Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie | BERLIN

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2021/2022

Fach	Mathematik (A)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**05.05.2022**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe[1]:	70

[1] Jeder Prüfling bearbeitet nur eine der beiden Aufgaben Nr. 2 oder Nr. 3.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2022
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie — BERLIN

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x + 2,\quad x \in \mathrm{IR}.$$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma an.

1.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an. **/2**

1.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f einen Hochpunkt besitzt. **/5**
Geben Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes an.

1.3 Ergänzen Sie in der Wertetabelle die fehlenden Funktionswerte von f. **/5**
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2{,}00\ ;\ 1{,}50]$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

x	$-2{,}00$	$-1{,}00$	0	0,50	1,00	1,50
$f(x)$					0,50	

1.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. **/5**
Zeichnen Sie diese Tangente in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite** ein.
Berechnen Sie den Steigungswinkel dieser Tangente.

1.5 Untersuchen Sie, ob es Punkte $(x \mid f(x))$ gibt, an denen der Graph von f linksgekrümmt ist. **/2**

Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1,\quad x \in \mathrm{IR}.$$

1.6 Die Graphen von f und g haben einen Schnittpunkt im 1. Quadranten. **/4**
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

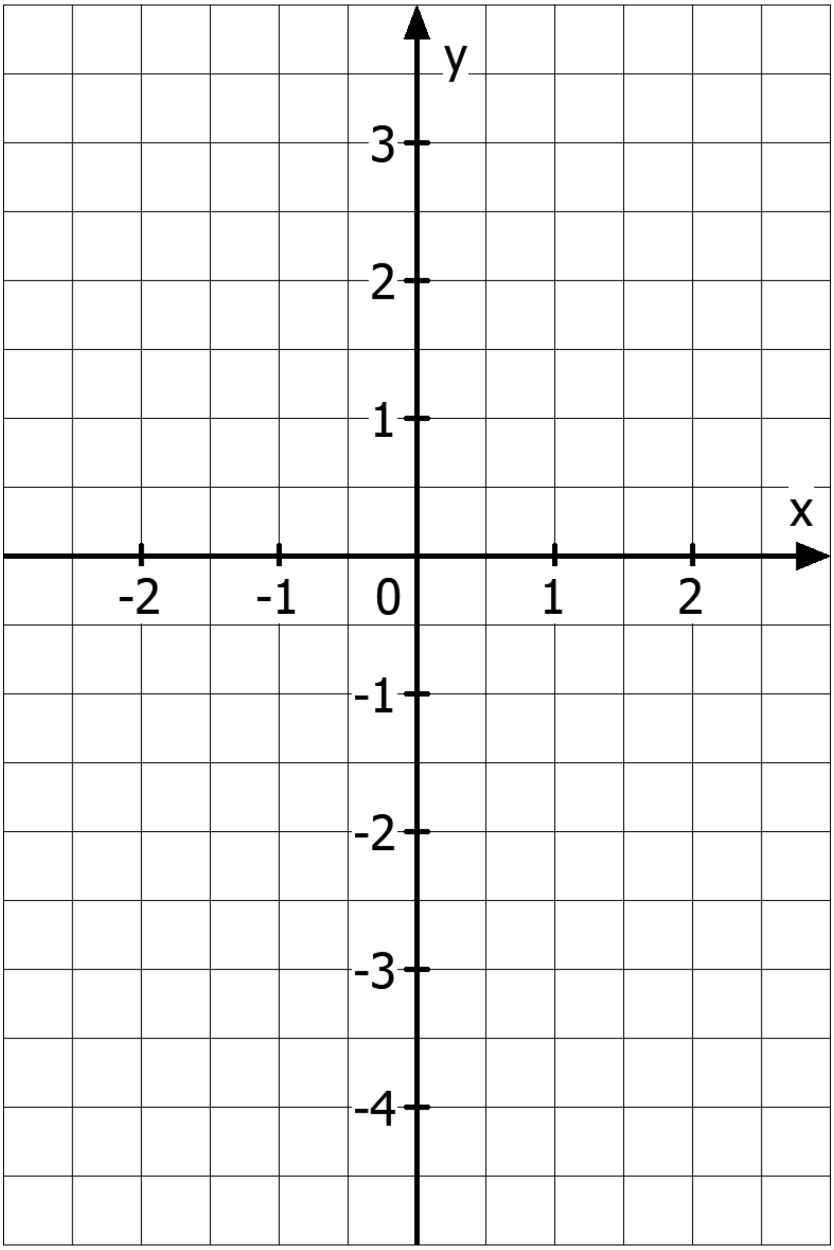
1.7 Berechnen Sie die Nullstellen des Graphen von g. **/5**

