Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

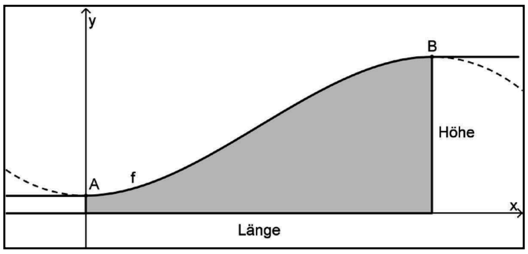
Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Holzeisenbahn



Die Abbildung zeigt das Brückenteil einer Holzeisenbahn.

Die obere Begrenzungslinie des Bauelements lässt sich durch die Funktion f mit der Gleichung
$$f(x) = -\frac{1}{500}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + 1$$
beschreiben, $1\ \text{LE} = 1\ \text{cm}$.

Die linke untere Ecke liegt im Koordinatenursprung.

a) Ermitteln Sie rechnerisch die Extrempunkte von f und weisen Sie deren Art nach.

In den oberen Eckpunkten A und B geht die Oberkante des Brückenteils ohne Knick in die waagerechten Anschlussschienen über. Begründen Sie, warum die beiden Extrempunkte von f mit diesen Eckpunkten übereinstimmen müssen.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{3}{500}x^2 + \frac{3}{25}x$ sowie $A(0 \mid f(0))$ bzw. $B(20 \mid f(20))$]

b) Berechnen Sie die mittlere Steigung des Brückenteils.

Berechnen Sie die Stellen, an denen die lokale Steigung von f den gleichen Wert hat wie die mittlere Steigung.

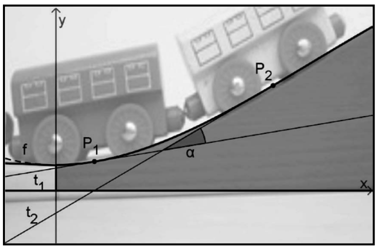
c) Der Hersteller verkauft batteriebetriebene Lokomotiven für die Holzeisenbahn. Dafür muss sichergestellt sein, dass der Anstiegswinkel an keiner Stelle größer als 32° ist.

Bestimmen Sie rechnerisch, in welchem Punkt das Brückenteil den größten Anstieg hat. Ein Nachweis mithilfe einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

Berechnen Sie den maximalen Anstiegswinkel und entscheiden Sie, ob das genannte Kriterium erfüllt ist.

d) Das Brückenteil hat eine Tiefe von 4 cm.
Berechnen Sie das Volumen des gesamten Brückenteils.

e) Damit sich die angehängten Waggons nicht gegenseitig behindern, darf der Neigungswinkel zwischen ihnen nicht größer als 25° werden.



Zur Untersuchung des Neigungswinkels werden die Tangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f in den Punkten $P_1(1{,}5 \mid f(1{,}5))$ bzw. $P_2(8{,}5 \mid f(8{,}5))$ betrachtet.

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen diesen Tangenten und beurteilen Sie, ob der Neigungswinkel zu groß wird.

f) Der Hersteller möchte die Maße verändern. Die Länge des Brückenteils soll jetzt 25 cm betragen, seine Höhe links 1,5 cm und rechts 11,5 cm. In den beiden oberen Eckpunkten sollen wieder die Extrempunkte liegen.

Das Profil des veränderten Brückenteils soll modelliert werden durch den Graphen einer Funktion g mit einer Gleichung der Form $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	9	6	6	5	5	9	40

Aufgabe 1.2: Dachformen

Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes.
Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt.
Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall $[0;2]$ annähernd durch die Funktion f mit $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^{-x}$ beschreiben, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f.
[Zur Kontrolle: $f'(x)=(-x^2+4x-3)\cdot e^{-x}$]

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall.

c) Im Intervall $[0;2]$ gibt es eine Stelle x_P, an der der Graph von f die maximale positive Steigung hat.
Bestimmen Sie den Wert von x_P und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

d) Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall $[0;1]$ durch den Funktionsgraphen und die x-Achse begrenzt.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x)=(-x^2-1)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

e) Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(0\,|\,1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente.
Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.

f) Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten $R(0|1)$ und $S(1|0)$ tangential zum Graphen von f verlaufen.
Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	11	3	5	5	9	7	40

Aufgabe 2.1: Startbahn Ost

Bei östlichen Winden wird vom Flughafen in Berlin-Tegel von einer Startbahn gestartet, die in eine nordöstliche Richtung zeigt.

Ein Jet hebt im Punkt $P_0(\,1140\,|\,240\,|\,0)$ von der Startbahn ab und erreicht eine Sekunde später die Position $P_1(\,1200\,|\,251\,|\,30)$.

