LAND BRANDENBURG
Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Berlin
Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Informationen zu den gemeinsamen Fächern im Zentralabitur 2010 in Berlin und Brandenburg

Nr. 1
Mathematik

11.02.2009

Beispielaufgaben mit Erwartungshorizonten

Inhalt:

Verantwortlich:

Brandenburg
Ulrich Ernst
Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Berlin
Elke Dragendorf
Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für Rückfragen zum Material verwenden Sie bitte das Kontaktformular
auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg (bbb).
http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/zentralabitur.html

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Die hier vorliegenden Informationen beinhalten Aufgaben, die die gemeinsamen Vorgaben für das Zentralabitur 2010 der Länder Berlin und Brandenburg im Fach Mathematik illustrieren.

Die Aufgabenbeispiele, Erwartungshorizonte, Korrektur- und Bewertungshinweise dienen als Material zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung Mathematik 2010. Die Beispiele beziehen sich auf Inhalte und Kompetenzen, die im Kerncurriculum der Qualifikationsphase des geltenden Rahmenlehrplans für die gymnasiale Oberstufe Mathematik von 2006 (RLP-Nr.: 403002.06) festgeschrieben wurden. Weiterhin wurden die in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) i. d. F. 24.05.2002 getroffenen Festlegungen sowie die vom Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg und der Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Berlin herausgegebenen Prüfungsschwerpunkte Mathematik berücksichtigt.

Mit den vorliegenden Aufgabenbeispielen wird die Struktur und das Anspruchsniveau der zentralen Abituraufgaben verdeutlicht und so auch eine Orientierung für die unterrichtliche Arbeit in der Qualifikationsphase gegeben.

Die Korrektur- und Bewertungshinweise enthalten detaillierte Hinweise für die Beurteilung von Teilleistungen und die Ermittlung der Gesamtnote. Die nachfolgenden Beispiele sollen die im RLP für die gymnasiale Oberstufe Mathematik dargestellten abschlussorientierten Standards illustrieren und damit Hilfestellung für den Unterricht und die Vorbereitung auf die Abiturprüfung geben.

Es wird jeweils ein Beispiel für ein Grundkurs- und ein Leistungskursabitur dargestellt, das nach dem Konstruktionsprinzip für die Abiturprüfung entwickelt wurde. Bei diesen Beispielaufgaben wurde die Wahlmöglichkeit durch die Schüler, die es in der Abiturprüfung 2010 geben wird, nicht berücksichtigt. Das heißt, es fehlt bei diesen Beispielaufgaben die zu jedem Teilgebiet (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik) gehörende gleichwertige alternative Wahlaufgabe.

Die Grundkurs- und Leistungskurs-Prüfungsaufgaben unterscheiden sich im Grad der Strukturierung, dem Schwierigkeitsgrad, der Komplexität, den Anforderungen an die Selbstständigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben sowie im Umfang und in der Art der bereitgestellten Informationen.

Die Aufgabenbeispiele basieren auf den EPA hinsichtlich der Gestaltung der Prüfungsaufgaben. Dabei ist zu beachten, dass weder die Anforderungsbereiche scharf gegeneinander abzugrenzen sind noch die zur Lösung der Prüfungsaufgabe erforderlichen Teilleistungen sich in jedem Fall eindeutig immer nur einem bestimmten Anforderungsbereich zuordnen lassen. Dennoch wird eine mögliche Zuordnung der Anforderungsbereiche zu den Teilaufgaben jeweils in der Tabelle zum Bewertungsvorschlag dargestellt.

Die Beispielaufgaben wurden so konzipiert, dass das Gewicht der zu erbringenden Prüfungsleistungen überwiegend im Anforderungsbereich II liegt und außerdem die Anforderungsbereiche I und III, von denen der Anforderungsbereich I überwiegt, berücksichtigt sind. Hinsichtlich der fachspezifischen Beschreibung der drei Anforderungsbereiche wird auf die EPA, Kapitel 2 in der jeweils geltenden Fassung verwiesen.

Wir hoffen, dass die Informationen Ihnen bei der Vorbereitung Ihrer Schülerinnen und Schüler auf das Zentralabitur 2010 im Fach Mathematik hilfreich sind.

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenstellung

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabe 1

Thema/Inhalt:	Analysis
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2* zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2* zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 3

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2* zur Bearbeitung aus.

* Beispielaufgabe nicht vorhanden

Name: ....

Aufgabe 1.1: Deicherneuerung

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$; $x \in R$. Der Graph dieser Funktion sei G.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und ermitteln Sie Koordinaten und Art lokaler Extrempunkte von G.
Bestimmen Sie die zwei existierenden Wendestellen von f.

b) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ an und zeichnen Sie G für $-0{,}5 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ($1\ LE = 1\ cm$).

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an G im Punkt $P(1 \mid f(1))$.
Berechnen Sie die Größe des Winkels α, den t mit der positiven $x-$Achse bildet.
Begründen Sie auf Grund Ihrer bisher ermittelten Ergebnisse anschaulich, dass es eine weitere Tangente an den Graphen G geben muss, die einen Steigungswinkel mit der gleichen Größe wie α hat.

d) Die Fläche, die vom Graphen G und der $x-$Achse im Intervall $[0\,;7]$ eingeschlossen wird, kann als Querschnittsfläche eines Deiches aufgefasst werden ($1\ LE = 1\ m$).
Im Bereich bis zur Deichkrone (höchster Punkt des Deiches) kann man als Näherung für G die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = -\dfrac{4}{e^2}(x-2)^2 + \dfrac{16}{e^2}$ verwenden.

Der dem Wasser abgewandte Teil des Deiches im Intervall $[0\,;2]$ soll erneuert werden.
Dazu ist es erforderlich, die Menge des hierfür benötigten Füllmaterials zu ermitteln.
Berechnen Sie unter Verwendung der Näherungsparabel p, wie viel Kubikmeter Füllmaterial pro $1km$ Deichlänge bereitzustellen sind.

e) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -4e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$; $x \in R$ eine Stammfunktion von f ist.
Der Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen G, der $x-$Achse und der Geraden $x = 2$ begrenzt wird, sei A.
Berechnen Sie A und ermitteln Sie die prozentuale Abweichung des in d) genutzten Flächeninhalts zu A.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	15	6	8	6	5	40

Name: ....

