LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2022/2023

Mathematik A

05. Mai 2023 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 4x^2 + 8$; $x \in$ IR.
Der Graph der Funktion heißt G_f. Der Punkt Q(2 | 22) ist Teil von G_f.

a) Begründen Sie, weshalb der Graph der Funktion f symmetrisch zur y-Achse verläuft.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.

c) Weisen Sie nach, dass G_f im Punkt Q einen Anstieg von m = 12 besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an G_f im Punkt Q.

d) Erstellen Sie eine Wertetabelle mit mindestens sieben x-Werten aus dem Intervall $-6 \le x \le 6$.
Zeichnen Sie G_f in diesem Intervall in ein kartesisches Koordinatensystem.
Wählen Sie eine geeignete Achseneinteilung.

e) Die Punkte O(0 | 0), P(2 | 0) und Q bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

Ergänzen Sie das Dreieck OPQ in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe d).
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks OPQ.

Betrachtet wird nun ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck OP´Q´, wobei Q´(x | f(x)) ein beliebiger Punkt auf G_f im Intervall $0 < x < 6$ ist und P´(x | 0) senkrecht unter Q´ auf der x-Achse liegen soll.
Zeigen Sie rechnerisch, dass mit Hilfe der Funktionsgleichung
$A(x) = -\frac{1}{16}x^5 + 2x^3 + 4x$ der Flächeninhalt eines solchen beliebigen Dreiecks in Abhängigkeit von x berechnet werden kann.

f) Ermitteln Sie die Extremstelle x_E der Funktion A im angegebenen Intervall.
Weisen Sie nach, dass das durch x_E festgelegte Dreieck OP´Q´ einen maximalen Flächeninhalt besitzt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	3	8	4	4	5	6	30

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>1a)</td><td>Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind, bzw. weil gilt $f(x) = f(-x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$</td><td>1

2</td></tr>
<tr><td>1b)</td><td>$f'(x) = -0{,}5x^3 + 8x$; $f''(x) = -1{,}5x^2 + 8$

$f'(x) = -0{,}5x^3 + 8x = 0$
$x(-0{,}5x^2 + 8) = 0$ $x_1 = 0$
$-0{,}5x^2 + 8 = 0$ $x_{2,3} = \pm 4$

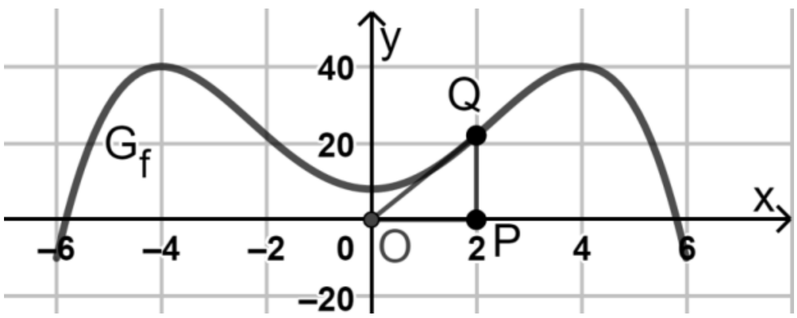
$f''(0) = 8 > 0$; $f(0) = 8$; $T(0 \mid 8)$
$f''(\pm 4) = -16 < 0$; $f(\pm 4) = 40$; $H_{1,2}(\pm 4 \mid 40)$</td><td>2

3

3</td></tr>
<tr><td>1c)</td><td>$f'(2) = 12$, somit $m_n = -\frac{1}{12}$
$22 = -\frac{1}{12}\cdot 2 + n$ $n = \frac{133}{6} \approx 22{,}17$
$n(x) = -\frac{1}{12}x + \frac{133}{6}$</td><td>2

2</td></tr>
<tr><td>1d)</td><td>Mindestens 7 Wertepaare, z. B.

x	±1	±3	±5	±6
y	11,88	33,88	29,88	–10

Hinweis: Das Dreieck OPQ wird erst bei der Teilaufgabe e) ergänzt.

