Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2018/2019

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	12. April 2019
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	34
2	33
3	33
Summe:	100

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2019
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen /34

In einer Fischzuchtanlage wird versehentlich ungereinigtes Abwasser in einen Wasserlauf eingeleitet. Das verursacht eine Schadstoffbelastung, deren zeitlicher Verlauf durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t) = 96t \cdot e^{-0,4t} \quad \text{für } t \geq 0$$

dargestellt werden kann. Dabei gibt *t* die Anzahl der Tage nach der Einleitung und $f(t)$ die Schadstoffkonzentration in mg/Liter an.

1.1 Zeigen Sie, dass $f'(t) = 96\,e^{-0,4t} \cdot (1 - 0,4t)$ gilt. /3

1.2 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Schadstoffbelastung maximal ist. /5
Geben Sie auch den Wert der Schadstoffkonzentration zu diesem Zeitpunkt an.
[*Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:* $f''(t) = -38,4 \cdot (2 - 0,4t) \cdot e^{-0,4t}$]

1.3 Ermitteln Sie rechnerisch, wann die Abnahme der Schadstoffbelastung am größten ist und wie groß die Abnahme pro Tag zu diesem Zeitpunkt ist. /7
Vergleichen Sie diese Abnahme mit der Veränderung der Schadstoffkonzentration zu Beginn der Einleitung des Abwassers.
[*Ein Nachweis mit Hilfe der dritten Ableitung oder des Vorzeichenwechselkriteriums ist nicht erforderlich.*]

1.4 Vervollständigen Sie die Wertetabelle. /6

t	0	1	2	3	4	5	6	8	10
f(t)	0,00		86,27		77,53		52,25		17,58

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *f* für $t \leq 10$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

1.5 Weisen Sie nach, dass ab dem 10. Tag nach der Einleitung die Schadstoffkonzentration stets unter 20 mg/Liter liegt. /4

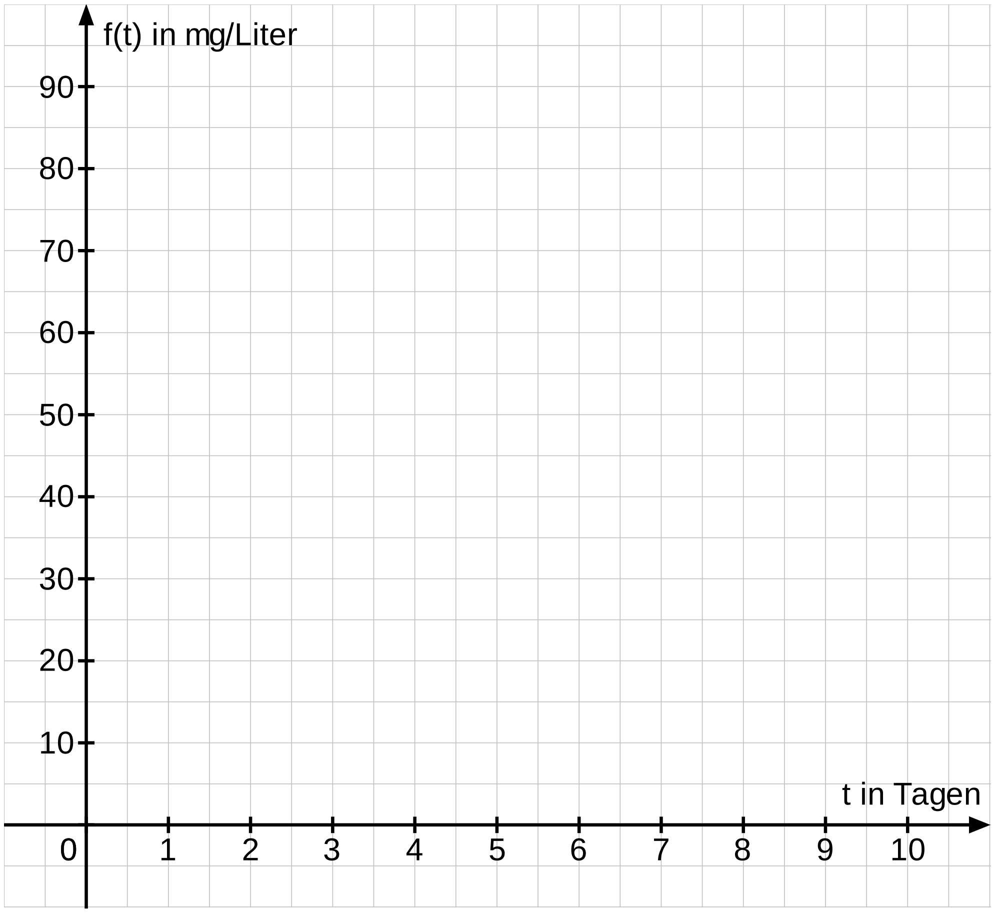
1.6 Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Funktion *F* mit $F(t) = -600\,e^{-0,4t} \cdot (1 + 0,4t)$ eine Stammfunktion der Funktion *f* ist. /9