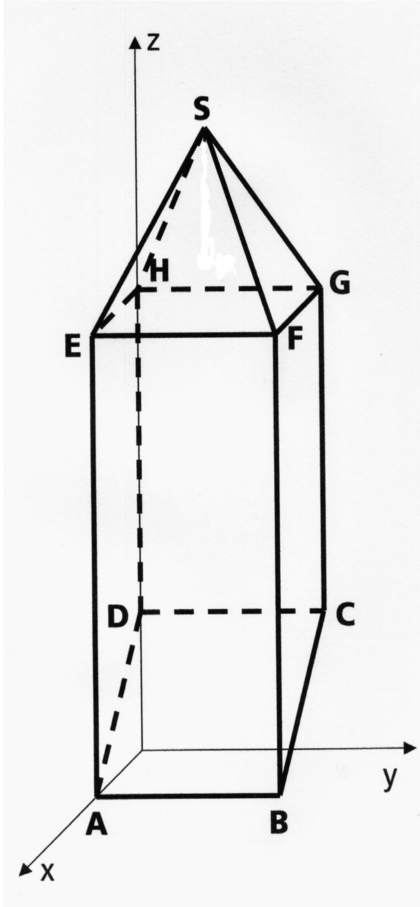
Aufgabe 2.1: Turm am Steilhang

An einem Steilhang wird ein Beobachtungsturm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden.

Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt 4 m. Aus der Bauzeichnung sind die Koordinaten der folgenden Punkte bekannt:

$A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $D(0|0|3)$, $F(4|4|10)$ und $H(0|0|10)$

(Koordinateneinheit 1 m).



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte *C, E, G* und *S*. Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte *A*, *B, C* und *D* geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform auf.

b) Ermitteln Sie eine Ebenengleichung für den Steilhang in Normalenform. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der Steilhang mit der Horizontalebene bildet.

[Zur Kontrolle:

ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.]

c) An den Punkten *F* und *H* wird ein 6 m langes Seil befestigt. Genau in die Mitte *T* des durchhängenden Seiles wird eine schwere Lampe gehängt. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des tiefsten Punktes des Seiles.

d) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt *S'* einen Schatten der Turmspitze *S*. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade an, auf der der Sonnenstrahl verläuft, bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes *S'* und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft.

e) Zur besseren Stabilisierung soll der Turm am Eckpunkt *H* durch ein möglichst kurzes Stahlseil mit dem Berghang verbunden werden. Bestimmen Sie die minimale Länge des Stahlseils.

Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	7	3	10	4	30

Name: ....

Aufgabe 3.1: Urnenexperimente

In einem Gefäß befinden sich 3 weiße und 6 schwarze Kugeln sowie eine rote Kugel.

a) Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und folgende Ereignisse betrachtet:

A: Beide Kugeln sind schwarz.

B: Beide Kugeln sind verschiedenfarbig.

Stellen Sie hierzu ein vollständiges Baumdiagramm auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A und von B.

b) In einem neuen Experiment werden alle 10 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man alle jeweils gleichfarbigen Kugeln direkt nacheinander zieht.

c) Nun werden 10 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

C: Man zieht genau 4 weiße Kugeln.

D: Man zieht mindestens 8 schwarze Kugeln.

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis D bei fünfmaliger Durchführung der 10 Ziehungen genau zweimal auftritt.

d) Berechnen Sie, wie oft man mit Zurücklegen mindestens eine Kugel ziehen muss, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die rote Kugel zu ziehen.

e) Bei dem folgenden Glücksspiel verlangt der Veranstalter einen Einsatz von 2 €.
Aus dem Gefäß wird eine Kugel gezogen. Ist diese Kugel weiß, erhält der Spieler 2 € ausbezahlt, ist die Kugel rot, erhält der Spieler 10 € ausgezahlt. Berechnen Sie, welchen Gewinn pro Spiel der Veranstalter auf lange Sicht erzielt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	11	4	3	30

Beispielaufgaben für die
Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Grundkurs

Erwartungshorizonte 1.1, 2.1, 3.1 für Lehrkräfte

Themen / Inhalte:	Analysis / Analytische Geometrie / Stochastik
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	180 Minuten

Erwartungshorizont

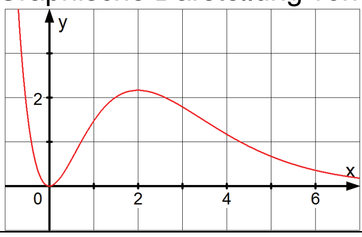
Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 3.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1: Deicherneuerung

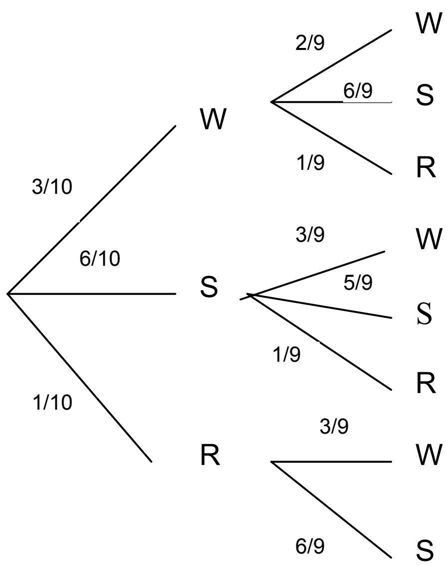
Teil-auf-gabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Nullstelle: $4x^2 \cdot e^{-x} = 0$; $x_N = 0$ Lokale Extrema: $f'(x) = 4x \cdot e^{-x}(2-x)$; $f''(x) = 4 \cdot e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$ Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Mit $f''(0) = 8 > 0$ oder anderer inhaltlicher Begründung ergibt sich der lokale Tiefpunkt: $T(0 \mid 0)$. Mit $f''(2) = -\frac{8}{e^2} < 0$ ergibt sich der lokale Hochpunkt: $H\left(2 \mid \frac{16}{e^2}\right)$. Wendestellen: Aus $f''(x) = 0$ folgt $x_{W_{1;2}} = 2 \pm \sqrt{2}$.	2 5 5 2		
b)	Verhalten im Unendlichen: $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0$; $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ Graphische Darstellung von G: 		2 4	
c)	Tangentengleichung: $m_t = f'(1) = \frac{4}{e}$; $P_t\left(1 \mid \frac{4}{e}\right) \Rightarrow t: y = \frac{4}{e}x$ Schnittwinkel: $\tan\alpha = \frac{4}{e}$; $\alpha \approx 55{,}8°$ Begründung für die Existenz der geforderten weiteren Tangente z.B. mithilfe der Anstiege in T, W und P.		2 2	4
d)	Flächenberechnung: $A_p = \int_0^2 p(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{16}{e^2}x - \frac{4}{e^2}x^2\right)dx$ $A_p = \left[\frac{8}{e^2}x^2 - \frac{4}{3e^2}x^3\right]_0^2 = \frac{64}{3e^2} \approx 2{,}887$ FE Volumenberechnung: $V = \frac{64}{3e^2} \cdot 1000\,m^3 \approx 2887\,m^3$.		6	
e)	Nachweis: $F'(x) = f(x)$	3		
	Flächenberechnung: $A = \int_0^2 f(x)dx = \left[-4e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right)\right]_0^2 = 8 - \frac{40}{e^2} \approx 2{,}587$ FE $A_p - A \approx 0{,}3$ FE ; prozentuale Abweichung: ca. 12% von A.		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	17	19	4
	Summe der BE	40		

