LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2021/2022

Mathematik B

06. Mai 2022 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 3x^3 - x^2 - 20x - 12$; $x \in IR$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte im Unendlichen an und notieren Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von G_f und geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f und geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f an.

(zur Kontrolle: Extremstellen $x_1 \approx 1{,}61$ und $x_2 \approx -1{,}38$)

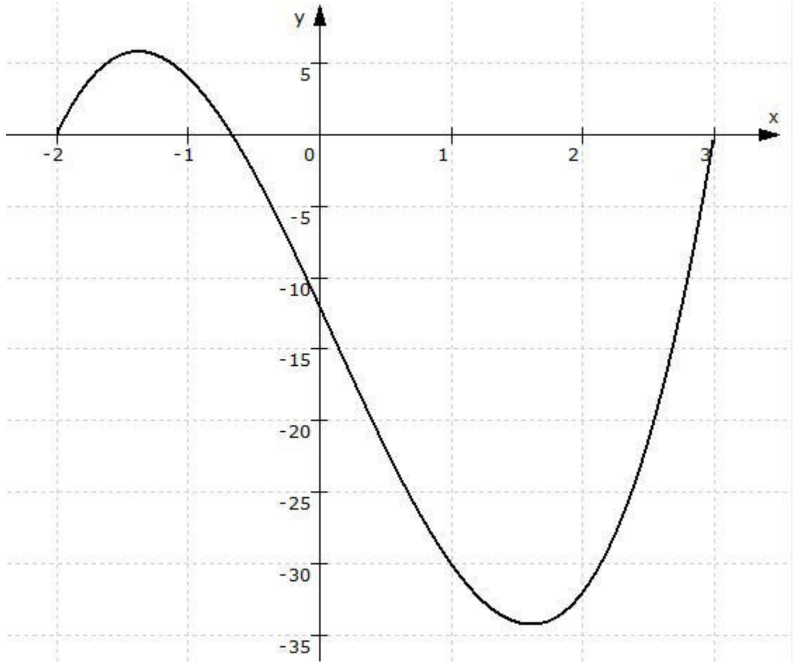
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_f und geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen an.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Achten Sie auf eine geeignete Achseneinteilung.

f) Der Punkt $P(1 \mid y_P)$ liegt auf G_f.
Berechnen Sie den Funktionswert y_P und den Anstieg des Graphen in diesem Punkt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen von G_f im Punkt P.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	5	5	7	5	3	5	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	2
	$f'(x) = 9x^2 - 2x - 20$; $f''(x) = 18x - 2$; $f'''(x) = 18$	3
1b)	$f(x) = 3x^3 - x^2 - 20x - 12 = 0$ Probierlösung: $x_1 = 3$ $\left(3x^3 - x^2 - 20x - 12\right) : (x - 3) = 3x^2 + 8x + 4$ $3 \cdot \left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 0$ $x_2 = -\frac{2}{3}$ und $x_3 = -2$ (Alternative: bei $x_1 = -2$ ergibt sich $\left(3x^3 - x^2 - 20x - 12\right) : (x + 2) = 3x^2 - 7x - 6$)	4
	$S_y(0 \mid -12)$	1
1c)	$f'(x) = 9 \cdot (x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{20}{9}) = 0$ $x_1 \approx 1{,}61$ und $x_2 \approx -1{,}38$	2
	$f''(1{,}61) = 26{,}98 > 0$; $f(1{,}61) \approx -34{,}27$; $T(1{,}61 \mid -34{,}27)$ $f''(-1{,}38) = -26{,}84 < 0$; $f(-1{,}38) \approx 5{,}81$; $H(-1{,}38 \mid 5{,}81)$	3
	$-\infty < x < -1{,}38$: f ist (streng) monoton steigend $-1{,}38 < x < 1{,}61$: f ist (streng) monoton fallend $1{,}61 < x < \infty$: f ist (streng) monoton steigend	2
1d)	$f''(x) = 18x - 2 = 0$ $x = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$ $f'''\left(\frac{1}{9}\right) = 18 \neq 0$ WP; $f\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{3458}{243} \approx -14{,}23$; $W(0{,}11 \mid -14{,}23)$	3
	$-\infty < x < \frac{1}{9}$: Es liegt Rechtskrümmung von G_f vor. $\frac{1}{9} < x < \infty$: Es liegt Linkskrümmung von G_f vor.	2