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1.8 Der Graph von *g* besitzt drei Extrempunkte. Diese drei Extrempunkte bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. **/7**
Berechnen Sie zuerst die Koordinaten der Extrempunkte.
Ermitteln Sie anschließend den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Flächeneinheiten (FE).

1.9 Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von *g*. **/5**

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.3 und 1.4

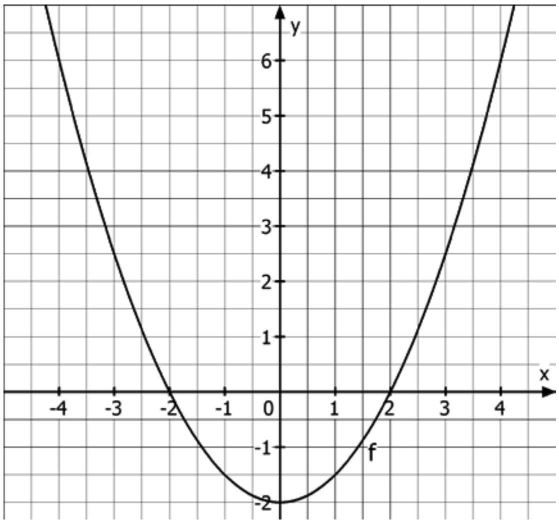


2 Integralrechnung /30

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

In der Abbildung ist der Graph der Funktion f skizziert.



2.1 Weisen Sie nach, dass $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ Nullstellen vom Graphen der Funktion f sind. **/2**

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen wird. **/5**

2.3 Der Graph der Funktion f und die Gerade g mit $g(x) = x + 2$ umschließen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. **/8**

2.4 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P_1\ (1|3)$, $P_2\ (-1|3)$, $P_3\ (2|0)$. **/7**
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p mit Hilfe eines Gleichungssystems.
[Zur Kontrolle: $p(x) = -x^2 + 4$]

2.5 Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel p. **/3**

2.6 Skizzieren Sie die Parabel p in die obige Abbildung. **/5**
Begründen Sie ohne Berechnungen, weshalb gilt:

$$\int_{-2}^{2} p(x)\,dx + 2\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.$$

3 Stochastik /30

Eine Tüte Bonbons enthält 72 Bonbons. Dabei haben $\frac{1}{3}$ der Bonbons Kirschgeschmack, die anderen Bonbons in der Tüte haben Orangengeschmack. Durch einen Produktionsfehler haben 25 % aller Bonbons eine „Ei-Form“, die anderen Bonbons haben die Form einer Kugel. Zehn von den Bonbons mit Kirschgeschmack sind eiförmig. Die Form der Bonbons ist unabhängig vom Geschmack.

3.1 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, die diesen Sachverhalt darstellt. Benennen Sie die verwendeten Abkürzungen. **/6**

3.2 Aus der Tüte wird ein Bonbon zufällig gezogen. **/4**
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...
A: „… ein Bonbon mit Orangengeschmack und Kugelform gezogen wird“.
B: „… ein gezogener eiförmiger Bonbon Orangengeschmack hat.“

In einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern werden alle Bonbons der Tüte verteilt. Beim Verteilen wird nicht auf die Geschmacksrichtung geachtet. Jedes Kind bekommt drei Bonbons.