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Turm am Steilhang

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$C(0\|4\|3)$, $E(4\|0\|10)$, $G(0\|4\|10)$, $S(2\|2\|14)$ Angabe einer Ebenengleichung, z. B. $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$.	4 2		
b)	Bestimmung eines Normalenvektors der gesuchten Ebene K: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}=0$ liefert z. B. $\vec{n}_K=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ Normalenform der Ebenengleichung K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=0$. Z. B. Wahl eines Normalenvektors $\vec{n}_{xy}$ für die Horizontalebene (x-y-Ebene) und Berechnung des Schnittwinkels mithilfe der Formel $\cos\alpha=\frac{\|\vec{n}_K\cdot\vec{n}_{xy}\|}{\|\vec{n}_K\|\cdot\|\vec{n}_{xy}\|}$: $\cos\alpha=0{,}8$, $\alpha\approx 36{,}9°$		3 4	
c)	Mit Mittelpunkt $M(2\|2\|10)$ der Strecke $\overline{HF}$ gilt z.B.: $\overline{MH}^2+\overline{MT}^2=\overline{TH}^2$; mit $\overline{HF}=2\cdot\overline{MH}=\sqrt{32}$ und $\overline{TH}=3$ folgt $\overline{MT}=1$, also $T(2\|2\|9)$.		3	
d)	Gleichung der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\14\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmung des Schnittpunktes von g mit K: z. B. Einsetzen des Geradenterms von g in die Normalengleichung von E ergibt $u=5$ und den Schnittpunkt $S'(-8\|7\|9)$. Berechnung des Schnittwinkels zwischen g und K z. B. mithilfe der Formel $\sin\alpha=\frac{\left\|\vec{n}_E\cdot\vec{r}_g\right\|}{\left\|\vec{n}_E\right\|\cdot\left\|\vec{r}_g\right\|}$; $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}}$, damit $\alpha\approx 54{,}7°$.	1 4	5	
e)	Erkennen, dass die minimale Länge des Stahlseils gleich dem Abstand von Punkt H zur Ebene K ist und Berechnung des Abstands z. B mit der Formel: $d(H;K)=\frac{\left\|\vec{n}_K\cdot\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)\right\|}{\left\|\vec{n}_K\right\|}$ $d(H;K)=\left\|\left[\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\right\|=5{,}6$; Länge des Stahlseils: 5,6 m.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	11	15	4
	Summe der BE	30		

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Urnenexperimente

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Baumdiagramm:



Die Pfadregel liefert $P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$ und $P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$</td><td>5
3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Man kann zuerst alle schwarzen, dann alle weißen Kugeln und zuletzt die rote Kugel ziehen oder die Farben in einer anderen Reihenfolge (6 Möglichkeiten):

$P(E) = 6 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{10!} = \frac{1}{140}$ (≈ 0,0071).</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Da zurückgelegt wird, entsteht eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$. Die binomialverteilte Zufallsgröße X zählt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.

$P(C) = B(10; 0{,}3; 4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}2001.$

Die Trefferwahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel ist $p = 0{,}6$. Die Zufallsgröße Y zählt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Y ist binomial verteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

$P(D) = P(Y \geq 8) = P(Y=8) + P(Y=9) + P(Y=10) \approx 0{,}1673$

Es liegt eine Bernoullikette der Länge $n = 5$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(D) \approx 0{,}1673$ vor. Die Zufallsgröße Z beschreibt die Trefferzahl.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis D bei fünfmaliger Durchführung der 10 Ziehungen genau zweimal eintritt ist also

$P(Z = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}1673^2 \cdot (1 - 0{,}1673)^{5-2} \approx 0{,}1616$</td><td>3</td><td>4
4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>P(keine rote Kugel bei n Ziehungen) = $0{,}9^n$ führt auf die Bedingung

$1 - 0{,}9^n \geq 0{,}99$

$0{,}9^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq 43{,}71$</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
	Mindestens 44 Kugeln müssen gezogen werden.			
e)	Aus dem Baumdiagramm kann abgelesen werden, dass bei 10 Ziehungen im Durchschnitt dreimal eine weiße Kugel gezogen wird (6 € Auszahlung) und einmal die rote Kugel (10 € Auszahlung). Diesen 16 € Auszahlung stehen Einnahmen von 20 € entgegen, was einen durchschnittlichen Gewinn von 0,40 € pro Spiel für den Veranstalter bedeutet.		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	11	15	4
	Summe der BE	30		

Beispielaufgaben für die
Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Grundkurs (CAS)

Aufgabenstellung

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabe 1

Thema/Inhalt:	Analysis
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2* zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2*

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 3*

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

* Keine Beispielaufgaben vorhanden

Name: ....

Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 1.1 CAS (Analysis): Deicherneuerung

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph dieser Funktion sei G.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und ermitteln Sie Koordinaten und Art lokaler Extrempunkte von G.
Bestimmen Sie die zwei existierenden Wendestellen von f.
Geben Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ an.
Zeichnen Sie G für $-0{,}5 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ($1\ LE = 1\ cm$).

