

## Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2016/17

<b>Fach</b>	<b>Mathematik (A)</b>
<b>Nur für die Lehrkraft</b>	
<b>Prüfungstag</b>	29. Mai 2017
<b>Prüfungszeit</b>	09:00 – 13:00 Uhr
<b>Zugelassene Hilfsmittel</b>	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmerteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
<b>Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise</b>	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
<b>Erwartungshorizonte</b>	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.:	Soll
<b>1</b>	41
<b>2</b>	32
<b>3</b>	27
<b>Summe:</b>	100

**1 Funktionsuntersuchung** **/41**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = 0,01x^5 - 0,3x^3 + 2x; x \in \mathbb{R}$ .

**1.1** Beschreiben Sie das Verhalten des Graphen von  $f$  im Unendlichen und begründen Sie Ihre Aussagen. **/2**

**1.2** Untersuchen Sie den Graphen von  $f$  auf Symmetrie. **/6**  
Ergänzen Sie dann die folgende Tabelle:

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							1,71	1,92	0,33	-0,96	3,75

Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  anhand der Tabelle in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

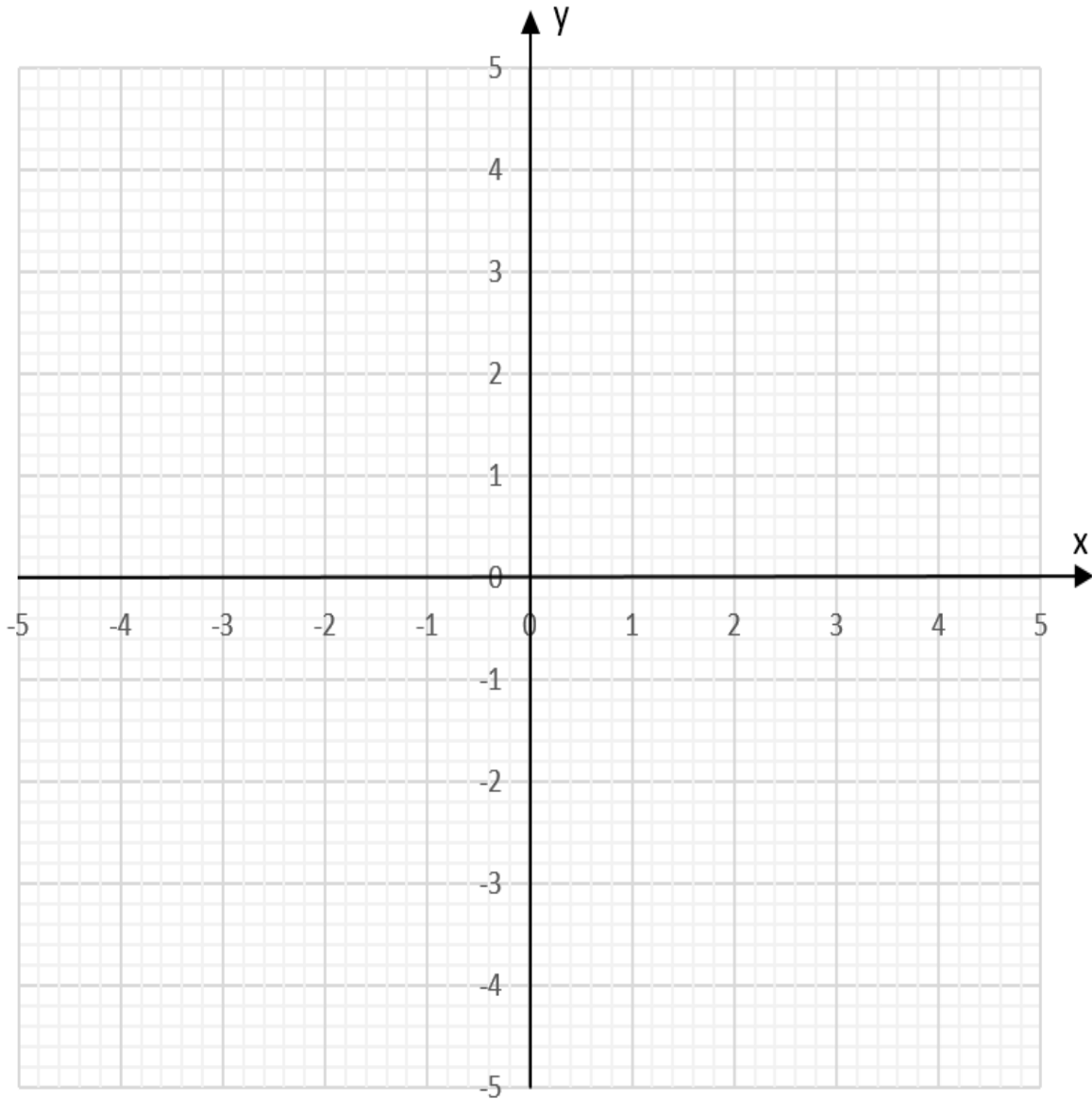
**1.3** Bestimmen Sie alle Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit den Koordinatenachsen. **/9**