Berechnen Sie den Wert des Terms $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(t)dt$.

Geben Sie an, welche Bedeutung dieser Wert in Bezug auf den oben genannten Sachverhalt hat.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \dfrac{x^3 + 194000}{1800x}$.

2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion *f* eine Polstelle besitzt. **/4**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* in der Umgebung der Polstelle.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an.

2.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion *f* mit der *x*-Achse. **/3**

2.3 Die Asymptote von *f* ist eine Parabel *p*. **/3**
Zeigen Sie, dass die Gleichung der Asymptote $p(x) = \dfrac{1}{1800}x^2$ ist.
Zeichnen Sie die Asymptote in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite ein.

2.4 Zeigen Sie, dass $f'(x) = \dfrac{x^3 - 97000}{900x^2}$ die 1. Ableitung von *f* ist. **/6**
Der Graph von *f* hat genau einen Tiefpunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.
Zur Kontrolle: $T\left(45{,}95 \,|\, 3{,}51\right)$.
[*Hinweis: Auf den Nachweis mit Hilfe der 2. Ableitung kann verzichtet werden.*]

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

x	-60	-40	-20	-10	10	20	40	80	100
f(x)	0,20	-1,81			10,83		3,58		6,63

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* im Intervall $[-60;100]$ in das Koordinatensystem auf der **folgenden Seite** ein.

Im Folgenden soll nun der Sachzusammenhang beachtet werden:

Die obige Funktion *f* beschreibt den Benzinverbrauch in Litern pro 100 km eines PKW A, in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in km/h. Das gilt für Geschwindigkeiten ab 10 km/h. Der PKW A besitzt ein Automatikgetriebe. Die maximale Geschwindigkeit von PKW A beträgt 150 km/h. Der Tank des PKW A kann bis zu 60 Liter Benzin enthalten.

2.6 Entscheiden Sie, welcher Definitionsbereich für die Beschreibung des untersuchten Zusammenhanges verwendet werden sollte. **/3**
Kennzeichnen Sie den Bereich des Graphen von *f,* der für den Sachzusammenhang relevant ist, farbig.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