3.3 Erstellen Sie ein Baumdiagramm, mit dem man die Verteilung der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen der Bonbons für das erste Kind, das sich aus der Tüte seine 3 Bonbons nimmt, darstellen kann. **/7**
Geben Sie dabei alle Zweigwahrscheinlichkeiten in dem Baumdiagramm an.
Benennen Sie die verwendeten Abkürzungen.

3.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse. **/8**
C: „Das Kind bekommt nur Bonbons mit Kirschgeschmack“.
D: „Das Kind bekommt genau zwei Bonbons mit Kirschgeschmack“.
E: „Das Kind bekommt höchstens zwei Bonbons mit Kirschgeschmack“.
F: „Das Kind bekommt mindestens zwei Bonbons mit Kirschgeschmack“.

3.5 Alle Kinder, die im Mai Geburtstag haben, dürfen nun nach vorne kommen und ihre Bonbons ziehen. Das sind 5 Kinder. Diese 5 Kinder stellen sich zufällig in einer Reihe auf. **/2**
Bestimmen Sie die Anzahl an Möglichkeiten, die es für diese Reihe aus 5 Kindern gibt.

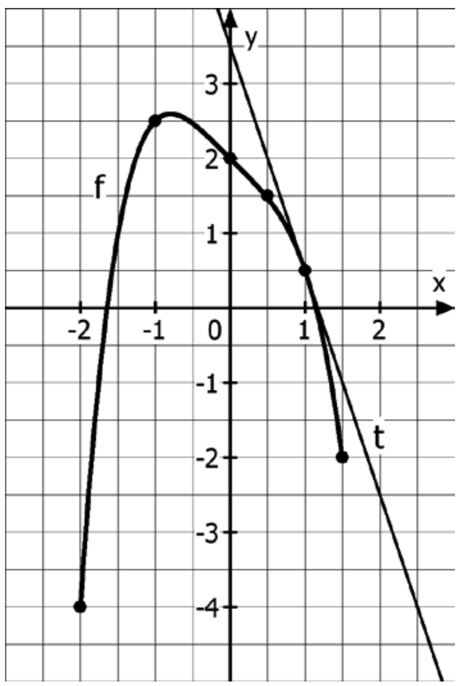
3.6 Als die letzten drei Kinder ihre Bonbons ziehen dürfen, sind noch vier Kirschbonbons und fünf Orangenbonbons in der Tüte. Das erste Kind dieser Gruppe wählt sich daraus zufällig drei Bonbons aus. **/3**
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es nur Kirschbonbons auswählt.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2022
Mathematik

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie | BERLIN

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

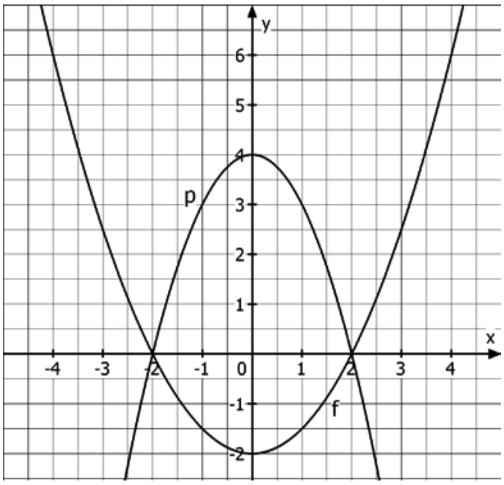
Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

