

**Zentrale schriftliche Abiturprüfung****2013****Mathematik**  
**Grundkurs mit CAS****Aufgabenvorschlag**

---

**Hilfsmittel:**

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist.

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen

CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.

**Gesamtbearbeitungszeit:**

210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

---

**Aufgabenstellung 1****Thema/Inhalt:**

Analysis

**Hinweis:**

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

**Aufgabenstellung 2****Thema/Inhalt:**

Analytische Geometrie

**Hinweis:**

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

**Aufgabenstellung 3****Thema/Inhalt:**

Stochastik

**Hinweis:**

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

**Aufgabe 1.1 CAS: Rodelbahn**

Der Hang einer Rodelbahn ist im Laufe der Jahre stark abgefahren worden und soll durch eine Aufschüttung wieder in seinen ursprünglichen Zustand versetzt werden. Die Profillinie

des geplanten Hangs soll mit dem Graphen  $G_f$  der Funktion  $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , modelliert werden.

In der Anlage ist der zu erneuernde, alte Hang dargestellt, der an ein 5 m langes Plateau angrenzt. Sein Profil wird mit dem Graphen  $G_g$  von  $g(x) = 20 \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , modelliert (1 LE = 1 m).

a) Berechnen Sie die Nullstelle von  $f$  und bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Weisen Sie nach, dass  $G_f$  und  $G_g$  bei  $x = 5$  einen gemeinsamen Punkt haben und in diesem ein horizontaler Übergang vom Plateau zum geplanten Hang entsteht.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_f$  und seine Art. Der Graph  $G_f$  hat nur einen Wendepunkt  $W$ . Berechnen Sie seine Koordinaten.

[Zur Kontrolle:  $H\left(5 \mid \frac{20}{e}\right)$ ]

Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse für  $-2 \leq x \leq 30$  in das Koordinatensystem (Anlage) ein.

c) Aus Sicherheitsgründen darf bei der Rodelbahn der Neigungswinkel betragsmäßig nicht größer als  $30^\circ$  sein. Weisen Sie nach, dass an der steilsten Stelle der geplanten Rodelbahn (modelliert mit  $G_f$ ) diese Bestimmung erfüllt ist.