2.7 Beantworten Sie unter Verwendung der obigen Aufgaben folgende Fragen: **/6**

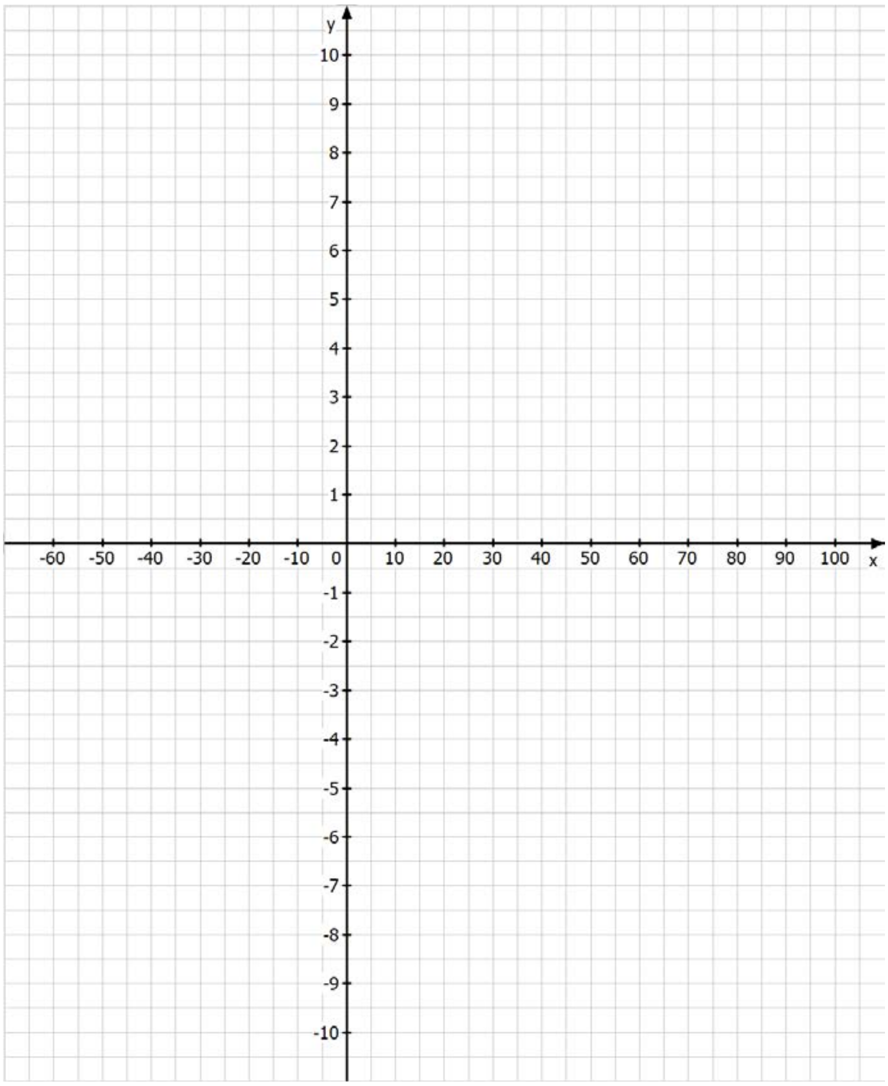
a) Wie hoch ist der Benzinverbrauch bei 50 km/h?
b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Benzinverbrauch am niedrigsten?
c) Welche Strecke kann man bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h höchstens fahren?
d) Wie groß ist die maximale Entfernung, die man mit einer Tankfüllung fahren kann?

2.8 **/3**

Für einen zweiten PKW B gibt die Funktionsgleichung b mit $b(x)=\dfrac{x^3+192000}{1600x}$ den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in km/h an.

Weisen Sie nach, dass der Verbrauch des PKW B stets (für alle $x>0$) größer ist als der des PKW A.

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.3, 2.5 und 2.6:



3 Analytische Geometrie /33

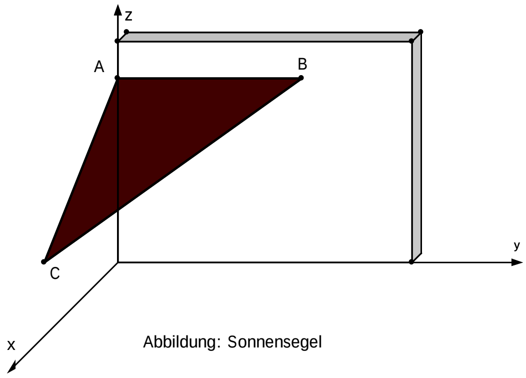


Abbildung: Sonnensegel

Familie Fröhlich hat ein Sonnensegel gekauft und spannt es über der Terrasse in ihrem Garten auf. Die Terrasse wird an einer Seite durch eine Mauer begrenzt. Dort wird das Sonnensegel in den Punkten *A*(0 | 0 | 5) und *B*(0 | 5 | 5) befestigt.
Darüber hinaus wird es im Punkt *C*(4 | 0 | 2) an einem senkrechten Pfeiler angebracht.
Die drei Befestigungspunkte *A*, *B* und *C* sind auch gleichzeitig die Eckpunkte des dreieckförmigen Sonnensegels. Die Terrasse liegt in der $x-y$ – Ebene.
(Siehe Abbildung, nicht maßstabsgerecht; 1LE = 1m)