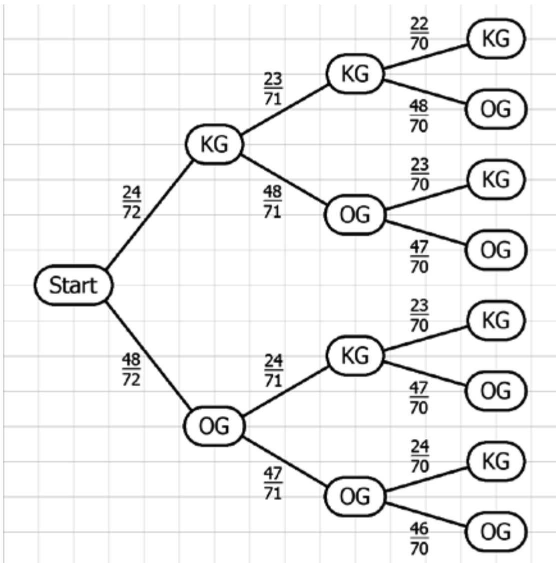
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$; $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$f'(x) = -2x^3 - 1$
$0 = -2x^3 - 1$
$2x^3 = -1$
$x^3 = -\frac{1}{2}$
$x_E \approx -0{,}79$
$f''(x) = -6x^2$
$f''(-0{,}79) = -6\cdot(-0{,}79)^2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt
$f(-0{,}79) = -\frac{1}{2}x^4 - x + 2 \approx 2{,}60$
$H(-0{,}79|2{,}60)$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-2{,}00$</td><td>$-1{,}00$</td><td>0</td><td>0,50</td><td>1,00</td><td>1,50</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>−4,00</td><td>2,50</td><td>2,00</td><td>1,47</td><td>0,50</td><td>−2,03</td></tr>
</table>