</td><td>1

3</td></tr>
<tr><td>1e)</td><td>Dreieck einzeichnen (siehe oben)
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 22 = 22$ FE

HB: $A = \frac{1}{2}g\cdot h$
NB: $g = x$, $h = f(x)$
ZF: $A(x) = \frac{1}{2}x\cdot\left(-\frac{1}{8}x^4 + 4x^2 + 8\right) = -\frac{1}{16}x^5 + 2x^3 + 4x$</td><td>1
1

3</td></tr>
</table>

1f)	$A'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 6x^2 + 4$ $A'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 6x^2 + 4 = 0 \;\; \vert : \left(-\frac{5}{16}\right) \quad x^2 = z$ $z^2 - \frac{96}{5}z - \frac{64}{5} = 0$ $z_1 \approx 19{,}84$; $x_E \approx 4{,}45$ ($x_2 \approx -4{,}45$ liegt nicht im Intervall) $z_2 \approx -0{,}64$ $A''(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 12x$; $A''(4{,}45) \approx -56{,}75 < 0$ Maximum Für $x_E \approx 4{,}45$ besitzt das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt.	1 3 2
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Der Graph der quadratischen Funktion g verläuft symmetrisch zur y-Achse.
Die Punkte $A(2 \mid -6)$ und $B(6 \mid 10)$ sind Teil des Graphen G_g.

a) Ermitteln Sie eine zugehörige Funktionsgleichung zur Funktion g.

   (zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$)

b) Der Graph der Funktion g schließt mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein.

   Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

c) Die ganzrationale Funktion f ergibt sich als Produkt der Funktionen g und h mit $h(x) = x - 4$.
   Zeigen Sie, dass sich die Funktion f als $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 8x + 32$ darstellen lässt.

d) Begründen Sie, dass die Funktion f genau dieselben Nullstellen wie g und keine weiteren besitzt.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Wendepunkte des Graphen von f.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	5	5	2	2	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$g(x) = ax^2 + b$ $g(2) = -6: \quad 4a + b = -6$ $g(6) = 10: \quad 36a + b = 10$ Lösung des LGS: $a = \frac{1}{2}$ und $b = -8$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$	3 2
2b)	$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$ $x_{1,2} = \pm 4$ $A = \left\|\int_{-4}^{4} g(x)dx\right\| = \left\|\left[\frac{1}{6}x^3 - 8x\right]_{-4}^{4}\right\| = \left\|-\frac{64}{3} - \frac{64}{3}\right\| = \left\|-\frac{128}{3}\right\| \approx 42{,}67$ FE	2 3
2c)	$f(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 8\right)\cdot(x-4) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 8x + 32$	2
2d)	Da die Funktion f das Produkt von g und h ist, setzt sich die Menge ihrer Nullstellen aus allen Nullstellen von g und h zusammen. Die Funktion h besitzt jedoch nur die Nullstelle $x_0 = 4$, die zugleich auch schon Nullstelle von g ist. Somit besitzen beide Funktionen f und g genau die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 4$. Hinweis: Alternative Begründungen z. B. durch Rechnung sind möglich.	2
2e)	$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - 8$; $\quad f''(x) = 3x - 4$; $\quad f'''(x) = 3$ $f''(x) = 3x - 4 = 0$ $x = \frac{4}{3}$ $f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \neq 0$ WP; $\quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{512}{27} \approx 18{,}96$; $\quad W\left(\frac{4}{3} \mid 18{,}96\right)$	3 3
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Schwimmbad bietet am Eröffnungstag für die erste Stunde einen „Happy-Hour"-Tarif entsprechend der nebenstehenden Preistabelle an.

Happy-Hour-Tarif Preistabelle		
Eintrittspreis in Euro	Erwachsene	Kinder
Schwimmbad	15 €	10 €
Schwimmbad + Sauna	25 €	18 €

Unter den insgesamt 80 „Happy-Hour"-Gästen befinden sich 30 Erwachsene und der Rest sind Kinder. Es haben 60 Personen den Saunatarif gewählt, davon 35 Kinder.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der obigen Beschreibung zu jeder der vier Tarifoptionen die Anzahl der Gäste entsprechend der nebenstehenden Übersicht.

