Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2016/2017

Fach	Mathematik (C)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	29. Mai 2017
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungshorizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	34
2	33
3	33
Summe:	100

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2017
Mathematik

Aufgabenvorschlag C

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^x = (x^2+2x+1) \cdot e^x$.
Der Graph der Funktion ist G_f.

1.1 Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion *f* an. /2

1.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. /4

1.3 Bestimmen Sie die Lage und Art der lokalen Extrempunkte von G_f. /8
[zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2+4x+3) \cdot e^x$]

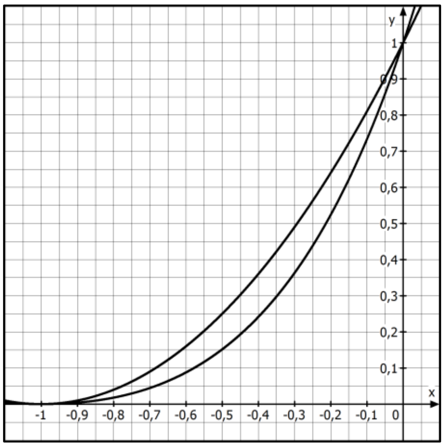
1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /6

x	– 3,2	–1	– 0,8	– 0,6	– 0,4	– 0,2	0
$f(x)$	0,197		0,018		0,241		

Zeichnen Sie mit Hilfe aller berechneten Ergebnisse den Graphen von *f* im Intervall $-3{,}2 \le x \le 0$. Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.5 Der Graph einer quadratischen Funktion *g* mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ soll ebenfalls bei $T(-1\,|\,0)$ einen Tiefpunkt haben und auch im Punkt $S_y(0\,|\,1)$ die *y*-Achse schneiden. /7
Geben Sie drei Bedingungen an, die *g* erfüllen muss und ermitteln Sie die Werte von *a*, *b* und *c* und geben Sie die Funktionsgleichung an.
[zur Kontrolle: $g(x) = (x+1)^2$]

1.6 In der Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von *f* und *g* dargestellt. Begründen Sie, dass der obere Graph zur Funktion *g* gehört. /2

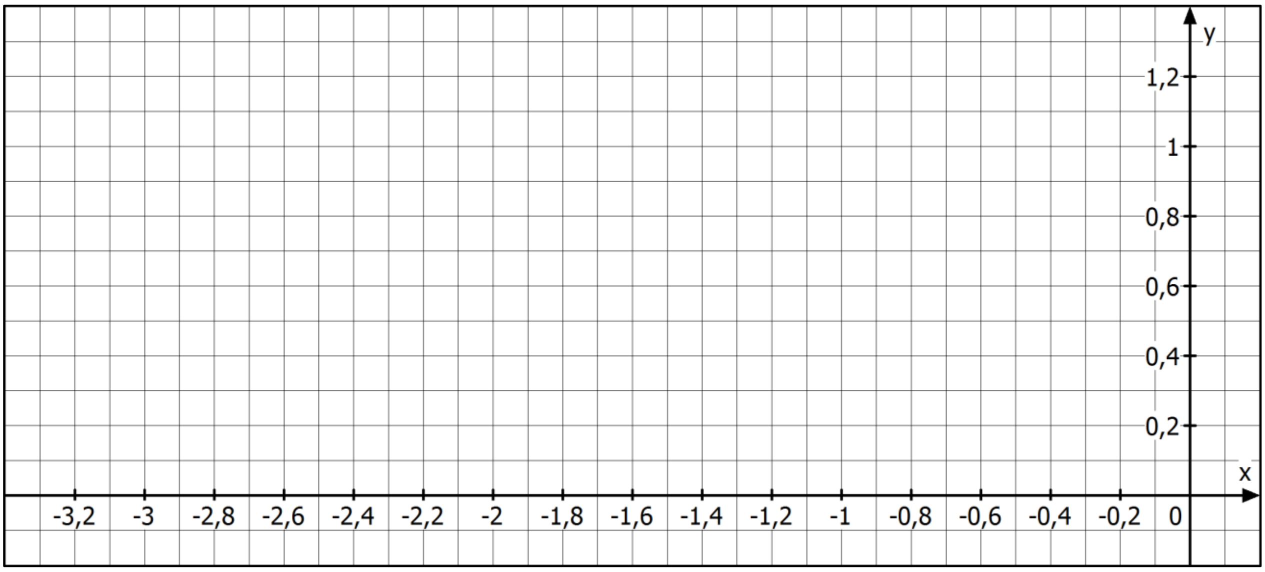


1.7 Für $-1 \le x \le 0$ schließen die Graphen G_f und G_g im zweiten Quadranten eine Fläche ein. /5
Berechnen Sie unter Verwendung des nachfolgenden Integrals, wie groß diese Fläche ist.

$$\int (x+1)^2 \cdot e^x dx = (x^2+1) \cdot e^x + C$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion *f* mit der Gleichung $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{4x^2-6x-10}$.