**1.4** Bestimmen Sie die relativen Extrempunkte des Graphen von  $f$ . **/12**

**1.5** Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von  $f$ . **/6**

**1.6** Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung  $t(x) = -0,8x + 3,52$  die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P(2|f(2))$  ist. **/6**  
Diese Tangente schneidet den Graphen von  $f$  in einem Punkt  $Q$ , der rechts von  $P$  liegt. Entscheiden Sie, ob der Punkt  $Q$  im I. oder im IV. Quadranten liegt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes ist nicht erforderlich.

# Koordinatensystem zu Aufgabe 1.2



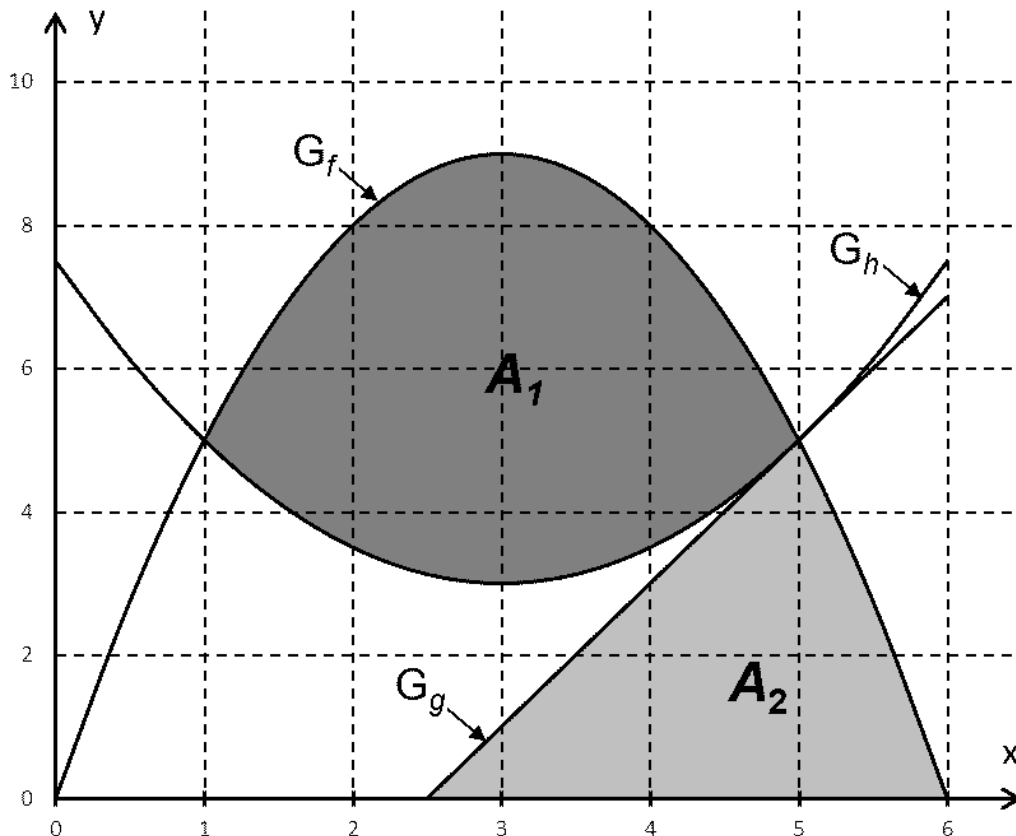
## 2 Integralrechnung

/32

Gegeben sind die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = -x^2 + 6x, \quad g(x) = 2x - 5 \quad \text{und} \quad h(x) = 0,5x^2 - 3x + 7,5; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Graphen  $G_f$ ,  $G_g$  und  $G_h$ , und die Koordinatenachsen schließen die Flächen  $A_1$  und  $A_2$  ein (siehe Abbildung).