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an G im Punkt $P(1 \mid f(1))$.
Berechnen Sie die Größe des Winkels α, den t mit der positiven x-Achse bildet.
Begründen Sie anschaulich auf Grund Ihrer bisher ermittelten Ergebnisse, dass es eine weitere Tangente an den Graphen G geben muss, die einen Steigungswinkel mit der gleichen Größe wie α hat.
Bestimmen Sie nun rechnerisch den Punkt B, in dem diese zweite Tangente den Graphen G berührt.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von dem Graphen G, der x-Achse und der Geraden zu $x = 2$ eingeschlossen wird.

d) Die Fläche, die vom Graphen G und der x-Achse im Intervall $[0\,;7]$ eingeschlossen wird, kann als Querschnittsfläche eines Deiches aufgefasst werden ($1\ LE = 1\ m$). Der dem Wasser abgewandte Teil des Deiches über dem Intervall $[0\,;2]$ soll erneuert werden.
Hierfür ist es erforderlich, die Menge des benötigten Füllmaterials zu ermitteln. Berechnen Sie, wie viel Füllmaterial (gerundet auf ganze Kubikmeter) pro 1 km Deichlänge bereitzustellen ist.
Das Füllmaterial mit einer Dichte von $\rho = 1{,}9\ \frac{g}{cm^3}$ wird mit einem LKW mit einer zulässigen Zuladung von 12 t angefahren. Berechnen Sie, wie viele Fahrten erforderlich sind, wenn 13 km Deich landseitig erneuert werden.

e) Der Wasserspiegel schwankt zwischen den zwei Höhen, die 0,4 m bzw. 1,5 m niedriger als die Deichöhe sind. In diesem Bereich soll der Deich auf der Wasserseite mit zusätzlichen Steinplatten befestigt werden. Berechnen Sie die Fläche in 1 m^2, für die bei 13 km Deichlänge Platten erforderlich sind.
Sie dürfen verwenden, dass die Länge L einer Kurve zwischen zwei Graphenpunkten $P(a \mid f(a))$ und $Q(b \mid f(b))$ mit folgender Formel berechnet werden kann:
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	16	10	2	6	6	40

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Grundkurs (CAS)

Erwartungshorizont 1.1 **für Lehrkräfte**

Themen / Inhalte:	Analysis (/ Analytische Geometrie* / Stochastik*)
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	60 Minuten

Erwartungshorizont

Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

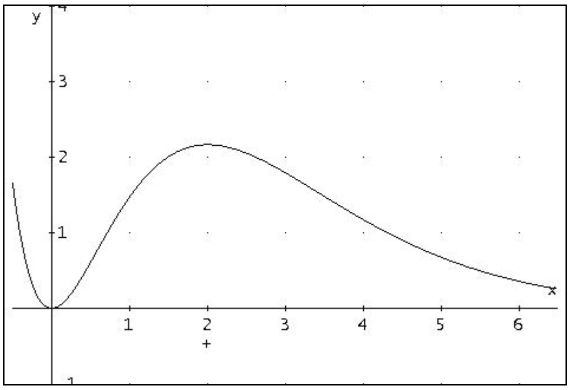
Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 1.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

* keine Beispielaufgaben vorhanden

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1 CAS (Analysis): Deicherneuerung

Teil-auf-gabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Nullstellenbestimmung mit f(x)=0: $4x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	2		
	Lokale Extrema: Angabe von $f'(x) = 4x \cdot e^{-x}(2-x)$; aus $f'(x) = 0$ folgt: $0 = 4x \cdot e^{-x}(2-x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.	2		
	Angabe von $f''(x) = 4 \cdot e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$; $f''(0) = 8 > 0$ oder andere inhaltliche Begründung; 0 ist lokale Minimalstelle; $T(0 \mid 0)$; $f''(2) = -\frac{8}{e^2} < 0$; 2 ist lokale Maximalstelle; $H\left(2 \mid \frac{16}{e^2}\right)$	4		
	Wendestellen: $f''(x) = 0$ liefert: $0 = 4 \cdot e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.	2		
	Angabe des Verhaltens im Unendlichen: $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0$; $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$.		2	
	Zeichnung des Graphen G von f: 	4		
b)	Tangentengleichung: $m_t = f'(1) = \frac{4}{e}$ und $P\left(1 \mid \frac{4}{e}\right) \Rightarrow t: y = \frac{4}{e}x$.		2	
	Schnittwinkel: $\tan\alpha = \frac{4}{e}$, $\alpha \approx 55{,}8°$		2	
	Begründung für die Existenz der geforderten weiteren Tangente z.B. mithilfe der Anstiege in T, W und P.			4
	Der Ansatz $4x \cdot e^{-x}(2-x) = \frac{4}{e}$ liefert x = 1 und x $\approx$ 0,29; Berührpunkt $B(0{,}29 \mid 0{,}24)$.		2	

Teil-auf-gabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
c)	Flächenberechnung: $A=\int_0^2 4x^2e^{-x}\,dx=8-40e^{-2}$; $A\approx 2{,}6\,FE$	2		
d)	Sinnvolle Rundung der Querschnittsfläche des Deiches über dem Intervall $[0;2]$.für die Berechnung des Volumens mit einer Genauigkeit von $1\,m^3$, z.B.: $A\approx 2{,}587\,m^2$; $V\approx 1000\,m\cdot 2{,}587\,m^2=2587\,m^3$ Volumen bei 13 km Deichlänge z. B: $V\approx 33626\,m^3$; Gewicht (Masse): $m\approx 33626\,m^3\cdot 1{,}9\,\frac{g}{cm^3}\approx 63890\,t$; Anzahl der Fuhren: 5325		2 4	
e)	Bestimmung von höchstem und niedrigstem Wasserstand durch Lösen von $4x^2\cdot e^{-x}=\frac{16}{e^2}-0{,}4$ und $4x^2\cdot e^{-x}=\frac{16}{e^2}-1{,}5$. Entscheidung für die beiden Lösungen $x\approx 3$ für die Stelle des höchsten und $x\approx 5$ für die Stelle des niedrigsten Wasserstands. Berechnung des Deichbogens $L=\int_3^5\sqrt{1+((8x-4x^2)e^{-x})^2}\,dx\approx 2{,}3$ und der Flächengröße $A\approx 2{,}3\,m\cdot 13\,km=29900\,m^2$.		6	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	16	20	4
	Summe der BE	40		

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenstellung

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabe 1

Thema/Inhalt:	Analysis
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2* zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie / Lineare Algebra
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2* zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 3

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2* zur Bearbeitung aus.

* Beispielaufgabe nicht vorhanden

Name: ....