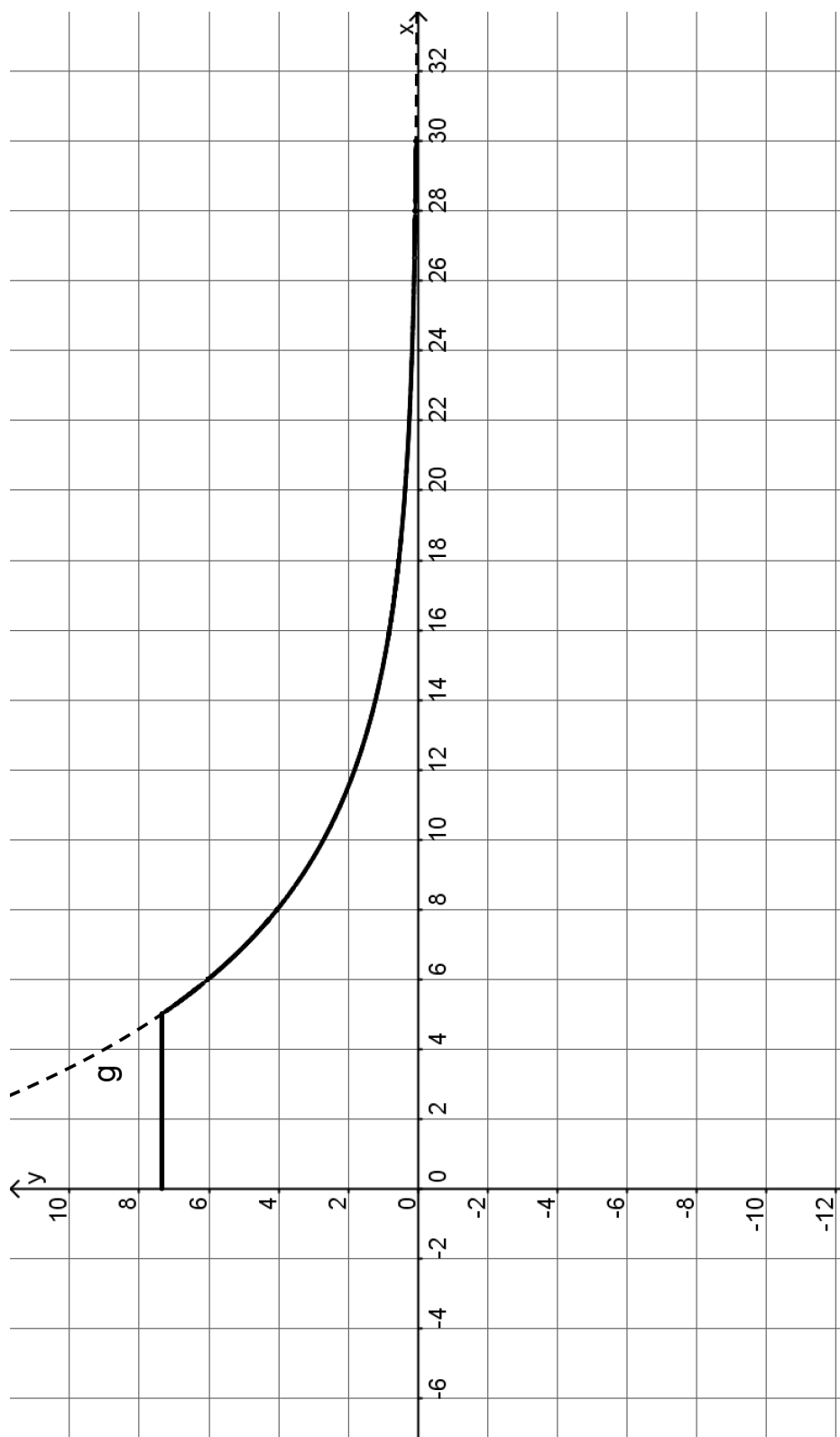
d) Die Graphen von  $f$  und von  $g$  und die Gerade zu  $x = 30$  schließen eine Fläche ein. Schraffieren Sie die eingeschlossene Fläche in der Anlage. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Berechnen Sie mithilfe der ermittelten Fläche, wie viel Kubikmeter Erde für die Aufschüttung des Hangs benötigt werden, wenn die Rodelbahn 12 m breit sein soll.

e) Die Aufschüttungsschicht ist an verschiedenen Stellen unterschiedlich dick. Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall mit ganzzahliger Begrenzung, in dem die vertikal gemessene Aufschüttung dicker als 2,5 m ist. Berechnen Sie die Stelle, an der der vertikal gemessene Höhenunterschied zwischen aufgeschütteter und ursprünglicher Rodelbahn maximal ist. Geben Sie an, wie dick die Aufschüttung an dieser Stelle ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	11	5	7	9	40

**Anlage**

**Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Rodelbahn**



**Aufgabe 1.2 CAS: Kanal mit Uferböschung**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6; x \in \mathbb{R}$ .

Der Graph dieser Funktion ist  $G$ .

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen  $G$  mit den Koordinatenachsen und weisen Sie nach, dass  $G$  weder achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  an.

b) Der Graph von  $G$  besitzt genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie seine Koordinaten und ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Wendetangente an  $G$ . Hinweis: Für die Bestimmung der Wendestelle genügt es, die notwendige Bedingung zu verwenden.

Durch Parallelverschiebung der Wendetangente in  $y$ -Richtung erhält man eine Gerade  $h$ , die im ersten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 2,5 FE einschließt.

