



Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2021/2022

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	25.05.2022
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmiereteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.
Erwartungshorizonte	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe¹:	70

¹ Jeder Prüfling bearbeitet nur eine der beiden Aufgaben Nr. 2 oder Nr. 3



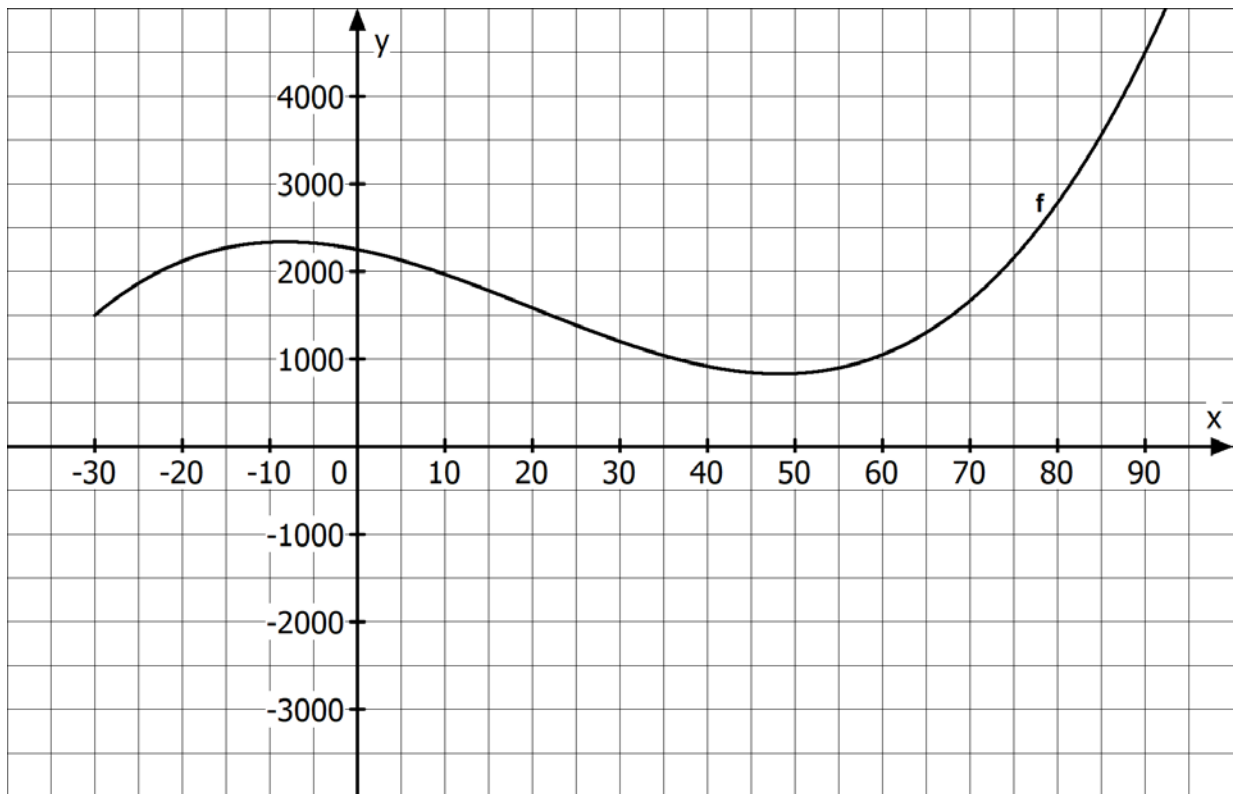
1 Funktionsuntersuchung

/40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{60}x^3 - x^2 - 20x + 2250; x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist im folgenden Koordinatensystem für $x \geq -30$ dargestellt.



