat (Zeitpunkt $t = 3$) wird dieser Abwärtstrend schwächer.
Der Kurs der Aktie kann idealisiert durch eine Funktionsgleichung dritten Grades dargestellt werden.

Abbildung: Microsoft-Clipart

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, wobei die Zeit t in Monaten gemessen wird.

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \;\; ; \;\; t \in \mathrm{IR}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
15 & = & & & & & & & \tfrac{1}{2}a_0 \\
37 & = & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\
0 & = & 3\,a_3 & + & 2\,a_2 & + & a_1 & & \\
0 & = & 9\,a_3 & + & a_2 & & & &
\end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /15

Der Materialverbrauch für die Herstellung eines Abfalleimers mit Schwingdeckel (siehe Abbildung) soll bei gegebenem Volumen möglichst klein gehalten werden. Der Abfalleimer besteht aus einem nach oben offenen Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel.

Die Maße des Abfalleimers werden wie folgt angegeben:

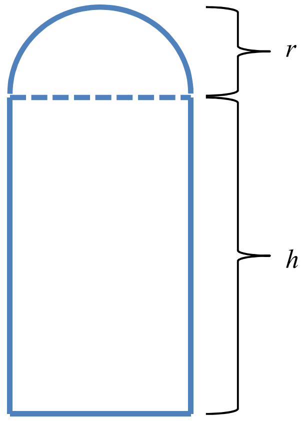
r: Radius der Halbkugel

h: Höhe des Zylinders

(siehe Abbildung).

Zur Vereinfachung werden die Falzungen und Blechüberstände vernachlässigt und nur die Außenflächen und der Boden betrachtet.

Abfalleimer



3.1 Stellen Sie eine Zielfunktion O auf, mit der der Oberflächeninhalt des Abfalleimers berechnet werden kann. **/6**

Hinweis: Kugeloberfläche $O = 4\pi r^2$

[zur Kontrolle: $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2V}{r}$; $r > 0$]

3.2 Der Abfalleimer hat ein Gesamtvolumen von $V = 60\,000\ \text{cm}^3$. **/6**

Berechnen Sie die Werte für r und h, für die der Materialverbrauch (Oberflächeninhalt) bei diesem Abfalleimer minimal wird.

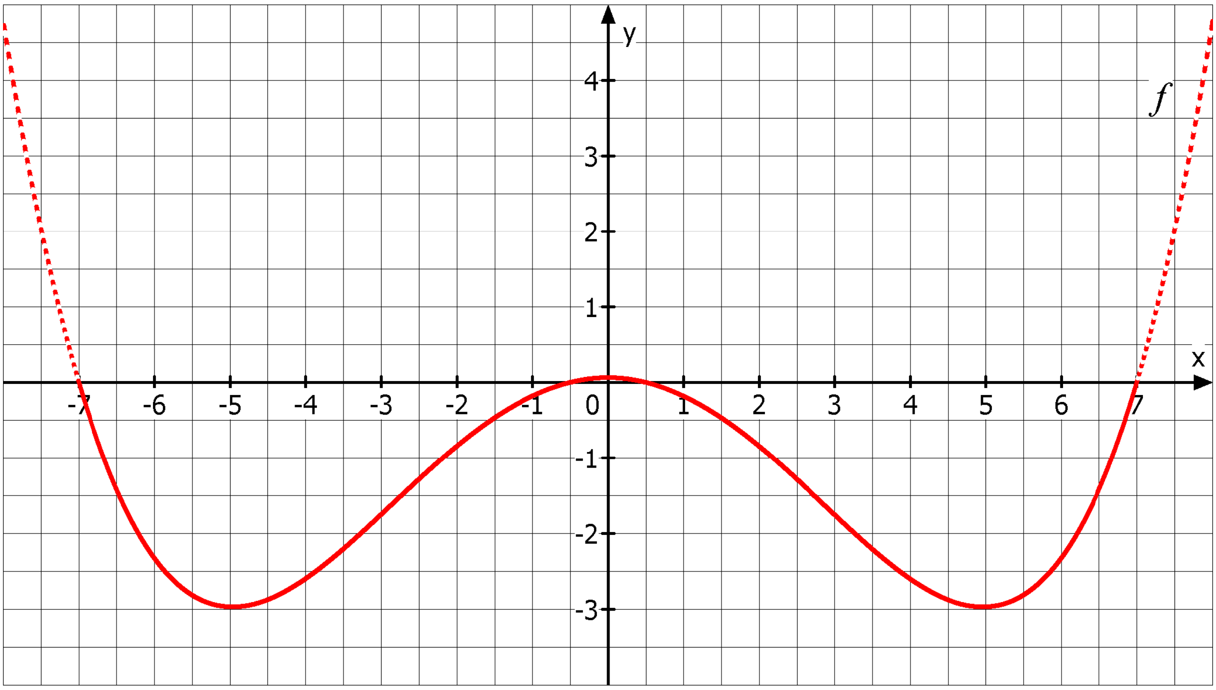
Hinweis: Auf den Nachweis des Minimums kann verzichtet werden.