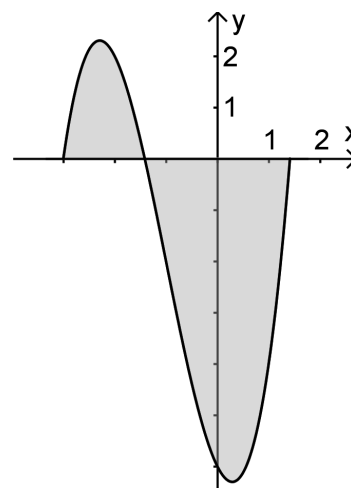
Ermitteln Sie eine Gleichung für  $h$  und beschreiben Sie die notwendige Verschiebung der Wendetangente.

[Zur Kontrolle:  $t_w : y = -5x - 7$ ]

c) Es sei  $Q$  ein im vierten Quadranten liegender Punkt des Graphen  $G$ . Der Koordinatenursprung  $O$  und der Punkt  $Q$  sind gegenüberliegende Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Zeichnen Sie ein solches Rechteck in die nebenstehende Darstellung ein.

Es existiert genau ein Rechteck, für das der zugehörige Flächeninhalt maximal wird.

Bestimmen Sie für diesen Fall nur unter Verwendung der notwendigen Bedingung den  $x$ -Wert des Punktes  $Q$ .



d) Der Graph der Funktion  $f$  beschreibt modellhaft das Profil eines Kanals  $(-\sqrt{2} \leq x \leq +\sqrt{2})$  sowie die links angrenzende Uferböschung mit Erhebung,  $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$ .

Die  $x$ -Achse befindet sich auf der Höhe der Kanalwasseroberfläche.

Berechnen Sie die größte Tiefe des Kanals und die maximale Höhe der linken Uferböschung relativ zur Wasseroberfläche.

e) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Kanals. Aufgrund von Bauarbeiten ist die Trockenlegung eines 15 m langen Teilstücks des Kanals erforderlich. Dazu muss Wasser abgeleitet werden. Ermitteln Sie das Volumen des abgeleiteten Wassers.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	10	13	6	7	4	40

**Aufgabe 2.1 CAS: Stockholmer Pyramide**

Auf dem Foto sehen Sie eine verglaste gerade Pyramide auf der Felseninsel Södermalm in Stockholm. Durch die achteckige Pyramide gelangt Tageslicht in unterirdische Verkehrsbereiche.

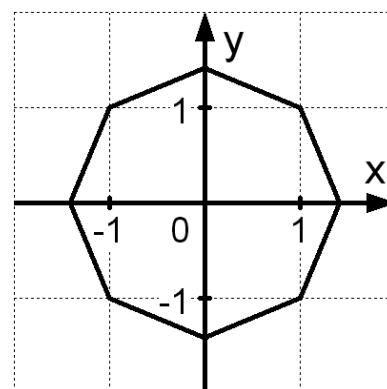


Der Steinsockel unter der Pyramide bildet im Fußboden ein regelmäßiges Achteck (siehe Grafik unter dem Foto) mit dem Mittelpunkt  $O(0 | 0 | 0)$ .

Der Punkt  $P_1(1 | -1 | 0)$  ist einer der unteren Eckpunkte des 1 m hohen Sockels.  $Q_1(1 | -1 | 1)$  ist der zugehörige darüber liegende obere Eckpunkt und gleichzeitig ein Eckpunkt der Pyramide.

Die Spitze der Pyramide befindet sich im Punkt  $S(0 | 0 | 6)$ . Es gilt: 1 LE = 1 m.

- a) Begründen Sie, dass  $P_2(\sqrt{2} | 0 | 0)$  ein weiterer unterer Eckpunkt des Steinsockels ist und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen oberen Eckpunktes  $Q_2$  an.
- b) Geben Sie eine Geradengleichung für  $SQ_1$  an. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Seitenkanten an der Spitze der Pyramide einschließen. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide.
- c) Die einfallenden parallelen Sonnenstrahlen haben die Richtung  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



Berechnen Sie den Winkel, den die Sonnenstrahlen und die Fußbodenfläche ( $x$ - $y$ -Ebene) bilden.

Das Sonnenlicht erzeugt von der Spitze  $S$  der Pyramide den Schattenpunkt  $S^*$  auf der Fußbodenfläche.