Der Graph ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion *f*. **/6**
Geben Sie die Art der Definitionslücken der Funktion *f* an und untersuchen Sie das Verhalten von G_f in der Umgebung dieser Stellen.

2.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. **/5**

2.3 Die Funktion *g* mit $g(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-10}$ besitzt die gleichen Nullstellen, Polstellen und Extrema wie die Funktion *f*. **/9**
Berechnen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_g.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass *g* die gleichen Nullstellen und Polstellen hat wie *f*, ist nicht erforderlich.]

[Zur Kontrolle: $g'(x)=\dfrac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}$]

2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten der Funktion *g*. **/3**

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x	– 4	– 3	– 1	3	5	6
$g(x)$	– 0,46		0,21			

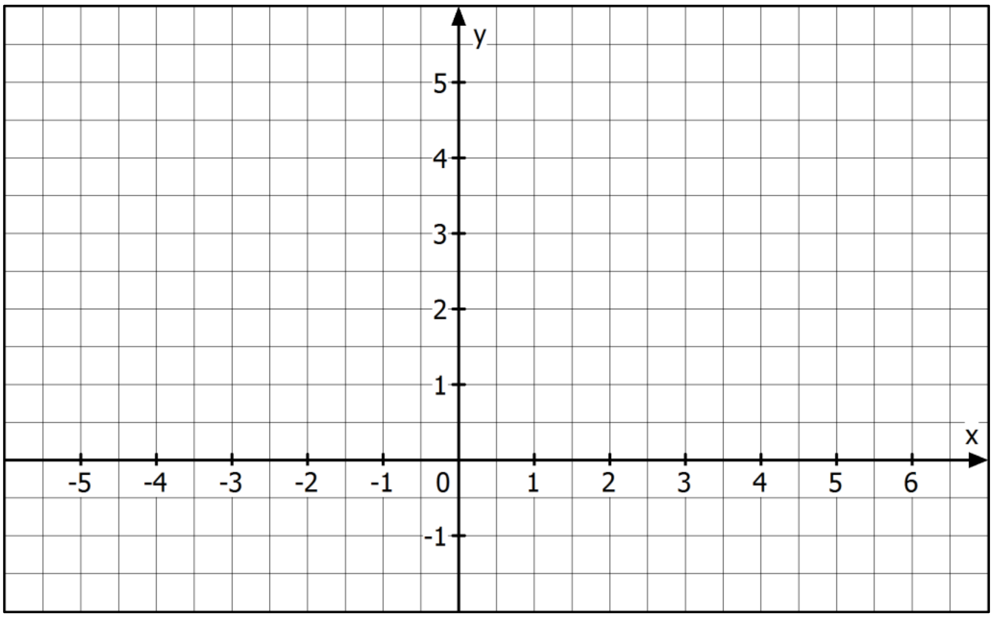
Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer berechneten Ergebnisse die Graphen der Funktion *g* und der Asymptote im Intervall $-4\le x\le 6$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

2.6 Die Funktion *g* wird jetzt durch Einführung eines Parameters *k* zur Funktion *h* mit $h(x)=\dfrac{x^2-4}{kx-10}$ verändert. **/4**

Berechnen Sie den Wert des Parameters *k*, so dass die Funktion *h* an der Stelle $x=0$ ein Extremum aufweist.
Ein Nachweis des Extremums ist nicht gefordert.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5



3 Analytische Geometrie /33

Die Abbildung zeigt eine Zielscheibe, wie sie beim Bogenschießen verwendet wird. In der Scheibe liegen die Punkte $A(-5005\,|\,100\,|\,150)$, $B(-5000\,|\,200\,|\,100)$ und das Zentrum $Z(-5000\,|\,150\,|\,100)$.
Der Erdboden liegt in der *x*-*y*-Ebene.