3.3 Berechnen Sie den minimalen Materialverbrauch für den gesamten Abfalleimer in cm^2. **/3**

Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf volle cm^2.

4 Integralrechnung /30

Ein Designer hat eine Sonnenbrille entworfen, die sich im abgebildeten Koordinatensystem teilweise durch den Graphen der Funktion $f(x) = 0,005\,(x^4 - 49,25x^2 + 12,25)$; $x \in \mathbb{R}$ darstellen lässt (1 LE $\hat{=}$ 1 cm).



4.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. /6

[zur Kontrolle: $x_{N1/2} = \pm 7$; $x_{N3/4} = \pm 0,5$]

4.2 Die Gläser der Sonnenbrille werden durch die x-Achse und den Funktionsgraphen begrenzt. /6
Verglast werden nur die Teilflächen unterhalb der x-Achse.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Verglasung.

4.3 Die obere Begrenzung der Verglasung soll nun etwas eleganter gestaltet werden. /6

Hierzu erhält die Oberkante der Brille einen Schwung, der durch die Parabel

$g(x) = 0,005(x^2 + 12,25)$ beschrieben wird.

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen.

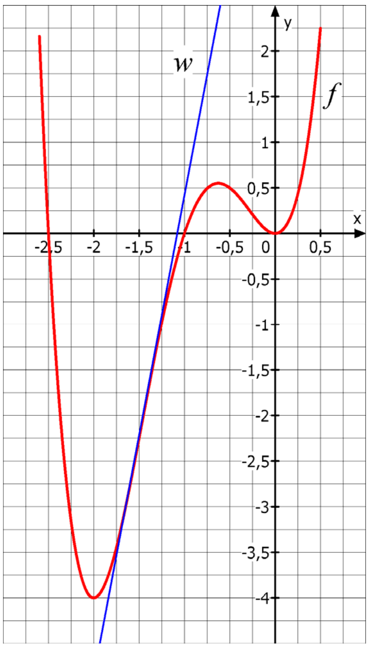
[zur Kontrolle: $P_1(0\,|\,0,06)$, $P_2(7,09\,|\,0,31)$, $P_3(-7,09\,|\,0,31)$]

4.4 Zeichnen Sie den Graphen der Parabel g in das obige Koordinatensystem ein. /2

4.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt B der neuen Verglasung. /6