Der Jet verändert seine Richtung beim Starten nicht nach rechts oder links.

Der Jet fliegt geradlinig und verändert seine Geschwindigkeit zunächst nicht.

Der Flughafen und Berlin liegen in der *x*-*y*-Ebene. Es gilt $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und eine Gleichung der Geraden g an, auf der der Jet unmittelbar nach dem Start fliegt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Jet in einer Sekunde zurücklegt.

Berechnen Sie die Startgeschwindigkeit des Jets in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Berechnen Sie den Winkel, mit dem der Jet gestartet ist.

b) In gerader Verlängerung der Startbahn liegt 7 km vom Punkt $P_0(\,1140\,|\,240\,|\,0)$ entfernt das Rathaus Pankow.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Rathauses.
Runden Sie auch Zwischenergebnisse ganzzahlig.
[Kontrollergebnis: $R(\,8040\,|\,1505\,|\,0)$]

c) 10 Sekunden nach dem Start ändert der Jet im Punkt $P_{10}(1740\,|\,350\,|\,300)$ seine Geschwindigkeit und fliegt weniger steil mit der Richtung $\vec{r}_{neu} = \begin{pmatrix} 90 \\ 16{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ weiter.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Jet das Rathaus überfliegt.

Bestimmen Sie die Höhe, in der das Rathaus überflogen wird.

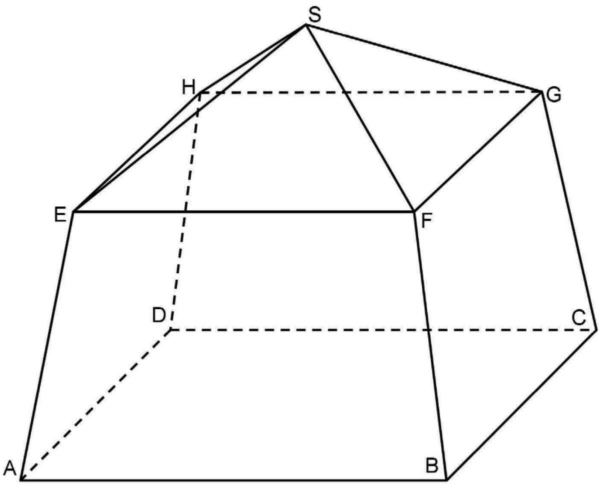
d) In der Ebene E mit der Gleichung $x - 20z = -1560$ befindet sich die untere Begrenzung einer dichten Wolkendecke.

Weisen Sie nach, dass die neue Flugbahn parallel zu der unteren Begrenzung der Wolkendecke verläuft.

Der Bürgermeister schaut vom Rathaus im dem Moment nach oben, in dem sich der Jet genau über dem Rathaus befindet. Untersuchen Sie, ob der Bürgermeister den Jet sehen kann oder nur die Wolkendecke.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	7	5	4	4	20

Aufgabe 2.2: Schokotrüffel



Eine Verpackung für Schokotrüffel hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide als Deckel.
Die Kantenlänge $\overline{AB}$ des Pyramidenstumpfs beträgt 10 cm, die Kantenlänge $\overline{EF}$ seiner Deckfläche 8 cm.
Der Pyramidenstumpf ist 6 cm hoch.
Insgesamt hat die Verpackung eine Höhe von 9 cm.
1 LE = 1 cm

a) Die Punkte $B(10\,|\,10\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und $F(9\,|\,9\,|\,6)$ sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes. Die Spitze der aufgesetzten Pyramide ist $S(5\,|\,5\,|\,9)$.

Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *A, E* und *H* an.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1, in der die Seitenwand *ABFE* liegt, in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E_1\!: \; 6x + z = 60$]

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels γ, den die Seitenwand *ABFE* mit der Grundfläche *ABCD* einschließt.

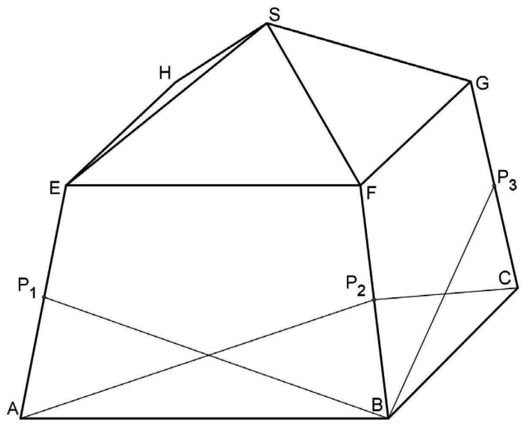
Berechnen Sie den größten Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackung.

d) Die vier Flächen des Deckels werden mit Goldfolie überzogen.