</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.4	$t(x) = mx + n$ $m_t = f\,'(1) = -\,2\cdot 1^3 - 1 = -\,3$ $0{,}5 = -\,3\cdot 1 + n \Rightarrow n = 3{,}5$ $t(x) = -\,3x + 3{,}5$ Zeichnung der Tangente $\propto = \arctan(-\,3) \approx -\,71{,}57°$	1	3	1
1.5	$f\,''(x) = -\,6x^2$ Die Ungleichung $-6x^2 > 0$ hat keine Lösung, also gibt es keine Punkte, an denen der Graph von f linksgekrümmt ist.			2
1.6	$-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^4 - x + 2$ $0 = x^2 + x - 1$ $x_{S1/S2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$ $x_{S1} \approx 0{,}62$ $x_{S2} \approx -\,1{,}62 < 0 \Rightarrow$ nicht im 1. Quadranten $f(0{,}62) = -\frac{1}{2}\cdot(0{,}62)^4 + (0{,}62)^2 + 1 \approx 1{,}31$ $S(0{,}62 \mid 1{,}31)$	4		
1.7	$0 = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1$ $0 = -\frac{1}{2}z^2 + z + 1 \;/\cdot(-\,2)$ $0 = z^2 - 2z - 2$ $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1^2+2}$ $z_1 \approx 2{,}73\,;\ z_2 \approx -\,0{,}73$ $x_{N1} \approx 1{,}65\,;\ x_{N2} \approx -\,1{,}65$		5	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.8	$g'(x) = -2x^3 + 2x$ $0 = -2x^3 + 2x$ $0 = x(-2x^2 + 2)$ $x_{E1} = 0$ $0 = -2x^2 + 2$ $x_{E2} = 1$; $x_{E2} = -1$ $g(0) = 1$; $g(1) = 1{,}5$; $g(-1) = 1{,}5$ $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1{,}5 - 1) = \frac{1}{2}$ FE		7	
1.9	$0 = -6x^2 + 2$ $x^2 = \frac{1}{3}$ $x_{W1} \approx 0{,}58$; $x_{W2} \approx -0{,}58$ $g'''(x) = -12x$ $g'''(0{,}58) = -12 \cdot 0{,}58 \neq 0$ $g'''(-0{,}58) = -12 \cdot (-0{,}58) \neq 0$ $g(0{,}58) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}58^4 + 0{,}58^2 + 1 \approx 1{,}28$ $g(-0{,}58) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (-0{,}58)^4 + (-0{,}58)^2 + 1 \approx 1{,}28$ $W_1(0{,}58 \mid 1{,}28)$; $W_2(-0{,}58 \mid 1{,}28)$			5
	Mögliche BE	9	23	8
	Summe Aufgabe		40	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - 2 = 0$ $f(2) = \frac{1}{2}\cdot(2)^2 - 2 = 0$	2		
2.2	$A_1 = -\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^2 - 2\,dx = -\left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-2}^{2}$ $A_1 = -\left(\frac{1}{6}\cdot 2^3 - 2\cdot 2\right) + \left(\frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)\right) = \frac{16}{3}$ FE		5	
2.3	$\frac{1}{2}x^2 - 2 = x + 2$ $d(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ $0 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ $0 = x^2 - 2x - 8$ $x_{S1/S2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 8} = 1 \pm 3$ $x_{S1} = 4$; $x_{S2} = -2$ $A_{fg} = \int_{-2}^{4} d(x)\,dx = \int_{-2}^{4} -\frac{1}{2}x^2 + x + 4\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{4}$ $A_{fg} = \left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot(-2)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)\right)$ $A_{fg} = 18$ FE		8	
2.4	$p(x) = ax^2 + bx + c$ $P_1(1\|3)$: $3 = a + b + c$ $P_2(-1\|3)$: $3 = a - b + c$ $P_3(2\|0)$: $0 = 4a + 2b + c$ $a = 3 - b - c$ $3 = 3 - b - c - b + c \implies b = 0$ $0 = 4\cdot(3 - c) + 2\cdot 0 + c \implies c = 4$ $a = 3 - 0 - 4 \Rightarrow a = -1$ $p(x) = -x^2 + 4$		7	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>$0 = -x^2 + 4$
$x^2 = 4$
$x_{N1,N2} = \pm 2$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>
Da gilt $-2 \cdot f(x) = p(x)$, ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse genau halb so groß wie der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion p und der x-Achse. Verdoppelt man also den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse, so ist er genauso groß wie der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion p und der x-Achse. Aufgrund der Tatsache, dass eine der beiden Flächen ganz oberhalb der x-Achse liegt und die andere ganz unterhalb der x-Achse, gehen die beiden Flächen mit unterschiedlichen Vorzeichen in die Flächenbilanz ein. Also ist die Flächenbilanz 0.</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>7</td><td>20</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Teil-
aufgabe</td><td rowspan="2">Erwartete Teilleistung</td><td colspan="3">BE in AB</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>KG: „Kirschgeschmack“ R: „Rund“
OG: „Orangengeschmack“ E: „Eiförmig“
<table>
<tr><td></td><td>KG</td><td>OG</td><td>∑</td></tr>
<tr><td>R</td><td>14</td><td>40</td><td>54</td></tr>
<tr><td>E</td><td>10</td><td>8</td><td>18</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>24</td><td>48</td><td>72</td></tr>
</table>
fett: direkt aus dem Text entnommen</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$P(A) = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$
$P(B) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>KG: „Kirschgeschmack“
OG: „Orangengeschmack“

</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$P(C) = \frac{24}{72}\cdot\frac{23}{71}\cdot\frac{22}{70} \approx 0{,}03$
$P(D) = \frac{24}{72}\cdot\frac{23}{71}\cdot\frac{48}{70} + \frac{24}{72}\cdot\frac{48}{71}\cdot\frac{23}{70} + \frac{48}{72}\cdot\frac{24}{71}\cdot\frac{23}{70} \approx 0{,}22$
$P(E) = 1 - \frac{24}{72}\cdot\frac{23}{71}\cdot\frac{22}{70} \approx 0{,}97$
$P(F) = P(C) + P(D) \approx 0{,}25$</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>$5! = 120$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.6</td><td>$P(KG;KG;KG) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{21}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>6</td><td>22</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>