[Hinweise: Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht
1 LE = 1 cm.]

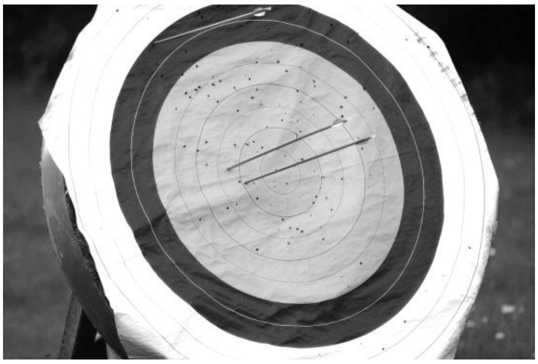


Abbildung: Zielscheibe beim Bogenschießen

3.1 Bestimmen Sie den Abstand der Punkte *A* und *B* zum Zentrum *Z* der Scheibe. **/5**

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte *A*, *B* und *Z* gebildet wird. **/4**

3.3 Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform an, in der die Zielscheibe liegt. **/5**
[mögliches Ergebnis für *E* in Koordinatenform: $E: -10x - z = 49900$]

3.4 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene *E* (siehe 3.3) zum Koordinatenursprung. **/5**

3.5 Die Flugbahn eines Pfeils wird durch eine Gerade angenähert. **/4**
Ein Pfeil trifft genau senkrecht in das Zentrum der Scheibe.
Stellen Sie eine Gleichung für diese Gerade *g* auf, auf der dieser Pfeil fliegt.

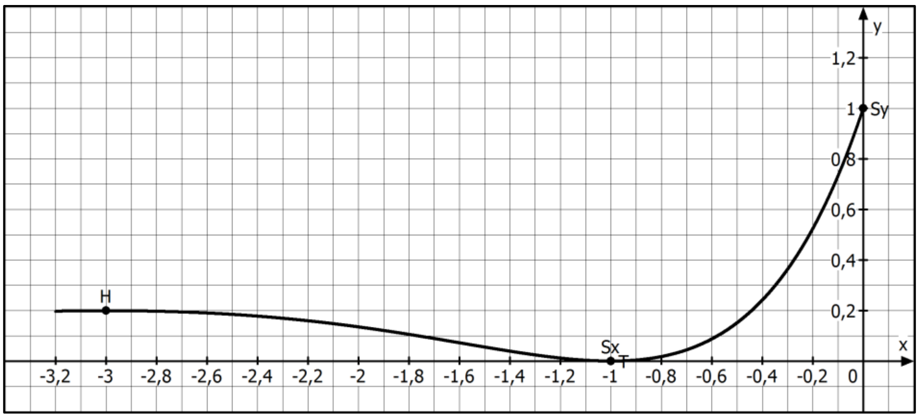
Zwei Schützen schießen zum Zeitpunkt $u = 0$ bzw. $v = 0$ jeweils einen Pfeil ab. Für den Ort der Pfeilspitze zum Zeitpunkt *u* (bzw. *v*) in Sekunden gilt in vereinfachter Darstellung:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -10004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}; u \geq 0 \qquad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}; v \geq 0$$

Bogenschütze 1 Bogenschütze 2

3.6 Begründen Sie, welcher Schütze vermutlich der Größere ist. **/3**

3.7 Bogenschütze 1 trifft die Zielscheibe im Punkt $S_1(-5002\,|\,180\,|\,120)$. **/7**
Berechnen Sie den Auftreffpunkt des Pfeils auf die Zielscheibe für Bogenschütze 2.
Begründen Sie, welcher Schütze bei diesem Schuss der Bessere ist.