- 1.1 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der y -Achse an. /1
- 1.2 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an. /3
Begründen Sie Ihre Aussage.
- 1.3 Weisen Sie nach, dass die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im /6
Punkt $(30|f(30))$ die Gleichung $t(x) = -35x + 2250$ besitzt.
Zeichnen Sie diese Tangente in das obige Koordinatensystem ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Gegeben ist eine weitere Funktion g . Diese Funktion wird definiert durch die Funktionsgleichung

$$g(x) = 40x - f(x); x \in \mathbb{R}.$$

- 1.4** Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g die folgende Funktionsgleichung besitzt: **/2**

$$g(x) = -\frac{1}{60}x^3 + x^2 + 60x - 2250.$$

- 1.5** Es gilt $g(30) = 0$. **/8**
Es gibt einen weiteren Wert $x_N > 0$, für den gilt $g(x_N) = 0$.
Berechnen Sie diesen Wert x_N .

- 1.6** Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion g genau ein relatives Maximum besitzt. **/9**
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.

- 1.7** Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. Geben Sie Ihre Ergebnisse gerundet auf ganze Zahlen an. **/2**

x	-30	- 10	10	30	70	90
$g(x)$	-2700			0		

- 1.8** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g für $-30 \leq x \leq 90$ und unter Einbeziehung aller berechneten Werte in das Koordinatensystem auf der vorherigen Seite. **/4**

- 1.9** Zeigen Sie, dass sich allein aus der Gleichung $g(x) = 40x - f(x)$ die Richtigkeit folgender Aussage schlussfolgern lässt: **/5**

„Die Funktion f und die Funktion g besitzen an derselben Stelle ihren Wendepunkt.“

Berechnen Sie nicht die Wendestelle des Graphen der Funktion g .

2 Integralrechnung

/30

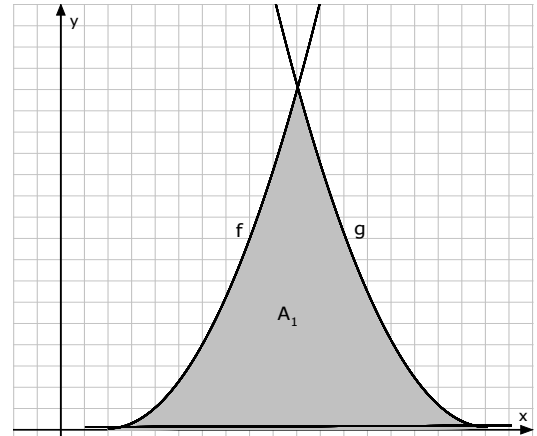
Gegeben sind die folgenden Funktionen f und g :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

und

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-9)^2$$

Die Graphen der Funktionen f und g umschließen mit der x -Achse die Fläche A_1 (nebenstehende Abbildung).



Geben Sie Ihre Ergebnisse bei allen Aufgaben mit drei Nachkommastellen an.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der drei Eckpunkte der Fläche A_1 /8

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_1 . /6

[Wenn Sie 2.1 nicht gelöst haben, verwenden Sie $x_{N1} = 1$, $x_{N2} = 9$ und $x_S = 5$]

2.3 Die drei Eckpunkte der Fläche A_1 aus 2.1 bilden auch die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks. /4

Berechnen Sie für dieses Dreieck den Flächeninhalt A_{Dreieck} .

Berechnen Sie die prozentuale Abweichung von A_{Dreieck} zu A_1 .

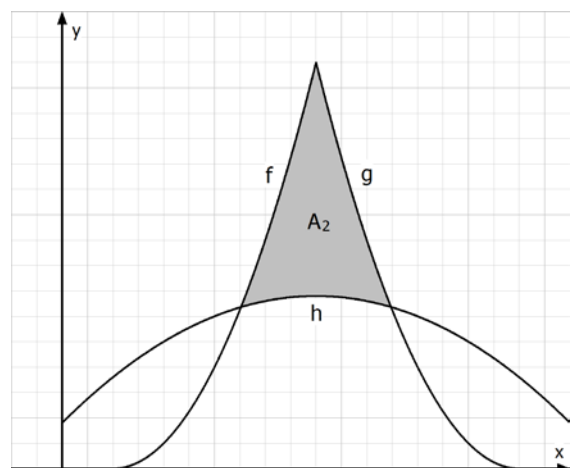
Die Parabel h schneidet den Graphen von f im Punkt $P_1(3,5|3,125)$ und den Graphen von g im Punkt $P_2(6,5|3,125)$. Dabei kann die Parabel h durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$h(x) = ax^2 + x + c$$