4.6 Ermitteln Sie, um welchen Prozentsatz die ursprüngliche Glasfläche angewachsen ist. /4

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	$f(x) \neq f(-x) \wedge f(x) \neq -f(-x)$ oder die Exponenten von x sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse, noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.	2		
1.2	$f(x)=0$ $2x^4+7x^3+5x^2=0$ $x^2(2x^2+7x+5)=0\,;\ x_{N1,2}=0$ $2x^2+7x+5=0$ $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}=0$; pq-Formel $x_{N1,2}=0\,;x_{N3}=-1\,;x_{N4}=-2{,}5$	6		
1.3	$f'(x)=8x^3+21x^2+10x$ $f''(x)=24x^2+42x+10$ Ansatz: $f'(x)=0$ $8x^3+21x^2+10x=0$ $x(8x^2+21x+10)=0\,;\ x_{E1}=0$ $8x^2+21x+10=0$ $x^2+\frac{21}{8}x+\frac{10}{8}=0$; pq-Formel $x_{E2}=-0.625 \wedge x_{E3}=-2$ $f''(0)=10>0 \Rightarrow$ lokales Minimum $f''(-0{,}625)=-6{,}875<0 \Rightarrow$ lokales Maximum $f''(-2)=22>0 \Rightarrow$ lokales Minimum $f(0)=0\,;T_1(0\mid 0)$ $f(-0{,}625)=0{,}55\,;H(-0{,}625\mid 0{,}55)$ $f(-2)=-4\,;T_2(-2\mid -4)$		6 5	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f''(x)=24x^2+42x+10$
$f'''(x)=48x+42$
$f''(x)=0$
$24x^2+42x+10=0$
$x^2+\frac{42}{24}x+\frac{10}{24}=0$; pq-Formel
$x_{W1}=-0,28 \wedge x_{W2}=-1,47$
$f'''(-0,28)\neq 0$; $f'''(-1,47)\neq 0$
$WP_1(-0,28;0,25)$; $WP_2(-1,47;-2,09)$</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^4+7x^3+5x^2\right)\to\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+7x^3+5x^2\right)\to\infty$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>–2,6</td><td>–1,5</td><td>–0,5</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2,16</td><td>-2,25</td><td>0,5</td><td>0,06</td><td>0,66</td><td>2,25</td></tr>
</table>