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}_0^+$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Schnittpunkt mit der y-Achse
Es gilt: $x = 0$
$x = f(0) = (0+1)^2 \cdot e^0 = 1;\ S_y(0\,|\,1)$
Schnittpunkte mit der x-Achse
Es gilt: $y = 0$
$(x+1)^2 \cdot e^x = 0$
Da $e^x = 0$ keine Lösung liefert:
$(x+1)^2 = 0$
$x = -1;\ S_x(-1\,|\,0)$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot e^x + (x+1)^2 \cdot e^x$
$\quad = e^x \cdot (2x + 2 + x^2 + 2x + 1)$
$\quad = e^x \cdot (x^2 + 4x + 3)$
$f'(x) = 0;\ e^x \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0$
Da $e^x = 0$ keine Lösung liefert:
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-3};\ x_1 = -1;\ x_2 = -3$
$f''(x) = (2x+4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$
$\quad = (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x$
$f''(-1) = 2 \cdot e^{-1} > 0;$ Tiefpunkt bei $T(-1\,|\,0)$
$f''(-3) = -2 \cdot e^{-3} < 0;$ Hochpunkt bei $H(-3\,|\,0{,}2)$</td><td></td><td>3
5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>– 3,2</td><td>–1</td><td>– 0,8</td><td>– 0,6</td><td>– 0,4</td><td>– 0,2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>0,197</td><td>0</td><td>0,018</td><td>0,088</td><td>0,241</td><td>0,524</td><td>1</td></tr>
</table>


</td><td>2
4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

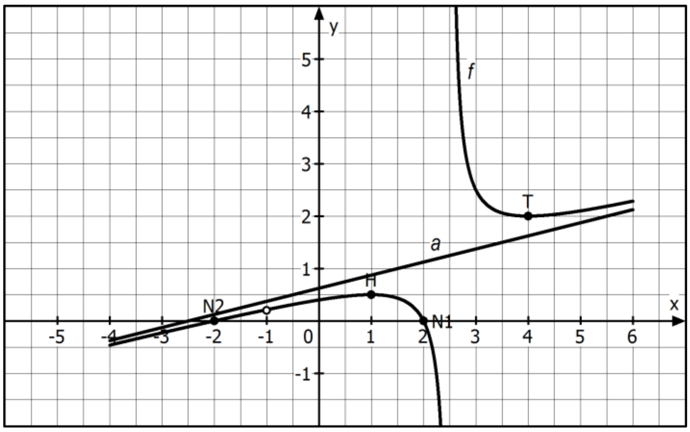
Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.5	Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$ Bedingungsgefüge: 1. $g(-1) = 0$ (Punkt $T(-1\,\vert\,0)$) 2. $g'(-1) = 0$ (Tiefpunkt T) 3. $g(0) = 1$ (Punkt $S_y(0\,\vert\,1)$)		3	
	Gleichungssystem: Aus $g(0) = 1$ folgt $c = 1$. I. $-1 = a - b$ II. $0 = -2a + b$ Lösen des Gleichungssystems ergibt: $a = 1; b = 2; c = 1$ Für die Funktionsgleichung gilt: $g(x) = x^2 + 2x + 1$ oder $g(x) = (x+1)^2$ Alternative: Vergleich der Punkte durch Einsetzen und Nachweis für den Tiefpunkt.		4	
1.6	Berechnung der jeweiligen Funktionswerte an einer bestimmten Stelle, z. B. $x = -0{,}4$ $f(-0{,}4) \approx 0{,}24$; $g(-0{,}4) = 0{,}36$ Daher ist der obere Graph der Graph der Funktion g.		2	
1.7	$A = \int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[(x^2+1)\cdot \mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - 2\cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}264$ $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0 + \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}$ Der Größe der Fläche beträgt ca. 0,069 FE.			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	17	5
	Summe der BE		34	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
2.1	x ist eine Definitionslücke, wenn $N(x)=0$ gilt. $4x^2-6x-10=0$ $x^2-1{,}5x-2{,}5=0$ $x_1=2{,}5\;\; x_2=-1$ Zählerpolynom überprüfen: $x_1^{\,3}+x_1^{\,2}-4x_1-4\neq 0$; $x_2^{\,3}+x_2^{\,2}-4x_2-4=0$ D = $\mathbb{R}\setminus\{-1;\,2{,}5\}$ Untersuchung der Umgebung durch Testeinsetzungen: $f(-1{,}01)=0{,}212$; $f(-0{,}99)=0{,}216$; $f(2{,}49)=-55$; $f(2{,}51)=57{,}5$ $x_1=2{,}5$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel $-\rightarrow+$, $x_2=-1$ ist eine hebbare Lücke	4	2	
2.2	Nullstelle: $0=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{4x^2-6x-10}$ $x^3+x^2-4x-4=0$ Erste Lösung z. B. mittels Horner-Schema: $x_3=2$, weitere über Untersuchung des Restpolynoms: $x^2+3x+2=0$ mit den Lösungen $x_2=-1$ (hebbare Lücke) $x_4=-2$ Die Nullstellen sind $x_{N1/2}=\pm 2$. $S_1(2\,\|\,0)$; $S_2(-2\,\|\,0)$ Die y-Achse wird bei $f(0)=\dfrac{2}{5}$ geschnitten. $S_y(0\,\|\,\frac{2}{5})$		5	
2.3	Berechnung der Extrema von $g(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-10}$ $g'(x)=\dfrac{2x(4x-10)-(x^2-4)\cdot 4}{(4x-10)^2}=\dfrac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}$ $g''(x)=\dfrac{(8x-20)(4x-10)^2-(4x^2-20x+16)\cdot 2(4x-10)\cdot 4}{(4x-10)^4}$ $g''(x)=\dfrac{(8x-20)(4x-10)-(4x^2-20x+16)\cdot 2\cdot 4}{(4x-10)^3}$ $g''(x)=\dfrac{72}{(4x-10)^3}$ Notwendige Bedingung: $0=\dfrac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}\Leftrightarrow 4x^2-20x+16=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ $x_5=4; x_6=1$ $g''(4)=0{,}33>0\Rightarrow T(4\,\|\,2)$; $g''(1)=-0{,}33<0\Rightarrow H(1\,\|\,0{,}5)$	4	5	