Berechnen Sie, wie viele cm² Goldfolie für einen Deckel benötigt werden.

e) Die vier großen Seitenflächen des Pyramidenstumpfs erweisen sich im Praxistest als nicht stabil genug. Deshalb werden diese durch Messingdraht verstärkt.
Durch den Draht wird der Punkt P_1 mit den Ecken *D* und *B* verbunden. Die Punkte P_2, P_3 und P_4 werden auf die gleiche Weise mit den entsprechenden Ecken verbunden. Die Punkte P_1 bis P_4 befinden sich in 3 cm Höhe über der Grundfläche. (siehe Abbildung)

Zeigen Sie, dass 80 cm Draht pro Verpackung ausreichend sind.



Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	4	5	4	5	20

Aufgabe 3.1: Smartphone

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones.

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte; davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.
B: Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.

Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt.
Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte,
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10%	30%	20%	40%
Anteil der fehlerhaften Geräte	5%	3%	4%	2%

c) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

d) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

e) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 20 zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter kein fehlerhaftes Gerät ist.

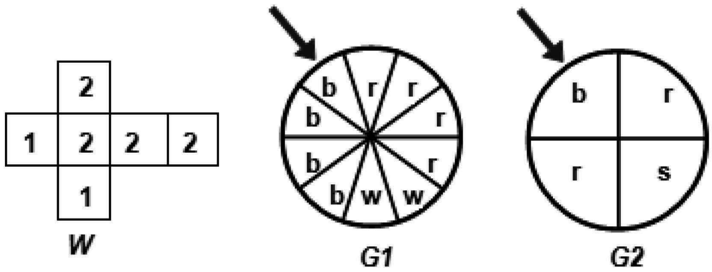
f) Geben Sie einen Wert von *s* an, für den mit dem Term $200 \cdot 0{,}98^{s} \cdot 0{,}02 + 0{,}98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann.
Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

g) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein fehlerhaftes Gerät befindet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	3	2	3	2	4	4	20

Aufgabe 3.2: Zufallsexperimente

Lisa und Tom haben im Fundus der Schule einen Würfel und zwei Glücksräder (s. Abb.) gefunden. Sie führen damit verschiedene Zufallsexperimente durch.



Der Würfel *W* ist durch Neubeschriftung aus einem Laplacewürfel entstanden.
Die Glücksräder sind in jeweils gleich große Sektoren eingeteilt. Die Sektoren sind farbig markiert (s. Abb.; r: rot; b: blau; s: schwarz; w: weiß). Wird eines der Glücksräder gedreht, so bleibt es nach kurzer Zeit stehen und der zugehörige Zeiger zeigt (zufällig) auf einen der Sektoren. Es soll ausgeschlossen sein, dass der Zeiger auf die Grenze zwischen zwei Sektoren zeigt.

a) Im ersten Experiment würfelt Tom zunächst mit dem Würfel *W*, anschließend dreht Lisa dasjenige Glücksrad, das der Würfel anzeigt (zeigt *W* z. B. „1“, so wird *G1* gedreht).
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A_1: Der Würfel *W* zeigt „2“ und das Glücksrad *G2* zeigt anschließend „Rot“.
A_2: Das Glücksrad, das entsprechend dem Würfelergebnis gedreht wird, zeigt „Weiß“ oder „Rot“.

b) In einem neuen Experiment wirft Tom den Würfel *W* und Lisa dreht gleichzeitig das Glücksrad *G2*. Von den jetzt möglichen sechs Ergebnissen haben drei die gleiche Wahrscheinlichkeit.
Ermitteln Sie diese drei Ergebnisse.

c) Jetzt dreht Lisa das Glücksrad *G1* zehnmal.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
C_1: Das Glücksrad *G1* zeigt genau viermal „Rot“.
C_2: Das Glücksrad *G1* zeigt mindestens fünfmal „Rot“. [Zur Kontrolle: $P(C_2) \approx 0{,}3669$]

d) Tom spielt das 10-malige Drehen des Glücksrades *G1* (also das Experiment aus c) in Gedanken 30-mal durch und bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis C_2 in genau der Hälfte aller Fälle eintritt. Er behauptet, dass diese Wahrscheinlichkeit unter 5 % liegt.
Prüfen Sie, ob seine Behauptung zutrifft.

e) Das Glücksrad *G1* soll 20-mal gedreht werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten zehn Drehungen genau fünfmal „Rot“ das Ergebnis ist und insgesamt höchstens neunmal „Rot“ das Ergebnis ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	3	5	3	4	20

Anhang

Anlage zu Aufgabe 3.2: Zufallsexperimente

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“, alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 − (abgelesener Wert).

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	9679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9997	9987	3	
	17										9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											