Didaktischer Kommentar von Prof. Andreas Schulz

Diagnose und Förderung – eingebettet in den alltäglichen Mathematikunterricht

Formative Diagnose, wie sie mit den LISUM-Materialien angedacht ist, hat das Ziel diagnostische Informationen bereitzustellen, die nachfolgend für das Unterrichten und Lernen genutzt werden und damit den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler unterstützen. Für eine gelingende Umsetzung kommt der Lehrkraft die zentrale Rolle zu: Zunächst wählt sie aus den bereitgestellten Materialien solche aus, die zum Curriculum und zu den Bedürfnissen in der eigenen Klasse passen. Nach dem Einsatz der Diagnosematerialien wertet sie die Ergebnisse aus und interpretiert diese. Daraus leitet sie zum Lernstand der Klasse und zu einzelnen Schülerinnen und Schülern passende Fördermaßnahmen ab, indem sie eine Auswahl aus den bereitgestellten Fördermaterialien trifft. Diese ergänzt sie bei Bedarf und bettet sie in eine die Schülerinnen und Schüler bestmöglich aktivierende und unterstützende Unterrichtsgestaltung ein. Während der Förderung begleitet und moderiert sie das Lernen der Schülerinnen und Schüler in individuellen und kooperativen Arbeitsphasen. Sie ergänzt bei Bedarf weitere Aufgaben, Hilfestellungen oder Erklärungen. Begleitend oder abschließend überprüft die Lehrkraft den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler, u. a. um darauf abgestimmt den weiteren Unterricht zu planen. Diese Beschreibung gilt in allgemeiner Form ebenfalls für die tagtäglichen und komplexen Herausforderungen des Unterrichtens, zu dem die vorliegenden Diagnose- und Fördermaterialien eine wenigstens zweifache Unterstützung anbieten möchten:

(1) Die in den Materialien enthaltenen Aufgaben können unmittelbar im Unterricht bzw. Förderunterricht eingesetzt werden.

(2) Die Aufgaben zusammen mit den begleitenden Erläuterungen bieten eine Orientierung zu zentralen Lernzielen, denen im Fach Mathematik zur Leitidee «Zahlen und Operationen» zur Unterstützung langfristig erfolgreicher Lernentwicklungen von der Grund- bis zur Sekundarstufe zentrale Bedeutung zukommt.

Dieser einführende didaktische Kommentar erläutert die in Abbildung 1 dargestellten Schwerpunkte des Kompetenzerwerbs zur Leitidee *Zahlen und Operationen*. Ein wesentliches Anliegen des Textes ist es, an ausgewählten Beispielen die Bedeutung eines verstehensorientierten Mathematikunterrichts für langfristig erfolgreiches Lernen zu veranschaulichen und Zusammenhänge zwischen zu erwerbenden Kompetenzen zu verdeutlichen. Damit macht dieser Einführungstext auch Überlegungen transparent und nachvollziehbar, die zu der vorliegenden Auswahl der Schwerpunkte des Kompetenzerwerbs und der entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien geführt haben. Diese Informationen, so die Hoffnung, tragen zu einer zielgerichteten Verwendung der Materialien im Unterricht bei. Die vorliegenden Diagnose- und Fördermaterialien des LISUMs verfolgen zusammenfassend wenigstens drei eng miteinander verbundene Ziele: (a) Sie geben in den Erläuterungen Anregungen und Orientierung für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts, (b) sie konkretisieren diese in Form von Aufgaben und (c) sie möchten auf diesem Wege einen Beitrag zu einer gelingenden tagtäglichen Förderung der Schülerinnen und Schüler leisten.

Zahlen und Operationen

Der Leitidee *Zahlen und Operationen* kommt im Curriculum des Faches Mathematik eine zentrale Rolle zu (Kilpatrick, 2001): Sie steht nicht nur im engen Bezug zu allen anderen mathematischen Leitideen, sondern bildet auch die Grundlage für lebenslanges Lernen in weiteren Fächern und Lebensbereichen, bis hin zu einer selbstbestimmten Teilhabe am beruflichen und gesellschaftlichen Leben. Die folgende

Zusammenfassung der Ideen der Zahl, der Operationen und ihrer durchgängigen Bedeutung für alle Zahlräume und Zahlbereiche orientiert sich am LISUM-Modell zur Leitidee *Zahlen und Operationen*.