Happy-Hour-Tarif Gästezahlen		
Anzahl Gäste	Erwachsene	Kinder
Schwimmbad	……..	……..
Schwimmbad + Sauna	……..	……..

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel des Eintrittspreises aller 80 Gäste und die zugehörige Standardabweichung.

Von allen „Happy-Hour"-Gästen erhalten drei Personen als Eröffnungsaktion ein kostenloses Mittagessen im Restaurant des Schwimmbades.

c) Bestimmen Sie die Anzahl an Möglichkeiten des Schwimmbadbetreibers, aus allen „Happy-Hour"-Gästen drei Personen auszuwählen.

d) Eine Verlosung soll helfen, die drei kostenlosen Mittagessen zufällig zu vergeben. Ermitteln Sie unter Angabe eines geeigneten vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse A und B.

   A: Drei Erwachsene erhalten ein kostenloses Mittagessen.

   B: Mindestens zwei Kinder erhalten ein kostenloses Mittagessen.

e) Betrachtet werden nun für eine beliebige Person die beiden folgenden Ereignisse:

   C: Die Person hat den Erwachsenentarif bezahlt.

   D: Die Person hat den Saunabesuch gewählt.

   Prüfen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.

f) Zur feierlichen Einweihung der Wasserrutsche dürfen zunächst alle Kinder einmal rutschen. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Warteschlangen, die sich ergeben können, wenn sich alle Kinder zum Rutschen anstellen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	2	4	2	7	3	2	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>

Happy-Hour-Tarif Gästezahlen		
Anzahl Gäste	Erwachsene	Kinder
Schwimmbad	5	15
Schwimmbad + Sauna	25	35

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>

$\bar{x} = \frac{1}{80} \cdot (5 \cdot 15 + 15 \cdot 10 + 25 \cdot 25 + 35 \cdot 18) = \frac{1480}{80} = 18{,}5$

$s^2 = \frac{1}{80} \cdot \left[5 \cdot (15 - 18{,}5)^2 + 15 \cdot (10 - 18{,}5)^2 + \ldots + 35 \cdot (18 - 18{,}5)^2\right] = \frac{221}{8}$

$s = \sqrt{\frac{221}{8}} \approx 5{,}26$

Das arithmetische Mittel beträgt 18,50 Euro bei einer Standardabweichung von etwa 5,26 Euro.

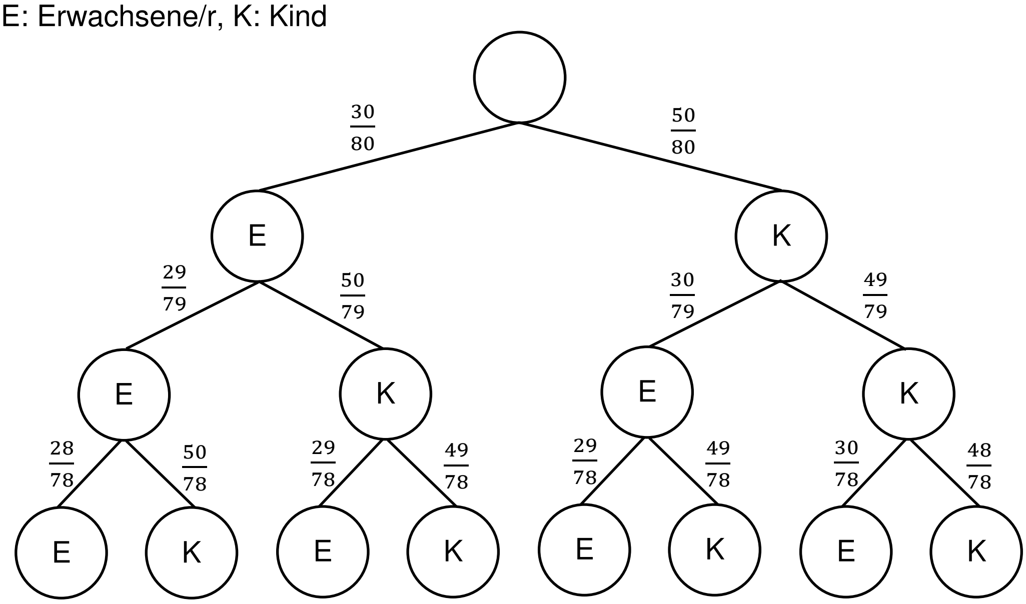
(Alternativ bei Verwendung der n–1–Formel: $s^2 \approx 27{,}97$ und $s \approx 5{,}29$)