Aufgabe 1.1: Volumen einer Birne

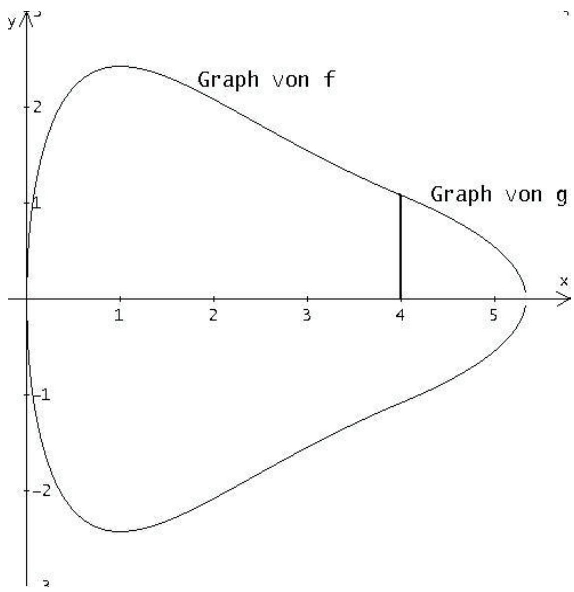
Zunächst wird die Funktion *f* mit $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$; $x \in IR$, $x \geq 0$, untersucht.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie den Graphen von f auf relative Extrempunkte und deren Art.
Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt: Bestimmen Sie die Koordinaten nur mit dem notwendigen Kriterium auf eine Nachkommastelle gerundet.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $x > 0$.

b) Untersuchen Sie $f(x)$ für $x \to +\infty$ und begründen Sie Ihr Ergebnis.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f mindestens für $0 \leq x \leq 8$ (Koordinatenachsen: 1 LE = 1 cm).

c) Der Graph von f rotiert über dem Intervall [0;4] um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

d) Nebenstehende Abbildung zeigt das Profil einer längs durchgeschnittenen Birne. Der oberhalb der x-Achse gelegene Teil des Randes wird durch Funktionsgraphen modelliert. Für $0 \leq x \leq 4$ wird der Graph von f verwendet. Für $x \geq 4$ soll der Graph von g mit $g(x) = \sqrt{ax + b}$ verwendet werden.
Nennen Sie Eigenschaften, die für eine geeignete Modellierung der Profillinie der Birne erfüllt werden müssen. Geben Sie zwei Bedingungsgleichungen an und bestimmen Sie mit deren Hilfe die Werte für *a* und *b*.



e) Berechnen Sie das Volumen der Birne.
Die Längeneinheit ist 1 cm.
Wenn Sie Teil d) nicht lösen konnten, dürfen Sie ohne Nachweis verwenden:
$g(x) = \frac{4}{e^2} \cdot \sqrt{16 - 3x}$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	15	8	7	5	5	40

Name: ....

Aufgabe 2.1: Ebenen und Prisma

Gegeben sind für jedes $a \in IR$ eine Ebene E_a mit der Gleichung $ax - 2y + 2az = 1$ sowie die Punkte $A(-1|3|4)$, $B(-3|0|2)$ und $C(5|2|0)$.

a) Ermitteln Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene *F*, in der die Punkte *A*, *B* und *C* liegen.
Zeigen Sie, dass *F* eine der Ebenen E_a ist.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g_s, die in allen Ebenen E_a liegt.

[Kontrollergebnis: $g_s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in IR$]

Berechnen Sie die Größe des Winkels α, unter dem die Gerade g_s die *y*-*z*-Ebene durchstößt.

c) Berechnen Sie den Abstand *d* des Punktes $Q(2|-1|3)$ zur Ebene E_1.
Es existiert genau eine weitere Ebene E_a, zu der *Q* ebenfalls diesen Abstand d hat.
Ermitteln Sie für diese Ebene den Wert für den Parameter a.

d) In den Ebenen E_1 und E_2 liegen zwei Seitenflächen eines geraden dreiseitigen Prismas, das ein gleichschenkliges Dreieck als Grundfläche hat. Ein Eckpunkt der Grundfläche sei der in E_1 liegende Punkt $R(5|7|5)$. Die anderen beiden Eckpunkte der Grundfläche seien ein Punkt *S* in der Ebene E_2 sowie ein auf der Schnittgeraden g_s liegender Punkt *T*.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *T*.
Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten eines möglichen Punktes *S* ermitteln kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	8	6	8	30

Name: ....

Aufgabe 3.1: Bevölkerungsentwicklung

Frankreich und Deutschland sind die bevölkerungsreichsten Staaten der Europäischen Union. Die Prognosen bis 2050 weisen für diese beiden EU-Staaten eine unterschiedliche Entwicklung aus.

Bevölkerungsanteil der beiden Länder an der EU-Gesamtbevölkerung:

	Deutschland	Frankreich
2005	18,0 %	13,2 %
2050	16,6 %	14,6 %

Der Anteil der Jugendlichen im Alter von 15 bis 24 Jahren an der Gesamtbevölkerung des jeweiligen Landes betrug 2005 in Deutschland 11,7% und in Frankreich 13,0%.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

A: Unter elf im Jahr 2005 zufällig ausgewählten EU-Bürgern befanden sich mindestens zwei Deutsche.

B: Unter im Jahr 2050 insgesamt 1000 zufällig auszuwählenden EU-Bürgern werden sich mindestens 125 und höchstens 155 Franzosen befinden.
Begründen Sie, dass hier die Näherung mittels Normalverteilung möglich ist.

b) Bestimmen Sie, wie viele EU-Bürger man im Jahr 2005 mindestens auslosen müsste, um unter diesen mit mindestens 98 % Wahrscheinlichkeit wenigstens einen Deutschen zu ermitteln.

c) Ermitteln Sie für das Jahr 2005 den jeweiligen Anteil der Bevölkerung von Deutschland und Frankreich an der Gesamtbevölkerung beider Länder.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Anteile die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

C: Ein aus den beiden Ländern ausgeloster Bürger ist ein Jugendlicher.

D: Ein aus den beiden Ländern ausgeloster Jugendlicher kommt aus Deutschland.

Interpretieren Sie das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit von Ereignis D im Vergleich zum oben bestimmten Anteil der Deutschen an der Gesamtbevölkerung beider Länder.

d) Für das Jahr 2007 sollte durch eine repräsentative Stichprobe ermittelt werden, ob sich der Anteil der Jugendlichen unter der deutschen Bevölkerung in der o. g. Altersgruppe verringert hat.