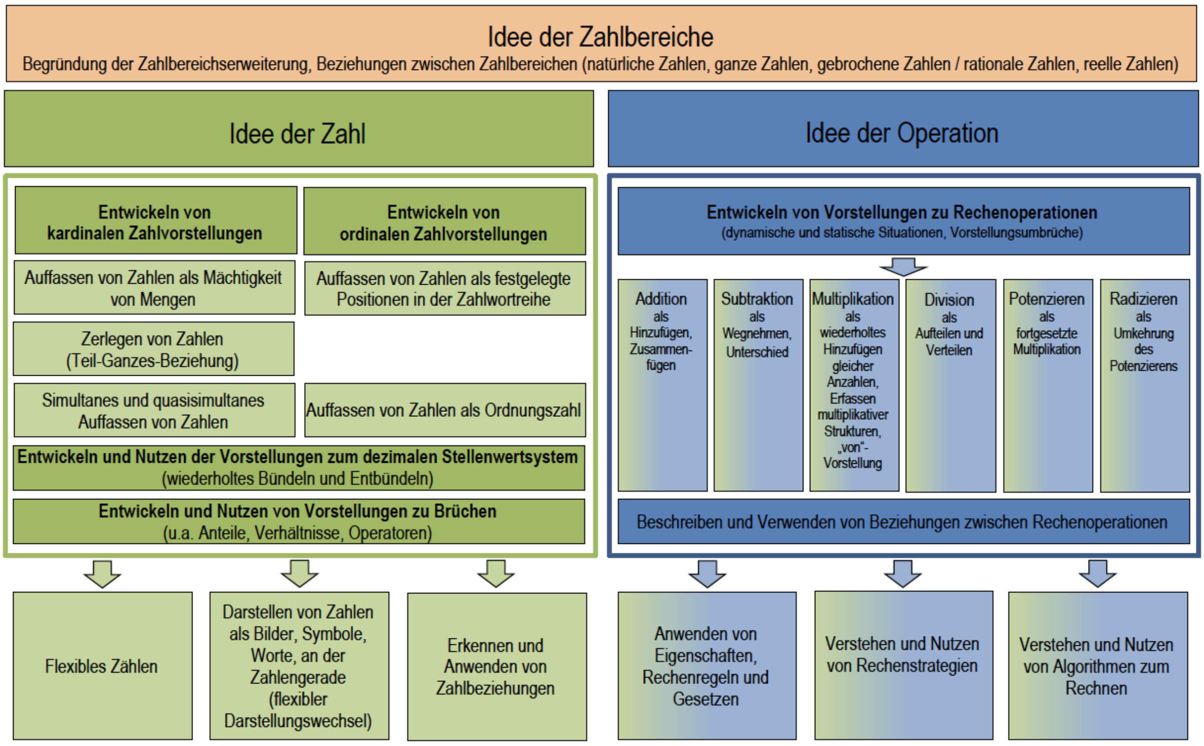

Abbildung 1: Inhaltliches Konzeptbild „Zahlen und Operationen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Idee der Zahl

Kardinale und ordinale Zahlvorstellungen

In der Idee der Zahl lassen sich ordinale und kardinale Zahlvorstellungen unterscheiden (Padberg & Benz, 2021): Zählkompetenzen beruhen zunächst auf der Kenntnis der Zahlwortreihe, in welcher die ordinale Anordnung von Zahlen bzw. Zahlworten zum Ausdruck kommt. Über eine eindeutige Eins-zu-Eins-Zuordnung von Elementen – z. B. von Rechenplättchen oder Mitspielerinnen und Mitspielern – zu Zahlworten lassen sich Anzahlen von Mengen bestimmen: Das zuletzt genannte Zahlwort kennzeichnet die Anzahl der Menge. Dies entspricht dem Kardinalzahlaspekt einer Zahl. Über ein Weiter- oder Rückwärtszählen lassen sich damit bereits erste Additions- und Subtraktionsprobleme lösen. Weitergehend machen Kinder die Erfahrung, dass sich Mengen auf verschiedene Weisen in Teilmengen zerlegen lassen, z. B. eine Sieben in eine Fünf und eine Zwei, oder eine 10 in 7 + 3. Die Anzahl der Objekte der Teilmengen entspricht der Anzahl der Gesamtmenge. Die Ergebnisse wiederholt erarbeiteter, zentraler Aufgaben, z. B. von Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben, von Zerlegungen der 5 und der 10 sowie von Additionsaufgaben mit der 5 oder der 10, werden nach und nach auswendig gewusst. Dieses Wissen und das Verständnis der Teil-Ganzes-Beziehung ermöglicht nach und nach eine Ablösung vom zählenden Rechnen (Gaidoschik, 2016; Padberg & Benz, 2021): Unbekannte Aufgaben können auf bereits bekannte Aufgaben zurückgeführt werden: Beispielsweise kann 4+3 gelöst werden, indem die Nachbar-Beziehung zur Aufgabe 3 + 3 genutzt wird, oder indem die 3 zerlegt wird und über die Zwischenaufgabe 4 + 1 und dann noch 2 das Ergebnis ermittelt wird. Die Erkenntnis, dass Tauschaufgaben, z. B. 2 + 5 oder 5 + 2, zum selben Ergebnis führen, nimmt bereits in Jahrgangsstufe 1 Bezug auf das Kommutativgesetz der Addition, ohne es als solches zu benennen. Ziel ist hier das Lösen von unbekannten Aufgaben, indem sie auf bekannte zurückgeführt werden. Dass das Kommutativgesetz bzw. die Strategie der Tauschaufgaben lediglich für die Addition, nicht aber für die Subtraktion gilt, können Rechengeschichten und Materialhandlungen verdeutlichen. Diese sollten auch in höheren