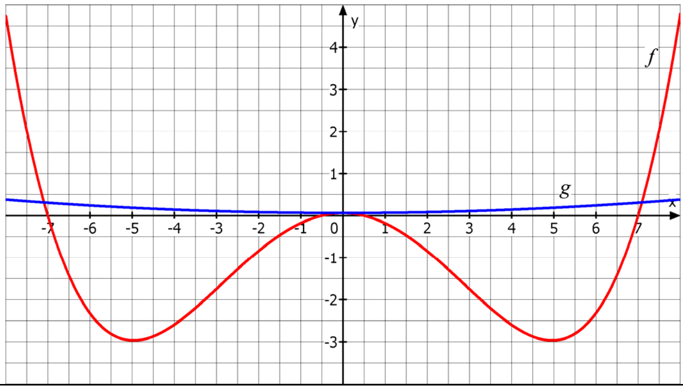
</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>Wendetangente:
$w(x)=mx+n$
$m=f'(-1,47)\approx 5,27$
$-2,09=5,27\cdot(-1,47)+n \Rightarrow n=5,66$
$w(x)=5,27x+5,66$
Graphische Darstellung der Wendetangente (siehe 1.6).</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>16</td><td>19</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Ansatz:
$f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$
$f'(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$
$f''(t) = 6a_3t + 2a_2$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Bedingungsgefüge:
1. $f(0) = 30$ (Ausgabepreis bei $t = 0$)
2. $f(1) = 37$ (Tageskurs nach einem Monat $t = 1$)
3. $f'(1) = 0$ (höchster Tageskurs bei $t = 1$)
4. $f''(3) = 0$ (Krümmungsänderung bei $t = 3$)
Gleichungssystem:
$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{I.} & 30 & = & & & & & & & a_0 \\ \text{II.} & 37 & = & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\ \text{III.} & 0 & = & 3a_3 & + & 2a_2 & + & a_1 & & \\ \text{IV.} & 0 & = & 18a_3 & + & 2a_2 & & & & \end{array}$$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Lösen des Gleichungssystems
(ebenso Ersatz-LGS)</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):
$a_3 = 1$; $a_2 = -9$; $a_1 = 15$; $a_0 = 30$
Für die Funktionsgleichung gilt:
$f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>5</td><td>10</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.1	Bestimmung der Zielfunktion: $O(r,h)=r^2\pi+2r\pi h+\frac{1}{2}\cdot 4r^2\pi$ $=r^2\pi+2r\pi h+2r^2\pi$ $=3r^2\pi+2r\pi h$; Hauptbedingung Aus den Formeln für die Einzelvolumina wird die Nebenbedingung aufgestellt. $V=r^2\pi h+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi$ $=r^2\pi h+\frac{2}{3}r^3\pi$ $h=\frac{V}{r^2\pi}-\frac{2}{3}r$; Nebenbedingung $O(r)=3r^2\pi+2r\pi\cdot\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)$ $=3r^2\pi+\frac{2V}{r}-\frac{4}{3}r^2\pi$ $=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}$		2	4
3.2	$O'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{120000}{r^2}$ $O'(r)=0$ $\frac{10}{3}\pi r-\frac{120000}{r^2}=0$ $10\pi r^3-360000=0$ $10\pi r^3=360000$ $r^3=\frac{36000}{\pi}$; $r=\sqrt[3]{\frac{36000}{\pi}}\approx 22,5$ $h=\frac{60000}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\approx 22,5$ $r\approx 22,5\text{ cm}$; $h\approx 22,5\text{ cm}$	6		
3.3	Für das Gesamtvolumen von $V=60000\text{ cm}^3$ ergibt sich: $O(22,5)=\frac{5}{3}\pi\cdot(22,5)^2+\frac{2V}{22,5}\approx 7984$ Die Oberfläche beträgt rund 7984 cm^2.	3		
	Summe	9	2	4
	mögliche BE	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Nullstellen von f: $0=0{,}005(x^4-49{,}25x^2+12{,}25)$ $=x^4-49{,}25x^2+12{,}25$ Substitution mit $z:=x^2$ und p-q-Formel liefern $z_{1,2}=24{,}625\pm\sqrt{(24{,}625)^2-12{,}25}=24{,}625\pm 24{,}375$ $z_1=49\Rightarrow x_{1,2}=\pm 7$ $z_2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_{3,4}=\pm 0{,}5$	6		
4.2	Da der Graph achsensymmetrisch ist, gilt: $A=2\cdot\left\|\int_{0,5}^{7}\left(0{,}005(x^4-49{,}25x^2+12{,}25)\right)\mathrm{dx}\right\|$ $=2\cdot 0{,}005\cdot\left\|\int_{0,5}^{7}\left(x^4-49{,}25x^2+12{,}25\right)\mathrm{dx}\right\|$ $=2\cdot 0{,}005\cdot\left\|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{197}{12}x^3+12{,}25x\right]_{0,5}^{7}\right\|$ $=2\cdot 0{,}005\cdot\left\|-\frac{65513}{30}-\left(\frac{979}{240}\right)\right\|=2\cdot 0{,}005\cdot\left\|-\frac{525083}{240}\right\|\approx 21{,}88$ Der Flächeninhalt der Verglasung beträgt etwa $21{,}88\ \mathrm{cm}^2$.		6	
4.3	Schnittstellen: $f(x_S)=g(x_S)$ $0{,}005(x^4-49{,}25x^2+12{,}25)=0{,}005(x^2+12{,}25)$ $x^4-49{,}25x^2+12{,}25=x^2+12{,}25$ $x^4-50{,}25x^2=0$ $x^2(x^2-50{,}25)=0$ $x_{1,2}=0$; $x_{3,4}\approx\pm 7{,}09$ y-Werte: $g(0)\approx 0{,}06\Rightarrow P_1(0\mid 0{,}06)$ $g(\pm 7{,}09)\approx 0{,}31\Rightarrow P_2(7{,}09\mid 0{,}31),\ P_3(-7{,}09\mid 0{,}31)$		6	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.4		2		
4.5	Wegen Symmetrie gilt: $B = 2 \cdot 0{,}005 \cdot \left\| \int_0^{7{,}08} (x^4 - 50{,}25x^2)\,\mathrm{d}x \right\| = 2 \cdot 0{,}005 \cdot \left\| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{67}{4}x^3 \right]_0^{7{,}08} \right\|$ $\approx 2 \cdot 0{,}005 \cdot \|-2386{,}57\| \approx 23{,}87$ Die neue Verglasung hat einen Flächeninhalt von $23{,}87\ \text{cm}^2$.		6	
4.6	Die ursprüngliche Fläche entspricht 100 %. $21{,}88\ \text{cm}^2 \mathrel{\hat=} 100\ \%$ $23{,}87\ \text{cm}^2 \mathrel{\hat=} x\ \%$ Der Dreisatz liefert $P \approx 109{,}1\ \%$, die Fläche ist um 9,1 % gewachsen.	4		
	Summe	12	18	0
	mögliche BE	30		