3.1 Zeigen Sie, dass das Sonnensegel im Punkt *A* einen rechten Winkel besitzt und die Form eines gleichschenkligen Dreiecks aufweist. **/6**

3.2 Berechnen Sie die Fläche des Sonnensegels. **/2**

3.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene *E*, in der sich das Sonnensegel befindet, in Koordinatenform. **/9**
Berechnen Sie den Winkel, den das Sonnensegel mit der Mauer einschließt.
[Mögliches Ergebnis für *E*: $3x + 4z = 20$]

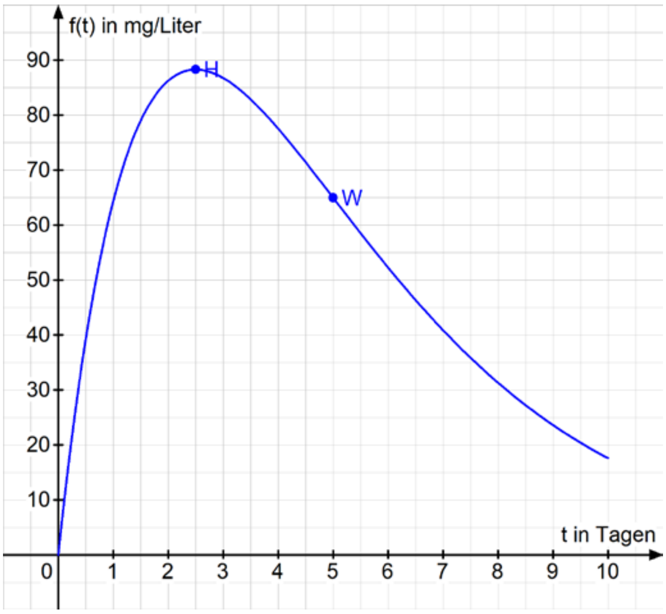
3.4 Paralleles Sonnenlicht strahlt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **/6**

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, auf der sich der Schatten der Kante *BC* des Sonnensegels auf der Terrasse abzeichnet.

Da es abends empfindlich kalt wird, stellt Herr Fröhlich einen höhenverstellbaren Heizstrahler an der Stelle *H*(1 | 2 | 0) auf. Zum gefahrlosen Betreiben muss der Heizstrahler einen seitlichen Mindestabstand zur Mauer von einem Meter und einen Mindestabstand zum Sonnensegel von mindestens zwei Metern besitzen.

3.5 Weisen Sie nach, dass ein 2,20 m hoher Heizstrahler diesen Anforderungen nicht genügt. **/5**

3.6 Ermitteln Sie die Höhe, auf die Herr Fröhlich den Heizstrahler höchstens einstellen darf, damit der Heizstrahler an der Stelle *H* gefahrlos betrieben werden kann. **/5**

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Ableitung von f mit Hilfe der Produktregel und Ausklammern ergibt
$f'(t) = 96 \cdot e^{-0,4t} + 96t \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t} = 96 \cdot e^{-0,4t} \cdot (1 - 0,4t)$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$
$0 = 96 \cdot e^{-0,4t} \cdot (1 - 0,4t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 2,5$
$f''(2,5) = -38,4 \cdot e^{-1} < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum liegt vor
$f(2,5) = 88,29 \quad \Rightarrow \quad HP(2,5 \mid 88,29)$
Nach 2,5 Tagen ist die Schadstoffbelastung mit 88,29 mg/Liter maximal.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Gesucht: Wendestelle und Anstieg an der Wendestelle und für $t = 0$
Notwendige Bedingung für Wendestelle: $f''(t) = 0$
$0 = -38,4 \cdot e^{-0,4t} \cdot (2 - 0,4t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 5$ (Nachweis nicht erforderlich)
$f'(5) = -12,99 \approx -13$
$f'(0) = +96$
Nach 5 Tagen ist die Abnahme der Schadstoffbelastung mit ca.
13 mg/Liter pro Tag am größten. Der Anstieg der Belastung zu Beginn der Verunreinigung ist mit 96 mg/Liter pro Tag deutlich höher.</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>0,00</td><td>64,35</td><td>86,27</td><td>86,74</td><td>77,53</td><td>64,96</td><td>52,25</td><td>31,31</td><td>17,58</td></tr>
</table>