</td><td>2
2</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>

$C_{80}^{3} = \binom{80}{3} = 82.160$ Es gibt 82.160 Möglichkeiten der Auswahl.

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3d)</td><td>

E: Erwachsene/r, K: Kind



$P(A) = \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \frac{203}{4108} \approx 4{,}94\ \%$

$P(B) = \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} \cdot \frac{49}{78} + \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{49}{78} + \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{30}{78} + \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \frac{5635}{8216} \approx 68{,}59\ \%$

</td><td>4
1
2</td></tr>
</table>

3e)	Folgende Wahrscheinlichkeiten werden benötigt (siehe Teilaufgabe a): $P(C) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$; $P(D) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$; $P(C \cap D) = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$ Rechnung: $P(C) \cdot P(D) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32} \neq \frac{5}{16} = P(C \cap D)$ Somit sind die Ereignisse C und D stochastisch abhängig.	3
3f)	$P_{50} = 50! \approx 3{,}04 \cdot 10^{64}$ Es gibt etwa $3{,}04 \cdot 10^{64}$ verschiedene Warteschlangen.	2
	Summe	20

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2022/23 im Fach Mathematik

Name der Gutachter*in: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Name des Prüflings: ______________________ Klasse: __________

Schule: ___________________________________ Datum der Prüfung: 05.05.2023

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Begründen der Symmetrie Angeben des Verhaltens im Unendlichen	1 2		
1b)	Notieren der ersten und zweiten Ableitung Berechnen der Extremstellen von f Angeben der Extrempunkte mit Begründung	2 3 3		
1c)	Nachweisen des Anstiegs und Umwandeln in den Anstieg der Normalen Berechnen der Normalengleichung	2 2		
1d)	Wertetabelle mit mindesten 7 Wertepaaren Zeichnen des Graphen (ohne Dreieck)	1 3		
1e)	Ergänzen des Dreiecks in Zeichnung Berechnen des Flächeninhalts für x = 2 Ermitteln der Zielfunktion A	1 1 3		
1f)	Notieren der Ableitung A'(x) Berechnen der Extremstellen von A Nachweisen des maximalen Flächeninhalts	1 3 2		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Aufstellen des LGS Lösen des LGS, Angabe der Funktionsgleichung	3 2		
2b)	Berechnen der Nullstellen von g Ermitteln des Flächeninhalts	2 3		
2c)	Berechnen der Funktionsgleichung von f	2		
2d)	Begründen der Nullstellen von f	2		
2e)	Notieren der ersten drei Ableitungen von f Berechnen des Wendepunkts mit Nachweis	3 3		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Ermitteln der Gästeanzahlen in der Übersicht	2		
3b)	Berechnen des arithmetischen Mittels Berechnen der Standardabweichung	2 2		
3c)	Bestimmen der Auswahlmöglichkeiten	2		
3d)	Erstellen des vollständigen Baumdiagramms Berechnen der Wahrscheinlichkeit von A Berechnen der Wahrscheinlichkeit von B	4 1 2		
3e)	Prüfen der stochast. Unabhängigkeit von C und D	3		
3f)	Bestimmen der Anzahl an Warteschlangen	2		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____
Datum und Unterschrift der Gutachter*in