Es wurden 10000 Deutsche repräsentativ ausgelost und ermittelt, wie viele darunter Jugendliche im Alter von 15 bis 24 Jahren sind. Im Ergebnis dieser Untersuchung nimmt man an, dass der Anteil der o. g. Altersgruppe nur noch bei 11,5 % liegt.

Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung, in welches kleinstmögliche symmetrische Intervall um den Erwartungswert die Anzahl der betreffenden Jugendlichen mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit fällt.

Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	10	4	12	4	30

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Leistungskurs

Erwartungshorizonte 1.1, 2.1, 3.1 für Lehrkräfte

Themen / Inhalte:	Analysis / Analytische Geometrie / Stochastik
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	240 Minuten

Erwartungshorizont

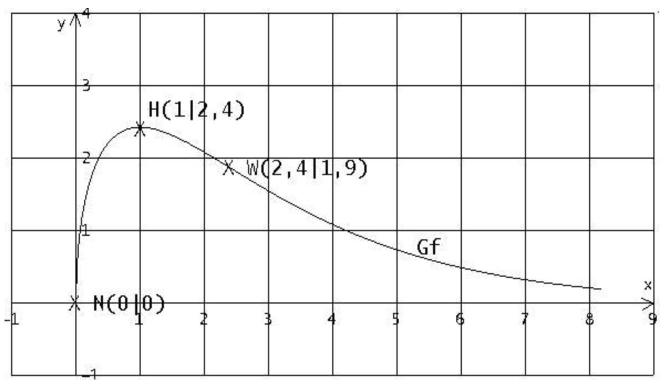
Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 3.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1 (Analysis): Volumen einer Birne

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Nullstellenbestimmung: $4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	2		
	Untersuchung auf relative Extrempunkte: $f'(x) = 0$; $2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.	3		
	Berechnung von $f''(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.	4		
	Berechnung von $f''(1) = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$ mit Schlussfolgerung, dass 1 eine relative Maximalstelle ist und Angabe von $H\left(1 \,\middle|\, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)$.	2		
	Untersuchung auf Wendepunkte mit $f''(x) = 0$ unter Beachtung von $x > 0$: $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$, $x \approx 2{,}4$; $W(2{,}4 \mid 1{,}9)$.	4		
b)	Angabe von $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ und verbale Begründung oder Testeinsetzungen.		3	
	Zeichnung des Graphen von *f*: 		5	
c)	Ansatz für das Rotationsvolumen: $V = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)dx = 16\pi \cdot \int\limits_0^4 x \cdot e^{-x}dx$; Berechnung durch partielle Integration: $V = 16\pi \cdot \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^4$; Angabe der Maßzahl des Volumens: $V = 16\pi \cdot \left(1 - \frac{5}{e^4}\right) \approx 45{,}7$.		7	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Mögliche Modellierung:
An der Stelle $x = 4$ müssen die Funktionswerte und die Anstiege von g und f übereinstimmen: $g(4) = f(4)$ und $g'(4) = f'(4)$
Parameterabhängige Berechnung der ersten Ableitung:
$g'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$;
Aufstellen und Lösen des nicht linearen Gleichungssystems:
$\sqrt{4a+b} = 8 \cdot e^{-2} \wedge \dfrac{a}{2\sqrt{4a+b}} = -3 \cdot e^{-2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{4a+b} = 8 \cdot e^{-2} \wedge \dfrac{a}{2 \cdot 8e^{-2}} = -3 \cdot e^{-2}$
$\Leftrightarrow a = -48e^{-4} \wedge b = 256e^{-4}$.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Ansatz für das Volumen der Birne: $V_{Birne} = V_{c)} + V_{Stielende}$.
Berechnung der Nullstelle von g als obere Integrationsgrenze und Bestimmung von
$V_{Stielende} = \dfrac{16\pi}{e^4}\displaystyle\int_4^{\frac{16}{3}}(16-3x)\,dx = \dfrac{128\pi}{3e^4} \approx 2{,}5$.
Angabe des Volumens: $V_{Birne} \approx 45{,}7cm^3 + 2{,}5cm^3 = 48{,}2cm^3$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>15</td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Summe</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Ebenen und Prisma

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Parametergleichung von F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; r, s \in R$	2		
	Koordinatengleichung von F: $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $F: x - 2y + 2z - 1 = 0$	4		
	Nachweis: $F \equiv E_1$	2		
b)	Ermitteln der geforderten Schnittgeraden: $g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in R$		5	
	Schnittwinkelbestimmung: $\sin\alpha = \dfrac{\lvert \vec{a}_{g_s} \cdot \vec{n}_{E_{y;z}} \rvert}{\lvert \vec{a}_{g_s} \rvert \cdot \left\lvert \vec{n}_{E_{y;z}} \right\rvert} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$	3		
c)	Abstandsberechnung: $d(Q;E_1) = \left\lvert \dfrac{1 \cdot x_Q - 2 \cdot y_Q + 2 \cdot z_Q - 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right\rvert = 3\,LE$		3	
	Bestimmung einer weiteren Ebene E_a mit dem gleichen Abstand: $d(Q;E_a) = \left\lvert \dfrac{a \cdot x_Q - 2 \cdot y_Q + 2a \cdot z_Q - 1}{\sqrt{a^2 + (-2)^2 + 4a^2}} \right\rvert = 3$ $d(Q;E_a) = \left\lvert \dfrac{8a + 1}{\sqrt{5a^2 + 4}} \right\rvert = 3 \Rightarrow 19a^2 + 16a - 35 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -\dfrac{35}{19}$ Der gesuchte Parameterwert ist $a = -\dfrac{35}{19}$		3	
d)	Bestimmen der Koordinaten von T: $T \in g_s \Rightarrow T(-2t \mid -0{,}5 \mid t)$; $\overrightarrow{TR} \perp g_s$ $\Rightarrow -4t - 10 + 5 - t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow T(2 \mid -0{,}5 \mid -1)$		4	

Teil-auf-gabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
	Beschreibung zum Ermitteln für S: Falls $\overline{RS}$ als Basis gewählt wird, liegen die möglichen dritten Eckpunkte auf einer Geraden h mit $h \perp g_s$ und $h \perp \vec{n}_{E_2}$ Damit erhält man zwei mögliche dritte Eckpunkte $S_{1,2}$ z.B. mithilfe der Linearkombination $\overrightarrow{OS}_{1;2} = \overrightarrow{OT} \pm \lvert \overrightarrow{RT} \rvert \cdot \frac{1}{\lvert \vec{a}_h \rvert} \vec{a}_h$.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	11	15	4
	Summe der BE	30		