2.4	Bestimmung der Asymptote durch Polynomdivision: $g(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-10}=(x^2-4):(4x-10)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{8}+\dfrac{9}{4(4x-10)}$ $a(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{8}$		3	
2.5	(table and graph below)	2	4	
2.6	$h(x)=\dfrac{x^2-4}{kx-10}$ $h'(x)=\dfrac{2x(kx-10)-(x^2-4)k}{(kx-10)^2}=\dfrac{kx^2-20x+4k}{(kx-10)^2}$ $h'(0)=\dfrac{4k}{100}=0$ $k=0$			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	19	4
	Summe der BE		33	

Zu 2.5:

x	– 4	– 3	– 1	3	5	6
$g(x)$	– 0,46	**– 0,23**	0,21	**2,5**	**2,1**	**2,29**



Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
3.1	$\lvert\overrightarrow{ZA}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -5005 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{5025} \approx 70{,}89$ $\lvert\overrightarrow{ZB}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -5000 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{2500} = 50$ Der Abstand der Punkte *A* und *B* zum Zentrum beträgt 70,89 cm bzw. 50 cm.	5		
3.2	Inhalt der Dreiecksfläche: $A_{ABZ} = \frac{1}{2} \left\lvert \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2} \left\lvert \begin{pmatrix} -2500 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 1256{,}2$ Die Dreiecksfläche beträgt ca. 1256,2 cm^2.		4	
3.3	Bestimmung eines möglichen Normalenvektors $\vec{n} = \overrightarrow{ZA} \times \overrightarrow{ZB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix}$ und *d* mit $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = 12475000$ Eine Gleichung in Koordinatenform $E: -10x - z = 49900$		5	
3.4	$E: -10x - z = 49900$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{101} \approx 10{,}05$ $\frac{-10x}{\sqrt{101}} - \frac{z}{\sqrt{101}} = \frac{49900}{\sqrt{101}} \approx 4965$ Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung beträgt ca. 4965 cm.		5	
3.5	Bestimmen eines Normalenvektors der Ebene *E* (z. B. aus 3.2): $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix}$ $g: x = \overrightarrow{OZ} + r\vec{n} = \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2500 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix}$	4		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.6	$u = 0$ bzw. $v = 0$ bedeutet den Zeitpunkt des Abschusses. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Pfeilspitze von Bogenschütze 1 in der Höhe von 170 cm, die von Schütze 2 in der Höhe von 180 cm. Damit ist Bogenschütze 2 vermutlich der Größere.		3	
3.7	$S_1(-5002 \mid 180 \mid 120)$ $\overline{ZS_1} = \sqrt{1304} \approx 36{,}11$ *k* und *E*: $\begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r = \frac{3}{5}$; $s = \frac{1}{5}$; $v = \frac{1}{2}$ Mit $v = \frac{1}{2}$ ergibt sich für den Schnittpunkt: $S_2(-5003 \mid 130 \mid 130)$ $\overline{ZS_2} = \sqrt{1309} \approx 36{,}18$ Bogenschütze 1 ist minimal besser.			7
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	9	17	7
	Summe der BE	33		