Bestimmen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

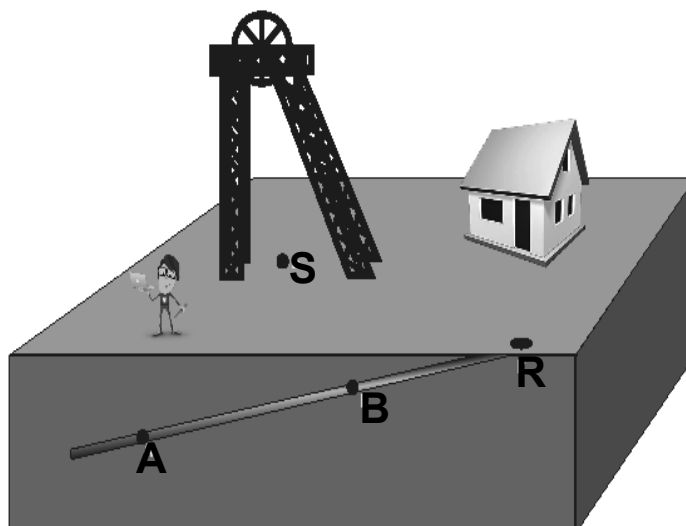
- d) In der Glaspyramide wird eine Beleuchtung geplant: Eine Lampe soll unterhalb der Spitze  $S(0 | 0 | 6)$  aufgehängt werden. Die Lampe soll von der Spitze doppelt so weit entfernt sein wie von den oberen Eckpunkten des Steinsockels. Ermitteln Sie die Koordinaten  $L(x | y | z)$  der (punktförmigen) Lichtquelle.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	4	12	10	4	30

**Aufgabe 2.2 CAS: Bergwerk**

In einem Bergwerk befindet sich ein Tunnel, der geradlinig durch die Punkte  $A(73 | -16 | -24)$  und  $B(7 | 17 | -2)$  zum Ausgang  $R$  verläuft. Vom Punkt  $S(45 | 10 | 0)$  werden geradlinig Stollen gegraben, die auf den Tunnel treffen.

Die Erdoberfläche befindet sich in der  $x$ - $y$ -Ebene,  $1\text{LE} = 10\text{ m}$ .



- a) Bestimmen Sie die Richtung, in die von  $S$  aus gegraben werden muss, damit ein Stollen den Punkt  $A$  trifft.  
 Berechnen Sie die Länge des Stollens und die Größe des Winkels, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.  
 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $R$ , an dem der Tunnel an der Erdoberfläche beginnt.

- b) Ein zweiter Stollen verläuft vom Punkt  $S$  in Richtung  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $P$ , in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft und geben Sie die vollständigen Koordinaten des Vektors  $\vec{u}$  an.

- c) Vom Punkt  $S$  aus soll der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Bestimmen Sie die Richtung, in welche gegraben werden muss, und den Punkt  $K$ , in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.
- d) Eine für das Bergwerk interessante Gesteinsschicht befindet sich zwischen zwei aufeinander zulaufenden ebenen Begrenzungsflächen. Die obere Begrenzungsfläche verläuft durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $S$ , die untere verläuft in der Ebene  $E: -2y + 3z = -40$ .  
 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der die obere Begrenzungsfläche verläuft, in Koordinatenform und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
- e) In  $140\text{ m}$  Entfernung vom Punkt  $B$  auf der Strecke  $\overline{AB}$  soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Bohrung an der Erdoberfläche beginnen muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	6	5	4	30

**Aufgabe 3.1 CAS: Schulabschlüsse**

Schulabgänger im Sommer 2009 in Berlin:

Gesamtzahl	mit allgemeiner Hochschulreife	mit mittlerem Schulabschluss <sup>*)</sup>	Hauptschulabschlüsse	ohne Schulabschluss
24 600	11 600	6 400	4 500	2 100

\*) dies entspricht in Brandenburg der Fachoberschulreife

Unter den insgesamt 24 600 Schulabsolventen des Jahres 2009 waren 3600 nicht-deutscher Herkunft, von denen 700 die allgemeine Hochschulreife erlangten.