- 2.1** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird. /6
- 2.2** Zeigen Sie rechnerisch, dass sich  $G_f$  und  $G_h$  an der Stelle  $x = 5$  schneiden. /6  
Zeigen Sie rechnerisch, dass sich  $G_g$  und  $G_h$  an der Stelle  $x = 5$  berühren.
- 2.3** Berechnen Sie die linke Schnittstelle von  $G_f$  und  $G_h$ . /10  
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche  $A_1$  (dunkelgrau gefärbt), die von  $G_f$  und  $G_h$  eingeschlossen ist.
- 2.4** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche  $A_2$  (hellgrau gefärbt), die von  $G_f$  und  $G_g$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen ist. /10

**3 Stochastik** **/27**

Der Gastgeber einer Party hat für seine Gäste ein besonderes Glücksspiel vorbereitet:

Zuerst wird mit einem sechsseitigen fairen Würfel einmal gewürfelt.

Ist das Ergebnis durch 3 teilbar, zieht der Spieler aus einer Urne mit 4 weißen und 6 grauen Kugeln zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

Zeigt der Würfel keine durch 3 teilbare Zahl an, muss der Spieler aus derselben Urne zweimal mit Zurücklegen ziehen.

Nach Abschluss der Ziehung werden die gezogenen Kugeln betrachtet. Die Reihenfolge bleibt dabei unberücksichtigt.

- 3.1** Zeichnen Sie ein zu diesem Glücksspiel passendes Baumdiagramm und beschriften Sie das Diagramm vollständig. **/9**  
Geben Sie für jeden Pfad die Pfadwahrscheinlichkeit an.
- 3.2** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: **/4**  
A: Es werden zwei weiße Kugeln gezogen.  
B: Die Kugeln haben nicht die gleiche Farbe.
- 3.3** Es sei  $E$ : „Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen“. **/4**  
Formulieren Sie das Gegenereignis zu  $E$ .  
Ermitteln Sie  $P(E)$ .
- 3.4** Der Gastgeber möchte den Gästen für jede gezogene weiße Kugel 2 € und für jede graue Kugel 0,50 € auszahlen. **/5**  
Mit welchen Kosten muss er pro Gast durchschnittlich rechnen?
- 3.5** Ein Gast sagt: „Beim Ziehen von zwei Kugeln aus dieser Urne ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, nicht davon abhängig, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird. Der Wert ist in beiden Fällen gleich.“ **/5**  
Untersuchen Sie, ob der Gast Recht hat.