2.4 Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und c . /5

2.5 Gemäß der nebenstehenden Abbildung schließen die Graphen der Funktionen f , g und h im ersten Quadranten die Fläche A_2 ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_2 .

[Wenn Sie 2.4 nicht gelöst haben, verwenden Sie $a = -0,1$ und $c = 0,85$]



3 Stochastik /30

Für ein Abschiedsessen mit ihrer Klasse kauft Frau Sommer Getränke ein. Sie besorgt 12 Flaschen Wasser und 18 Flaschen Zitronenlimonade. Beim Kühlen der Flaschen in kaltem Wasser lösen sich die Etiketten ab, danach sind die Flaschen von außen nicht mehr zu unterscheiden.

- 3.1** Von den eingekauften Flaschen werden nacheinander drei Flaschen zufällig ausgewählt und nicht zurückgelegt. **/7**
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit allen Zweigwahrscheinlichkeiten für diese Situation.
Nennen Sie auch die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.
- 3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei entnommenen Flaschen das gleiche Getränk beinhalten. **/2**
- 3.3** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine der drei Flaschen Wasser enthält. **/2**
- 3.4** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der drei Flaschen Wasser enthält. **/3**

Am Abend ist ein Grillfest geplant. Frau Sommer hat Grillkäse und Würstchen besorgt. Es haben sich insgesamt 25 Eltern und Kinder angekündigt. Von den 15 Kindern essen 60 % am liebsten Würstchen. Von den Eltern essen 70 % am liebsten Grillkäse.

- 3.5** Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt eine Vierfeldertafel. **/5**
Machen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen mit Hilfe einer Legende deutlich.
- 3.6** Von den Gästen wird eine Person zufällig ausgewählt. **/4**
Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:
E1: „Die Person isst gern Würstchen.“
E2: „Die Person ist ein Kind, das am liebsten Grillkäse isst.“
- 3.7** Von den Gästen wird eine Person zufällig ausgewählt. **/2**
Diese Person isst am liebsten Würstchen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass diese Person ein Kind ist.
- 3.8** Von den Gästen wird eine Person zufällig ausgewählt. **/5**
Betrachtet werden folgende Ereignisse:
K: Die Person ist ein Kind.
W: Die Person isst am liebsten Würstchen.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse K und W stochastisch unabhängig sind.



Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	$S_y(0 2250)$	1		
1.2	Für $x \rightarrow -\infty$ gehen die Funktionswerte der Funktion f gegen $-\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ gehen die Funktionswerte der Funktion f gegen $+\infty$, da der größte Exponent von x ungerade ist und der Leitkoeffizient größer als 0 ist.	3		
1.3	$t(x) = m \cdot x + n$ $f(30) = 1200$ $m = f'(30)$ mit $f'(x) = \frac{1}{20}x^2 - 2x - 20$ $m = -35$ $\Rightarrow 1200 = -35 \cdot 30 + n$ $\Rightarrow n = 2250$ $\Rightarrow t(x) = -35 \cdot x + 2250$ Tangente in das Koordinatensystem einzeichnen.	1	5	
1.4	$g(x) = 40x - f(x) = 40x - \left(\frac{1}{60}x^3 - x^2 - 20x + 2250\right)$ $g(x) = -\frac{1}{60}x^3 + x^2 + 60x - 2250$	2		
1.5	$g(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{60}x^3 + x^2 + 60x - 2250 \quad : \left(-\frac{1}{60}\right)$ $0 = x^3 - 60x^2 - 3600x + 135000$ Polynomdivision/Hornerschema mit $x_{N_1} = 30$: $(x^3 - 60x^2 - 3600x + 135000) : (x - 30) = x^2 - 30x - 4500$ $\Rightarrow 0 = x^2 - 30x - 4500$ $\Rightarrow p\text{-}q\text{-Formel: } x_{N_2} \approx 83,74 \text{ und } x_{N_3} \approx -53,74 \text{ (nicht relevant)}$			8