</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>$f(10) = 17,58 < 20$
Für $t > 2,5$ ist die Funktion f monoton fallend $(f'(t) < 0)$, daher sind die Funktionswerte für $t > 10$ kleiner als 17,58 und damit kleiner als 20.
Hinweis: alternative Lösungen sind möglich.</td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

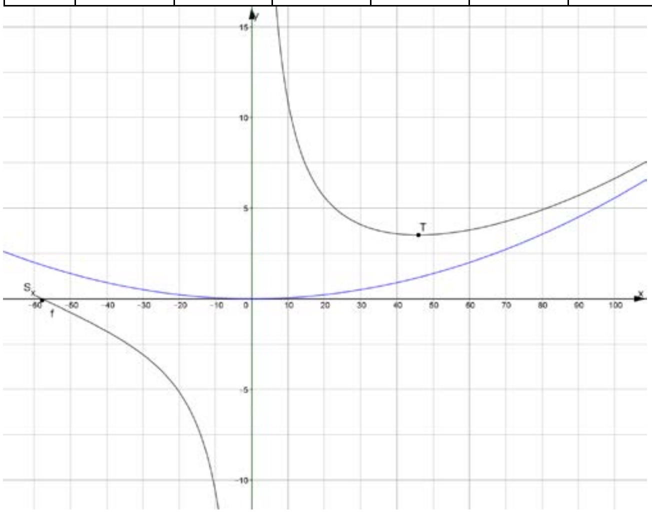
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.6	Nachweis der Stammfunktion durch Ableiten: $F'(t)=f(t)$ $F'(t)=-600\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\cdot(1+0,4t)+(-600)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\cdot 0,4$ $F'(t)=-600\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\cdot(1+0,4t-1)$ $F'(t)=96\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\cdot t=96\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}=f(t)$		4	
	Berechnung des Termwertes: $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f(t)dt=\frac{1}{10}\cdot\left(F(10)-F(0)\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(-54,95-(-600)\right)=54,51$		3	
	Der berechnete Wert stellt die durchschnittliche Schadstoffbelastung während der ersten 10 Tage dar.			2
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	7	22	5
	Summe der BE	34		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>x ist eine Definitionslücke, wenn $N(x)=0$ gilt.
$1800x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$
Untersuchung ob eine Polstelle vorliegt:
$Z(0)\neq 0 \quad \Rightarrow$ Es liegt eine Polstelle vor.
$f(-0{,}1)\approx -1077{,}8$ und $f(0{,}1)\approx 1077{,}8 \quad \Rightarrow$ Die Funktion hat bei $x_P=0$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel von – nach +.
D = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Ansatz: $Z(x)=0$:
$x^3+194000=0 \quad \Rightarrow \quad x_N=\sqrt[3]{-194000}\approx -57{,}89$
$S_x(-57{,}89\,|\,0)$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>z. B. mittels Polynomdivision:
$(x^3+194000)\div(1800x)=\frac{1}{1800}x^2+\frac{970}{9x} \Rightarrow p(x)=\frac{1}{1800}x^2$
Zeichnung</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>Ableitung bestimmen:
$f'(x)=\frac{3x^2\cdot 1800x-1800\cdot(x^3+194000)}{1800^2x^3}$
$=\frac{3x^3-x^3-194000}{1800x^2}=\frac{2x^3-194000}{1800x^2}$
$f'(x)=\frac{x^3-97000}{900x^2}$
Extrempunkt berechnen:
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-97000=0 \Rightarrow x_E\approx 45{,}95$
$T\left(45{,}95\,|\,3{,}51\right)$</td><td></td><td>3