1e)		3
1f)	$y_P = f(1) = -30$ $f'(1) = -13$ Normale durch P: $m = -\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{13}$ $-30 = \frac{1}{13} \cdot 1 + n \rightarrow n \approx -30{,}08$ $n(x) = \frac{1}{13}x - 30{,}08$	2 3
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

(Quelle: privat)

Eine Werbeagentur plant einen Pappaufsteller in Form eines Zahns, dessen Form der Abbildung 1 zu entnehmen ist. Zur Stabilisierung sind zwei Leisten angebracht, deren Lage der Abbildung 2 entnommen werden kann. Die Breite der Leisten kann für die Berechnungen vernachlässigt werden. Eine Längeneinheit entspricht 20 cm in der Wirklichkeit.

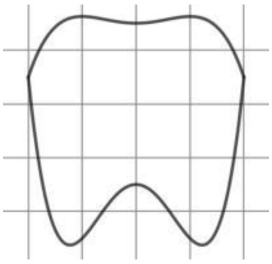


Abbildung 1

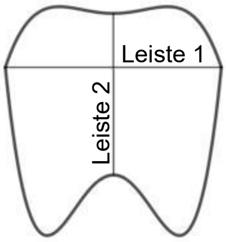


Abbildung 2

Der **obere** Teil des Aufstellers kann mit Hilfe der ganzrationalen Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}$; $x \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Der Graph der Funktion heißt G_g.
Der **untere** Teil lässt sich mit Hilfe der ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^2 - 1{,}5$; $x \in \mathbb{R}$ beschreiben. Der Graph der Funktion heißt G_f.

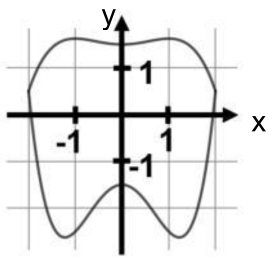
a) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der gemeinsamen Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g.
(zur Kontrolle: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$)

b) Berechnen Sie die jeweilige Länge der waagerechten Leiste 1 und der senkrechten Leiste 2 (siehe Abbildung 2).
Beide Leisten werden aus einem 1,50 m langen Stück geschnitten. Geben Sie den Verschnitt in Prozent an.

c) Skizzieren Sie in die Abbildung 1 ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem mit entsprechender Achseneinteilung.

d) Weisen Sie nach, dass der Inhalt der in Abbildung 1 dargestellten Fläche $\frac{40}{3}$ Flächeneinheiten beträgt.
Der Aufsteller soll beidseitig bedruckt werden. Berechnen Sie die Größe der zu bedruckenden Fläche in cm².
Der Druck kostet 25 Euro pro m². Berechnen Sie die entstehenden Kosten.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	7	4	2	7	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$g(x) = f(x)$ $-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 1{,}5 = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^2 - 1{,}5$ $0 = \frac{5}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3 \qquad x^2 = z$	2
	$0 = z^2 - \frac{14}{5}z - \frac{24}{5}$ $z_{1/2} = 1{,}4 \pm \sqrt{1{,}96 + 4{,}8}$ $z_1 = 4 \qquad x_{1/2} = \pm 2$ $z_2 = -1{,}2$	3
	$f(-2) = 0{,}5; \quad f(2) = 0{,}5$ $S_1(-2 \mid 0{,}5); \quad S_2(2 \mid 0{,}5)$	2
2b)	waagerechte Leiste: Abstand der Schnittstellen 4 LE entspricht 80 cm.	1
	senkrechte Leiste: Abstand der y-Achsen-Schnittpunkte 3 LE entspricht 60 cm.	2
	Verschnitt: $\frac{150-80-60}{150} \cdot 100\ \% = \frac{10}{150} \cdot 100\ \% \approx 6{,}67\ \%$	1
2c)		2
2d)	$A = \left\| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx \right\| = \left\| \int_{-2}^{2} \left(\frac{5}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3\right) dx \right\|$ $A = \left\| \left[\frac{1}{8}x^5 - \frac{7}{12}x^3 - 3x\right]_{-2}^{2} \right\|$ $A \approx \left\| \left(-\frac{20}{3}\right) - \left(\frac{20}{3}\right) \right\| = \frac{40}{3}$ FE	3
	Flächeninhalt beider Seiten: $\frac{40}{3} \cdot 2 \cdot 400$ cm² $= \frac{32000}{3}$ cm² $\approx 10666{,}67$ cm²	2
	Druckkosten: $\frac{32000}{3}$ cm² $= \frac{16}{15}$ m² $\frac{16}{15}$ m² $\cdot 25 \frac{\text{Euro}}{\text{m}^2} = \frac{80}{3}$ Euro $\approx 26{,}67$ Euro	2
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