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																
		I	II	III														
1.6	$g'(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 2x + 60$ $g''(x) = -\frac{1}{10}x + 2$ <p><u>Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$</u></p> $0 = -\frac{1}{20}x^2 + 2x + 60 \quad : \left(-\frac{1}{20}\right)$ $0 = x^2 - 40x - 1200$ $\Rightarrow p\text{-}q\text{-Formel: } x_{E_1} = 60 \text{ und } x_{E_2} = -20$ <p><u>Hinreichende Bedingung: $g'(x) = 0, g''(x) \neq 0$</u></p> $g''(60) = -4 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum (Hochpunkt)}$ $g''(-20) = 4 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum (Tiefpunkt)}$ $g(60) = 1350 \Rightarrow H(60 1350)$			9														
1.7	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>-30</td> <td>-10</td> <td>10</td> <td>30</td> <td>70</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>g(x)</td> <td>-2700</td> <td>-2733</td> <td>-1566</td> <td>0</td> <td>3040</td> <td>-900</td> </tr> </table>	x	-30	-10	10	30	70	100	g(x)	-2700	-2733	-1566	0	3040	-900	2		
x	-30	-10	10	30	70	100												
g(x)	-2700	-2733	-1566	0	3040	-900												
1.8		4																

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.9	$g(x) = 40x - f(x)$ $g'(x) = 40 - f'(x)$ $g''(x) = -f''(x) \Rightarrow g''(x_W) = -f''(x_W) = 0$ (notwendige Bedingung), da $f''(x_W) = 0$. $g'''(x) = -f'''(x) \Rightarrow g'''(x_W) = -f'''(x_W) \neq 0$ (hinreichende Bedingung), da $f'''(x_W) \neq 0$. Weitere Wendepunkte sind nicht möglich, da g und f jeweils Funktionen 3. Grades sind.			5
	Mögliche BE	13	22	5
	Summe Aufgabe	40		

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	Nullstellen: $0 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \cdot 2$ $0 = x^2 - 2x + 1$ $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1}$ $x_{N1} = 1; N_1(1 0)$ $0 = \frac{1}{2}(x - 9)^2$ $0 = x - 9$ $x_{N2} = 9; N_2(9 0)$ Schnittpunkt: $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 9)^2$ $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 9x + 40,5$ $f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 5 + \frac{1}{2} = 8$ $x_S = 5; S(5 8)$	8		
2.2	$A_1 = A_f + A_g = \int_1^5 f(x) dx + \int_5^9 g(x) dx$ $A_1 = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 0,5x \right]_1^5 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 40,5x \right]_5^9$ $A_1 = F(5) - F(1) + G(9) - G(5)$ $A_1 = \frac{65}{6} - \frac{1}{6} + \frac{243}{2} - \frac{665}{6} = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$ $A_1 \approx 21,333 \text{ FE}$ Der Flächeninhalt A_1 beträgt 21,333 FE.		6	
2.3	$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{(9 - 1) \cdot 8}{2} = 32 \text{ FE}$ Die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks beträgt 32 Flächeneinheiten. $A_{\text{Dreieck}} - A_1 \approx 32 \text{ FE} - 21,33 \text{ FE} \approx 10,67 \text{ FE}$ $\frac{100 \%}{A_{\text{Dreieck}}} \cdot (A_{\text{Dreieck}} - A_1) = \frac{100 \%}{32 \text{ FE}} \cdot 10,67 \text{ FE} \approx 33 \%$	2		2