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Bevölkerungsentwicklung

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	X: Anzahl Deutscher unter 11 ausgewählten $P(A) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_{0,18}^{11}(1) \approx 1 - 0{,}3849 = 0{,}6151$ Y: Anzahl Franzosen unter 1000 ausgewählten $P(B) = P(125 \leq Y \leq 155) = F_{0,146}^{1000}(155) - F_{0,146}^{1000}(124)$ Wegen $\mu = 146, \sigma \approx 11{,}17 > 3$ ist Y näherungsweise normalverteilt: $P(B) \approx \Phi(0{,}85) + \Phi(1{,}93) - 1 \approx 0{,}8023 + 0{,}9732 - 1 \approx 0{,}7755.$	4 2	5	
b)	Z: Anzahl Deutscher unter n ausgewählten $P(Z \geq 1) = 1 - F_{0,18}^{n}(0) \geq 0{,}98 \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}82} \geq 20$.		4	
c)	J: Ausgeloster ist Jugendlicher, G, F: Ausgeloster ist Deutscher / Franzose, wobei $P(G) = \frac{0{,}18}{0{,}18+0{,}132} = \frac{0{,}18}{0{,}312} \approx 0{,}577$, $P(F) = 1 - P(G) = \frac{0{,}132}{0{,}312} \approx 0{,}423$. $P_G(J) = 0{,}117$ und $P_F(J) = 0{,}13$ $P(C) = P(J) = P_G(J) \cdot P(G) + P_F(J) \cdot P(F) = 0{,}0675 + 0{,}055 = 0{,}1225$. $P(D) = P_J(G) = \frac{P_G(J) \cdot P(G)}{P(J)} \approx 0{,}551$ $P(D) < P(G)$, d.h., der Anteil der deutschen Jugendlichen unter der Gesamtanzahl der Jugendlichen der beiden Länder ist geringer als der Anteil der deutschen Bevölkerung an der Gesamtbevölkerung der beiden Länder.	3 3	3 2	
d)	T: Anzahl Jugendlicher, T ist bei Annahme von $p \approx h_n$ nach $B_{0,115}^{(10000)}$-verteilt $\sigma^2 = 10000 \cdot 0{,}115 \cdot 0{,}885 = 1017{,}75 > 9$ und $\mu = 10000 \cdot 0{,}115 = 1150$. Damit ist T näherungsweise normalverteilt. $P(1150 - a \leq T \leq 1150 + a) \approx 2\Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right) - 1 \geq 0{,}95$ $\Leftrightarrow a \geq \Phi^{-1}(0{,}975) \cdot \sqrt{0{,}115 \cdot 0{,}885 \cdot 10000} - 0{,}5 \approx 1{,}96 \cdot 31{,}90 - 0{,}5 \approx 62{,}0$ Damit gilt $P(1087 \leq T \leq 1213) \geq 0{,}95$, d.h., $[1087;1213]$ ist das gesuchte Intervall.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	14	4
	Summe der BE	30		

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Leistungskurs (CAS)

Aufgabenstellung

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabe 1

Thema/Inhalt:	Analysis
(Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2* zur Bearbeitung aus.)

Aufgabe 2*

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie / Lineare Algebra
(Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.)

Aufgabe 3*

Thema/Inhalt:	Stochastik
(Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.)

* keine Beispielaufgaben vorhanden.

Name: ....

Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 1.1 CAS (Analysis): Volumen einer Birne

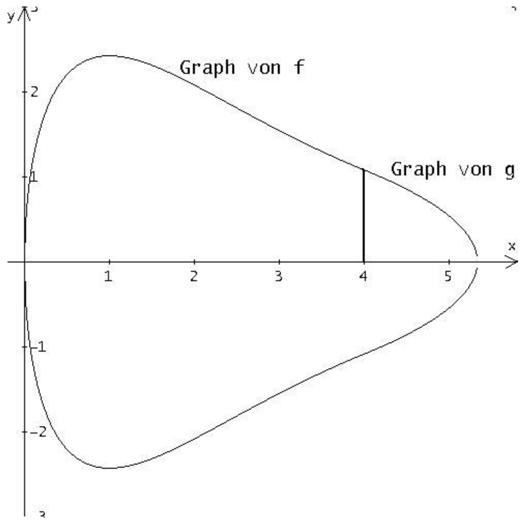
Gegeben ist eine Funktion *f* mit $f(x) = 4\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $x \geq 0$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie den Graphen von f auf relative Extrempunkte und deren Art.

Geben Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 0^+$ an und zeichnen Sie den Graphen von f für mindestens $0 \leq x \leq 8$, 1 LE = 1 cm.

b) Der Graph von f rotiert über dem Intervall [0;4] um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

c) Nebenstehende Skizze zeigt das Profil einer längs durchgeschnittenen Birne. Der oberhalb der x-Achse gelegene Teil des Randes wird durch Funktionsgraphen modelliert Für $0 \leq x \leq 4$ wird der Graph von f verwendet. Für $x \geq 4$ wird der Graph von g mit $g(x) = \sqrt{ax+b}$ verwendet. Die Funktion g soll für $x = 4$ die beiden Bedingungen (1) $g(4) = f(4)$ und (2) $g'(4) = f'(4)$ erfüllen.
Begründen Sie, warum dies zwei sinnvolle Bedingungen für die Modellierung sind.
Berechnen Sie die Werte für a und b und das Volumen der Birne für die Einheit 1 cm.



Hinweis: Je nach verfügbarem Rechner kann ein Quadrieren der Gleichungen des zu lösenden Gleichungssystems hilfreich sein.

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{4}{e^2} \cdot \sqrt{16 - 3x}$.]

d) Auch für dickere und für dünnere Birnen soll das Volumen bestimmt werden.