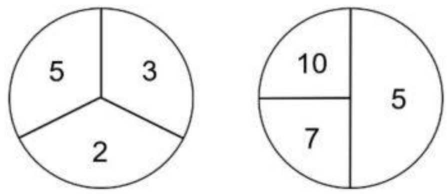


Abbildung 1 Abbildung 2

Das Glücksrad 1 (Abbildung 1) hat drei gleich große Sektoren mit den Zahlen 2, 3 und 5. Es wird pro Spiel **zweimal** gedreht.

a) Stellen Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω für diesen Zufallsversuch auf. Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

b) Berechnen Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in einem Spiel:

A: Die Zahl 2 erscheint mindestens einmal.
B: Es werden nur ungerade Zahlen erzielt.

Geben Sie das Gegenereignis von B in Worten an.

c) Beim Probelauf vom Glücksrad 1 werden jetzt die Augensummen betrachtet. Nach 10 Spielen ergeben sich folgende Augensummen:

8	8	5	5	4	6	6	7	10	7

Ermitteln Sie rechnerisch das arithmetische Mittel und die Standardabweichung für diese Stichprobe.

Das Glücksrad 2 hat drei Sektoren, wovon zwei Sektoren die Größe von jeweils 25 % einnehmen. Die Beschriftung der Sektoren ist der Abbildung 2 zu entnehmen.

d) Bei einem neuen Spiel werden beide Glücksräder nacheinander jeweils einmal gedreht. Begonnen wird mit Glücksrad 1.
Zeichnen Sie für diesen Zufallsversuch ein Baumdiagramm.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Glücksräder die Zahl fünf zeigen.
Entscheiden und begründen Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeit ändert, wenn mit dem Glücksrad 2 begonnen wird.

e) Beide Glücksräder werden einmal gleichzeitig gedreht. Geben Sie alle möglichen Augensummen und deren Wahrscheinlichkeiten an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme einstellig ist.

f) Glücksrad 2 wird viermal hintereinander gedreht. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass viermal die gleiche Zahl erscheint.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	3	3	4	5	3	2	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>Ergebnismenge: $\Omega = \{(2,2);(2,3);(2,5);(3,2);(3,3);(3,5);(5,2);(5,3);(5,5)\}$