(Quelle: Zeitschrift für amtliche Statistik Berlin Brandenburg 2/2011; die Werte sind gerundet.)

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
- $A_1$ : Von zwei zufällig befragten Schulabgängern hat einer die allgemeine Hochschulreife erlangt und der andere den mittleren Schulabschluss.
- $A_2$ : Unter 5 befragten Schulabgängern hat nur der erste und vierte die allgemeine Hochschulreife erlangt.
- $A_3$ : Unter 5 befragten Schulabgängern hat genau einer die allgemeine Hochschulreife erlangt.
- b) Zehn der 24 600 Schulabgänger werden zufällig befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
- $B_1$ : Genau fünf der 10 Schulabgänger haben die allgemeine Hochschulreife erlangt.
- $B_2$ : Unter den 10 Schulabgängern befindet sich höchstens einer ohne Schulabschluss.
- Unter den 10 Schulabgängern befinden sich höchstens  $k$  Personen ( $k \in \mathbb{N}$ ) mit mittlerem Schulabschluss. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 0,98 (aufgerundet). Bestimmen Sie (gegebenenfalls durch systematisches Probieren) aus dieser Angabe den Wert für  $k$ .
- c) Ein Schulabgänger wird zufällig ausgewählt. Im Gespräch erfährt man, dass er deutscher Herkunft ist. Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die allgemeine Hochschulreife erlangt hat.
- d) Unter einer Gruppe von 10 Schulabgängern befinden sich vier, die aus Berlin-Pankow kommen. Drei der 10 Schulabgänger werden zufällig (ohne Zurücklegen) ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
- $D$ : Zwei oder drei der ausgewählten Personen kommen aus Berlin-Pankow.
- e) Man befragt nacheinander fünf der insgesamt 24 600 Schulabgänger nach ihrem Schulabschluss. Es stellt sich heraus, dass keiner von ihnen die allgemeine Hochschulreife erlangt hat. Bestimmen Sie auf diesem Stand der Informationen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau vier von ihnen den mittleren Schulabschluss erreichten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	11	4	4	4	30

**Aufgabe 3.2 CAS: Fußball**

Bei einem Fußballturnier haben die Mannschaften von Altenberg (A) und Burghausen (B) das Finale erreicht.

- a) Für die Startelf wählt der Trainer der Mannschaft A einen von drei Torhütern und 10 von 15 Feldspielern aus.  
Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die der Trainer hat, die Mannschaft zusammenzustellen.
- b) Erfahrungsgemäß wird jeder der 11 Spieler (Torwart sowie 10 Feldspieler) mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % ausgewechselt.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:  
C: Es wird kein Spieler ausgewechselt.  
D: Es wird höchstens ein Spieler ausgewechselt.  
E: Es werden zwei oder drei Spieler ausgewechselt.

Da das Spiel auch nach der Verlängerung noch unentschieden steht, müssen beide Mannschaften ins Elfmeterschießen. Dafür wird angenommen, dass jeder Spieler von Mannschaft A eine Trefferquote von 80 % und jeder Spieler von Mannschaft B eine Trefferquote von 75 % hat.

- c) Von Mannschaft A sind  $n$  Spieler angetreten und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der  $n$  Spieler einen Treffer erzielt, beträgt 32 %.  
Bestimmen Sie den Wert für  $n$ .  
Ermitteln Sie, wie viele Elfmeter Mannschaft A mindestens schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Treffer zu erzielen.
- d) Beide Mannschaften schießen jeweils fünfmal.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elfmeterschießen 4:4 endet.

Danach treten die Schützen jeder Mannschaft paarweise an. Ein Spieler jeder Mannschaft schießt einen Elfmeter. Wenn eine Mannschaft dabei in Führung geht, hat sie das Finale gewonnen, ansonsten ist das nächste Paar dran.

- e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bereits nach dem ersten Paar Mannschaft B das Finale gewonnen hat oder noch keine Entscheidung gefallen ist.
- f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach drei angetretenen Paaren noch keine Entscheidung gefallen ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	7	7	4	5	4	30