Dazu werden die Funktionen f_k mit $f_k(x) = k \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $x \geq 0$ und $k > 0$, für den linken Teil der Profillinien für $0 \leq x \leq 4$ verwendet und für $x \geq 4$ weiterhin eine Funktion der Form $g(x) = \sqrt{ax+b}$ mit entsprechenden Bedingungen (1) und (2) aus Teil c).
Bestimmen Sie das Volumen der Birne in Abhängigkeit von *k*.
Zeigen Sie, dass unabhängig von *k* die Birne nur bei $x = 1$ ihre dickste Stelle haben kann und ermitteln Sie den Wert von *k*, für den die Birne genau so dick wie lang ist.

e) Für $0 \leq x \leq \frac{16}{3}$ wird die Funktion *h* mit $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \leq 4 \\ g(x) & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$ nochmals genauer an der Stelle 4 betrachtet. Zeigen Sie, dass $W(4|h(4))$ ein Wendepunkt ist, obwohl die Funktion *h* die Bedingung $h''(4) = 0$ nicht erfüllen kann. Erläutern Sie dies.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	13	2	7	13	5	40

Beispielaufgaben für die Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2010

Mathematik

Leistungskurs (CAS)

Erwartungshorizont 1.1 für Lehrkräfte

Prüflinge.

Themen / Inhalte:	Analysis (/ Analytische Geometrie* / Stochastik*)
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	80 Minuten

Erwartungshorizont

Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

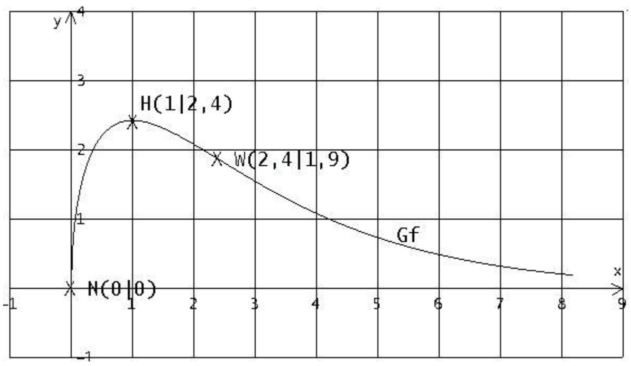
Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 1.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

* keine Beispielaufgaben vorhanden

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1 CAS (Analysis): Volumen einer Birne

Teil-auf-gabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
a)	Nullstellenbestimmung mit $f(x)=0$: $4\cdot\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=0 \Leftrightarrow x=0$.	2		
	Untersuchung auf relative Extrempunkte: Angabe von $f'(x)=\frac{2e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$ und Angabe der Lösung zu $f'(x)=0$: $\frac{2xe^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}=0 \Leftrightarrow x=1$.	2		
	Angabe von $f''(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $f''(1)=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$, Schlussfolgerung, dass 1 eine relative Maximalstelle ist und Angabe von $H\left(1\,\middle|\,\frac{4}{\sqrt{e}}\right)$.	3		
	Angabe von $\lim\limits_{x\to\infty} 4\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=0$ und von $\lim\limits_{x\to 0^+} 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)e^{-\frac{1}{2}x}=+\infty$.	2		
	Zeichnung des Graphen von *f*: 	4		
b)	Ansatz für das Rotationsvolumen: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx=16\pi\cdot\int\limits_0^4 x\,e^{-x}dx$, Angabe von $V=16\pi\cdot e^{-4}\left(e^4-5\right)\approx 45{,}7$	2		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
c)	Begründung: $g(4)=f(4)$ bedeutet, dass die Profillinie der Birne für $x=4$ ohne Sprung verläuft und $g'(4)=f'(4)$ bedeutet, dass kein Knick auftritt. Angabe von $g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$, Aufstellen des nicht linearen Gleichungssystems $\sqrt{4a+b}=8\cdot e^{-2} \wedge \frac{a}{2\sqrt{4a+b}}=-3\cdot e^{-2}$ und Angabe der Lösung $a=-48e^{-4} \wedge b=256e^{-4}$.		4	
	$V_{Birne}=V_{c)}+V_{Stielende}$. Berechnung der Nullstelle von *g* als obere Integrationsgrenze und Bestimmung von $V_{Stielende}=\frac{16\pi}{e^4}\int_4^{\frac{16}{3}}(16-3x)dx=\frac{128\pi}{3e^4}\approx 2{,}5$. Angabe des Volumens $V_{Birne}\approx 45{,}7\ cm^3+2{,}5\ cm^3=48{,}2\ cm^3$.		3	
d)	$g(4)=f_k(4)$ und $g'(4)=f_k'(4)$ liefert $\sqrt{4a+b}=2k\cdot e^{-2}$ und $\frac{a}{2\sqrt{4a+b}}=-\frac{3}{4}k\cdot e^{-2}$, $a=-3k^2e^{-4} \wedge b=16k^2e^{-4}$.		4	
	Volumen des Rotationskörpers für $0\le x\le 4$: $V=k^2\cdot\pi\cdot\int_0^4 x\,e^{-x}dx \Leftrightarrow V=k^2\pi\cdot e^{-4}\left(e^4-5\right)$ Volumen für das Stielende: $V_{St}=\pi\cdot\frac{k^2}{e^4}\int_4^{\frac{16}{3}}(16-3x)dx=\frac{8k^2\pi}{3e^4}$ Volumen für die Birne: $V_{Birne}=V+V_{St}=\pi\cdot k^2\left(1-\frac{7}{3e^4}\right)$.		5	
	Lösung der Gleichung $f_k'(x)=0$: $e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{k}{2\sqrt{x}}-\frac{k}{2}\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$, also kann sich das relative Maximum nur an der Stelle 1 befinden. Länge der Birne: $l=\frac{16}{3}$. Die Birne besitzt an ihrer dicksten Stelle $x=1$ einen Durchmesser von $d=2\cdot f_k(1)=\frac{2k}{\sqrt{e}}$; Berechnung von $k=\frac{8}{3}\sqrt{e}$.		4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
e)	Betrachtung von $f''(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ und von $g''(x)=-\frac{9e^{-2}}{(16-3x)^{\frac{3}{2}}}$ ergibt: $f''(4)=\frac{7e^{-2}}{8}$ und $g''(4)=-\frac{9e^{-2}}{8}$. 4 ist Wendestelle, da $f''(4)>0$ (Linkskrümmung) und $g''(4)<0$ (Rechtskrümmung), obwohl $h''(4)=0$ nicht möglich ist. Feststellung, dass *h* an der Stelle 4 nicht zweimal differenzierbar ist und die Bedingung $h''(x)=0$ nur für mindestens zweimal differenzierbare Funktionen notwendig für Wendestellen ist.			5
	Summen in den Anforderungsbereichen	15	20	5
	Summe	40		