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																										
		I	II	III																								
1.1	<p>Der höchste Exponent von <math>x</math> ist ungerade und der Leitkoeffizient positiv. Also gilt</p> $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$		2																									
1.2	<p>Der Graph von <math>f</math> ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da nur ungerade Exponenten von <math>x</math> im Funktionsterm vorkommen.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-5</td> <td>-4</td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>-3,75</td> <td>0,96</td> <td>-0,33</td> <td>-1,92</td> <td>-1,71</td> <td>0</td> <td>1,71</td> <td>1,92</td> <td>0,33</td> <td>-0,96</td> <td>3,75</td> </tr> </table> <p>Graph zeichnen</p> <p style="text-align: center;">Graph zu Aufgabe 1.2</p>	$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$f(x)$	-3,75	0,96	-0,33	-1,92	-1,71	0	1,71	1,92	0,33	-0,96	3,75	2	2	2
$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5																	
$f(x)$	-3,75	0,96	-0,33	-1,92	-1,71	0	1,71	1,92	0,33	-0,96	3,75																	
1.3	<p><b>Achsen Schnittpunkte bestimmen</b> Schnittpunkt mit <math>y</math>-Achse <math>S_y(0 0)</math>  <math>0,01x^5 - 0,3x^3 + 2x = 0 \Rightarrow</math> erste Nullstelle <math>x_{N1} = 0</math>  <math>0,01x^4 - 0,3x^2 + 2 = 0</math>                      Substitution <math>x^2 = u</math>  <math>0,01u^2 - 0,3u + 2 = 0</math>  <math>u_1 = 20 \Rightarrow x_{N2, N3} \approx \pm 4,472</math>  <math>u_2 = 10 \Rightarrow x_{N4, N5} \approx \pm 3,162</math>                      Angabe der Schnittpunkte mit der <math>x</math>-Achse</p>	1	1 1	5																								
1.4	<p><b>Extrempunkte bestimmen</b>  <math>f'(x) = 0,05x^4 - 0,9x^2 + 2 = 0</math>                      Substitution <math>x^2 = u \Rightarrow 0,05u^2 - 0,9u + 2 = 0</math>  <math>u_1 = 15,403 \Rightarrow x_{E2, E3} \approx \pm 3,925</math>  <math>u_2 = 2,5969 \Rightarrow x_{E4, E5} \approx \pm 1,611</math>  <math>f''(x) = 0,2x^3 - 1,8x</math>  <math>f''(-3,925) = -5,026 &lt; 0</math> und <math>f(-3,925) = +0,975 \Rightarrow</math> HP(-3,925 +0,975)  <math>f''(-1,611) = +2,064 &gt; 0</math> und <math>f(-1,611) = -2,076 \Rightarrow</math> TP(-1,611 -2,076)                      aus Symmetriegründen gilt:  <math>f''(+1,611) = -2,064 &lt; 0</math> und <math>f(+1,611) = +2,076 \Rightarrow</math> HP(+1,611 +2,076)  <math>f''(+3,925) = +5,026 &gt; 0</math> und <math>f(+3,925) = -0,975 \Rightarrow</math> TP(+3,925 -0,975)</p>		2 1	5																								
		2	2																									

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
<b>1.5</b>	<b>Wendepunkte bestimmen</b> $0,2x^3 - 1,8x = 0$ erste Lösung $x_{W1} = 0$ $0,2x^2 - 1,8 = 0$ $x_{W2,W3} \approx \pm 3$ $f'''(x) = 0,6x^2 - 1,8$ $f'''(-3) = 3,6 \neq 0$ und $f(-3) = -0,33$ $\Rightarrow$ WP(-3 -0,33) $f'''(0) = -1,8 \neq 0$ und $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ WP(0 0) aus Symmetriegründen gilt: $f'''(+3) = 3,6 \neq 0$ und $f(3) = +0,33$ $\Rightarrow$ WP(3 +0,33)	1	2 2 1	
<b>1.6</b>	$t(2) = 1,92 = f(2)$ und $t'(2) = -0,8 = f'(2) \Rightarrow$ Die angegebene Gerade ist die Tangente an der Stelle 2 $t(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,4 \Rightarrow$ Die Nullstelle der angegebenen Gerade liegt links von der Nullstelle von $f$ , wo $f(x)$ noch negativ ist und steigt. Also schneiden sich die Gerade und der Graph von $f$ unterhalb der $x$ -Achse im IV. Quadranten.		3	3
	Mögliche BE	7	29	5
	Summe Aufgabe		41	