3</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>

x	-60	-40	-20	-10	10	20	40	80	100
$f(x)$	0,20	-1,81	-5,17	-10,72	10,83	5,61	3,58	4,90	6,63


</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$D_{\text{sinnvoll}} = \{10 \le x \le 150\}$
Kennzeichnung des entsprechenden Teils des Graphen</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>a) Benzinverbrauch bei 50 km/h:
$f(50) = \frac{50^3 + 194000}{1800 \cdot 50} = 3{,}5\overline{4}$ Liter
b) Geschwindigkeit mit minimalem Benzinverbrauch:
Bei 45,95 km/h hat man den geringsten Verbrauch.
c) Welche Strecke kann man bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h höchstens fahren?
$f(80) = \frac{80^3 + 194000}{1800 \cdot 80} = 4{,}90$ Liter/100 km
Die maximale Strecke beträgt ca. 1224,5 km.
d) Wie groß ist die maximale Entfernung mit einer Tankfüllung?
Bei 45,95 km/h hat man den geringsten Verbrauch von 3,51 Liter/100km
Die maximale Entfernung beträgt ca. 1709,4 km.</td><td></td><td>1
1</td><td>2
2</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>$$\begin{array}{ccc} b(x) & > & f(x) \\ \frac{x^3+192000}{1600x} & > & \frac{x^3+194000}{1800x} \\ 200x^3 & > & -35200000 \\ x & > & \sqrt[3]{-176000} \end{array}$$
Das gilt für alle $x > 0$.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>9</td><td>17</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
3.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \alpha=90°$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 5\,\text{m} \Rightarrow$ gleichschenkliges Dreieck	3 3		
3.2	Flächeninhalt: $A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=12{,}5\,\text{m}^2$ (auch Alternativlösungen sind möglich)	2		
3.3	Wahl geeigneter Spannvektoren von *E:* $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ Normalenvektor und Ebenengleichung: $\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\0\\-20\end{pmatrix} \Rightarrow E: -15x-20z=d$ *A* einsetzen: $-15\cdot 0-20\cdot 5=d \Rightarrow d=-100$ *E*: – 15x – 20z = − 100 oder *E*: 3x + 4z = 20 Winkelbestimmung: $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \overrightarrow{n_{yz}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \cos\beta=\frac{\left\|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{yz}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_E}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_{yz}}\right\|}=\frac{3}{5}=0{,}6$ $\beta=\arccos(0{,}6)\approx 53{,}1°$		5 4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.4	Ebene L der Lichtstrahlen am Rand der Kante BC des Sonnensegels: $L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Schnitt der Ebene L mit der x-y-Ebene: $z = 0$ $2 - 3p - 2q = 0 \Rightarrow q = 1 - 1{,}5p$ q in L einsetzen: $L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + (1 - 1{,}5p) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Schnittgerade: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Alternativ können auch B' (7,5 | 0 | 0) und C' (7 | − 2 | 0) als Schnittpunkte der Gerade durch B bzw. C und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ mit der x-y-Ebene zur Schnittgerade s führen.)			6
3.5	Vergleich der x-Werte: H befindet sich 1 m vor der Mauer. L (1 | 2 | 2,2) sei der obere Punkt des Heizstrahlers. Abstand von L zu E: $\frac{\|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2{,}2 - d_E\|}{\|\overrightarrow{n_E}\|} = \frac{8{,}2}{5} = 1{,}64\,\text{m}$ Der Abstand zum Sonnensegel ist kleiner als 2 m.		5	
3.6	L^* (1 | 2 | z) sei der obere Punkt des Heizstrahlers Abstand von L^* zu E: $\frac{\|3 \cdot 1 + 4 \cdot z - d_E\|}{\|\overrightarrow{n_E}\|} = \frac{\|4z - 17\|}{5} = 2$ $\Rightarrow z_1 = 6{,}75$ und $z_2 = 1{,}75$ z_1 entfällt, da der Heizstrahler durch das Sonnensegel ragen würde. Der Heizstrahler darf eine maximale Höhe von 1,75 m nicht überschreiten.		1	4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	8	15	10
	Summe der BE		33	