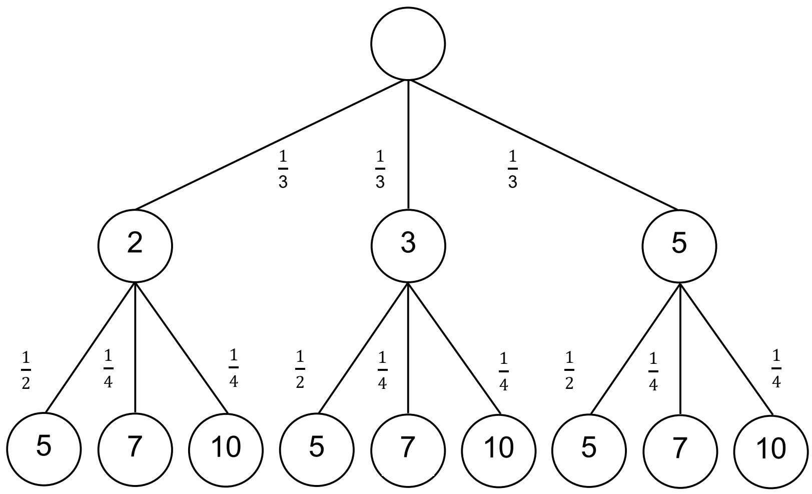
Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, weil alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>$P(A) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56$
$P(B) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$

Gegenereignis von B: Höchstens eine ungerade Zahl wird erzielt.</td><td>2

1</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>Arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 10}{10} = \frac{66}{10} = 6{,}6$

$s^2 = \frac{(4-6{,}6)^2 + 2 \cdot (5-6{,}6)^2 + \ldots + (10-6{,}6)^2}{10-1} = \frac{142}{45} \approx 3{,}16$

Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{142}{45}} \approx 1{,}78$
(Alternativlösung bei Nutzung der $\frac{1}{n}$ -Formel: $s \approx 1{,}69$)</td><td>2

2</td></tr>
<tr><td>3d)</td><td>

$P(5;5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$
Die Ergebnisse verändern sich nicht. Der Pfad bleibt gleich, nur die Faktoren werden vertauscht.</td><td>3

2</td></tr>
<tr><td>3e)</td><td><table><tr><td>Augensumme</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>12</td><td>13</td><td>15</td></tr><tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td></tr></table>
$P(7;\,8;\,9) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$</td><td>2

1</td></tr>
</table>

3f)	F: Es erscheint viermal die gleiche Zahl. $P(F) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9}{128} \approx 0{,}07$	2
	Summe	20

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2021/22 im Fach Mathematik

Name der Gutachter*in: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Name des Prüflings: ______________________ Klasse: __________

Schule: __________________________________ Datum der Prüfung: 06.05.2022

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Verhalten im Unendlichen Notieren der ersten bis dritten Ableitung	2 3		
1b)	Berechnen der Nullstellen von f Schnittpunkt mit der y-Achse	4 1		
1c)	Berechnen der Extremstellen Nachweis und Angeben der Koordinaten der Extrempunkte Notieren des Monotonieverhaltens	2 3 2		
1d)	Berechnen des Wendepunktes Notieren des Krümmungsverhaltens	3 2		
1e)	Zeichnen des Graphen	3		
1f)	Berechnen von Funktionswert und Anstieg Ermitteln der Gleichung der Normalen	2 3		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Ermitteln der Differenzfunktion … … und Berechnen ihrer Nullstellen Angeben der Schnittpunkte	2 3 2		
2b)	Berechnen der Länge der waagerechten Leiste 1 Berechnen der Länge der senkrechten Leiste 2 Angeben des Verschnitts	1 2 1		
2c)	Skizzieren des Koordinatensystems	2		
2d)	Berechnen der dargestellten Fläche Berechnen der Druckfläche Berechnen der Druckkosten	3 2 2		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Notieren der Ergebnismenge Begründen des Laplace-Experiments	3		
3b)	Berechnen der Wahrscheinlichkeiten Formulierung des Gegenereignisses	2 1		
3c)	Berechnen des arithmetischen Mittelwerts Berechnen der Standardabweichung	2 2		
3d)	Zeichnen und Beschriften des Baumdiagramms Bestimmen und Begründen der Wahrscheinlichkeit	3 2		
3e)	Notieren der Augensummen mit ihren Wahrsch. Berechnen der Wahrscheinlichkeit	2 1		
3f)	Ermitteln der Wahrscheinlichkeit	2		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____
Datum und Unterschrift der Gutachter*in