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
<b>2.1</b>	$A = \int_0^6 f(x) dx = F(6) - F(0)$ $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2; F(6) = 36; F(0) = 0 \Rightarrow A = 36$	2 2	2	
<b>2.2</b>	$f(5) = 5 = h(5) \Rightarrow$ Schnittpunkt bei $x = 5$ $g(5) = 5 = h(5)$ und $g'(5) = 2 = h'(5) \Rightarrow$ Berührungspunkt bei $x = 5$		2 2	2
<b>2.3</b>	Flächeninhalt von $A_1$ Differenzfunktion $d(x) = f(x) - h(x) = -1,5x^2 + 9x - 7,5$ $d(x) = 0 = -1,5x^2 + 9x - 7,5$ Lösungen: $x_1 = 1$ (linke Schnittstelle von $G_f$ und $G_h$ ) und $x_2 = 5$ $A_1 = \left  \int_1^5 d(x) dx \right  =  D(5) - D(1) $ $D(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 7,5x; D(1) = -3,5; D(5) = 12,5 \Rightarrow A_1 = 16$	1 2 2	3	
<b>2.4</b>	$A_2$ wird durch eine Senkrechte an der Stelle 5 in zwei Teilflächen zerlegt Die Nullstelle von $g$ ist 2,5 $\Rightarrow$ Grundseite Dreieck = $5 - 2,5 = 2,5$ $g(5) = 5 \Rightarrow$ Höhe Dreieck = 5 $\Rightarrow$ Fläche Dreieck $A_{21} = 6,25$ FE $A_{22} = \left  \int_5^6 f(x) dx \right  =  F(6) - F(5) $ $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2; F(6) = 36; F(5) \approx 33,333 \Rightarrow$ $A_{22} \approx 2,67 \text{ FE} \Rightarrow A_2 \approx 8,92 \text{ FE}$	2 2	2	2
	Mögliche BE	13	15	4
	Summe Aufgabe	32		



Teil-Aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.1	<p>Dreistufiges Baumdiagramm mit acht Zweigen Angabe aller Zweigwahrscheinlichkeiten Angabe aller Pfadwahrscheinlichkeiten</p>			
3.2	$P(A) = P(\text{"ww"}) = \frac{12}{270} + \frac{32}{300} = \frac{136}{900} = \frac{34}{225}$ $P(B) = P(\text{"wg"}) + P(\text{"gw"}) = \frac{24}{270} + \frac{48}{300} + \frac{24}{270} + \frac{48}{300} = \frac{448}{900} = \frac{112}{225}$	2		
3.3	<p><math>E</math>: „Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen“  <math>\bar{E}</math>: „Es wird keine weiße Kugel gezogen.“,  d. h. „Es werden zwei graue Kugeln gezogen.“</p> $P(\bar{E}) = P(\text{"gg"}) = \frac{30}{270} + \frac{72}{300} = \frac{316}{900} = \frac{79}{225}$ $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{79}{225} = \frac{146}{225}$ <p>(Hier ist auch die alternative Berechnung <math>P(E) = P(A) + P(B)</math> möglich.)</p>		1	3

<b>3.4</b>	Aufstellen der Tabelle für die Kostenverteilung:														
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ergebnis</th> <th>„ww“</th> <th>„wg“ oder „gw“</th> <th>„gg“</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Wahrscheinlichkeit</td> <td><math>\frac{136}{900}</math></td> <td><math>\frac{448}{900}</math></td> <td><math>\frac{316}{900}</math></td> </tr> <tr> <td>Auszahlung in €</td> <td>4,00</td> <td>2,50</td> <td>1,00</td> </tr> </tbody> </table>	Ergebnis	„ww“	„wg“ oder „gw“	„gg“	Wahrscheinlichkeit	$\frac{136}{900}$	$\frac{448}{900}$	$\frac{316}{900}$	Auszahlung in €	4,00	2,50	1,00		3
Ergebnis	„ww“	„wg“ oder „gw“	„gg“												
Wahrscheinlichkeit	$\frac{136}{900}$	$\frac{448}{900}$	$\frac{316}{900}$												
Auszahlung in €	4,00	2,50	1,00												
	<p>Kostenerwartung: <math>K = \frac{136}{900} \cdot 4 + \frac{448}{900} \cdot 2,5 + \frac{316}{900} \cdot 1 = \frac{1980}{900} = 2,20</math></p> <p>Der Gastgeber muss pro Gast mit Kosten von durchschnittlich 2,20 € rechnen.</p>		2												
<b>3.5</b>	<p>Der Gast hat Unrecht. Ziehen ohne Zurücklegen:</p> $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - P("gg") = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$ <p>Ziehen mit Zurücklegen:</p> $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - P("gg") = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25} = 64\%$ <p>Beim Ziehen ohne Zurücklegen ist die Chance auf mindestens eine weiße Kugel etwas größer als beim Ziehen mit Zurücklegen.</p>			5											
	Mögliche BE	8	14	5											
	Summe Aufgabe	27													