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.4	$3,125 = a \cdot 3,5^2 + 3,5 + c$ $3,125 = a \cdot 6,5^2 + 6,5 + c$ $3,125 = 12,25a + 3,5 + c$ $3,125 = 42,25a + 6,5 + c$ Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren $c = -12,25a - 0,375$ $0 = -30a - 3$ $3,125 = 42,25a + 6,5 - 12,25a - 0,375$ $3 = -30a$ $\Rightarrow a = -0,1$ $\Rightarrow a = 0,1$ $c = -12,25 \cdot (-0,1) - 0,375$ $\Rightarrow c = 0,85$ $h(x) = -0,1x^2 + x + 0,85$			5
2.5	$A_2 = \int_{3,5}^5 f(x) - h(x) dx + \int_5^{6,5} g(x) - h(x) dx$ $f(x) - h(x) = 0,6x^2 - 2x - 0,35$ $g(x) - h(x) = 0,6x^2 - 10x + 39,65$ $A_2 = \int_{3,5}^5 0,6x^2 - 2x - 0,35 dx + \int_5^{6,5} 0,6x^2 - 10x + 39,65 dx$ $A_2 = \left[\frac{1}{5}x^3 - x^2 - 0,35x \right]_{3,5}^5 + \left[\frac{1}{5}x^3 - 5x^2 + 39,65x \right]_5^{6,5}$ $A_2 = \left(\frac{1}{5} \cdot 5^3 - 5^2 - 0,35 \cdot 5 \right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 3,5^3 - 3,5^2 - 0,35 \cdot 3,5 \right)$ $+ \left(\frac{1}{5} \cdot 6,5^3 - 5 \cdot 6,5^2 + 39,65 \cdot 6,5 \right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + 39,65 \cdot 5 \right)$ $A_2 = 6,3 \text{ FE}$		7	
	Mögliche BE	10	13	7
	Summe Aufgabe	30		

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																		
		I	II	III																
3.1	<p>W: Wasser Z: Zitronenlimonade</p>		7																	
3.2	$P(WWW, ZZZ) = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} = \frac{37}{145} \approx 0,2552$ <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 25,52 % werden drei gleiche Flaschen entnommen.</p>		2																	
3.3	$P(WZZ, ZWZ, ZZW) = \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{17}{28} + \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{17}{28} + \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{12}{28} \approx 0,4522$ <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von 45,22 % enthält genau eine der drei Flaschen Wasser.</p>		2																	
3.4	$1 - P(ZZZ) = 1 - \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} = \frac{811}{1015} \approx 0,7990$ <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von 79,90 % enthält mindestens eine der drei Flaschen Wasser.</p>		3																	
3.5	<p>K: Kind W: Würstchen E: Elternteil G: Grillkäse</p> <p>auch andere Beschriftungen sind möglich</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">K</td> <td style="text-align: center;">E</td> <td style="text-align: center;">Σ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">W</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">12</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">G</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">13</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Σ</td> <td style="text-align: center;">15</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">25</td> </tr> </table>		K	E	Σ	W	9	3	12	G	6	7	13	Σ	15	10	25		5	
	K	E	Σ																	
W	9	3	12																	
G	6	7	13																	
Σ	15	10	25																	

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.6	$P(E_1) = \frac{12}{25} = 0,48$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 48 % isst die Person gern Würstchen. $P(E_2) = \frac{6}{25} = 0,24$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 24 % ist die Person ein Kind, das am liebsten Grillkäse isst.		4	
3.7	$P_W(K) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$ Unter den Personen, die am liebsten Grillwürstchen essen, sind 75 % Kinder.		2	
3.8	$P(W) = P_K(W)$ dann sind die Ereignisse stochastisch unabhängig $P(W) = \frac{12}{25} = 0,48$ $P_K(W) = \frac{9}{15} = 0,6$ $0,48 \neq 0,6 ; P(W) \neq P(W \cap K)$ Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.			5
	Mögliche BE	5	20	5
	Summe Aufgabe	30		