Jahrgangsstufen wieder aufgegriffen werden, sobald insbesondere beim schriftlichen Subtrahieren der verbreitete Fehler „immer die kleinere von der größeren Ziffer abziehen“ auftritt. Dieses Fehlkonzept kann auch in der Sekundarstufe zu Antworten wie 73 – 14 = 61 (statt 59) führen.

Das Verstehen und Erlernen der Teil-Ganzes-Beziehung ist mit der Entwicklung von Fähigkeiten zum quasi-simultanen Erkennen von Anzahlen verbunden: Eine gegebene Anordnung von sechs Rechenplättchen kann beispielsweise strukturiert werden als eine Menge von 4 und von 2 Rechenplättchen, die dann im Kopf addiert werden. Oder eine gezeigte Anordnung von Rechenplättchen erinnert an memorierte Bilder von Würfelzahlen, die ebenfalls bei der Anzahlbestimmung helfen können. Auch sinnvoll verwendete Fingerbilder können einen Beitrag zur Ablösung vom zählenden Rechnen leisten: Sie betonen auf natürliche Weise die besondere Rolle der Zahl 5 beim Rechnen und bei der quasi-simultanen Auffassung von Zahlen. 5 + 1 angezeigter Finger lassen sich als 6 Finger beschreiben und einprägen, verbunden mit der Erkenntnis, dass sich die Anzahl der gezeigten Finger nicht verändert, wenn alternativ 1 + 5 oder 3 + 3 Finger angezeigt werden. Eine solche Verwendung von Fingerbildern ergänzt eine ordinale Verwendung der Zahlwortreihe um die kardinale Anzahldarstellung mit flexiblen Möglichkeiten zur Zerlegung von Zahlen.

Die Erarbeitung der Teil-Ganzes-Beziehung und von hierauf beruhenden Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 stellen die zentralen arithmetischen Lernziele der ersten Jahrgangsstufe dar. Die Ablösung vom zählenden Rechnen bildet die Grundlage für die in Jahrgangsstufe 2 beginnende Erarbeitung von größeren Zahlräumen sowie von Rechenstrategien in größeren Zahlräumen, für die Erarbeitung des Stellenwertsystems sowie der Multiplikation.

Dezimales Stellenwertsystem

Das dezimale Stellenwertsystem (Padberg & Benz, 2021) basiert mit seiner wiederholten Zehnerbündelung auf zwei zentralen Prinzipien, in denen jede Ziffer zwei Informationen vermittelt: Der Zahlenwert einer Ziffer benennt die Anzahl der Bündel der betreffenden Mächtigkeit. Der Stellenwert der Ziffer ergibt sich aus der Stellung der Ziffer in der Zahl und kennzeichnet die Mächtigkeit des zugehörigen Bündels. Dafür ist es notwendig, dass nicht besetzte Stellen durch Nullen kenntlich gemacht werden. Ein Verständnis hiervon erarbeiten sich Kinder u. a., indem sie handelnd mit konkretem Material große Mengen bündeln, um deren Anzahlen geschickt bestimmen zu können. Darauf aufbauen können Kinder mit strukturiertem Material (Zehnersystemmaterial bzw. Dienes-Material) die Bündelung von Einern in Zehner, in Hunderter und Tausender vornehmen sowie Zerlegungen gegebener Zahlen handeln entbündeln, indem sie z. B. Hunderterplatten in Zehnerstangen oder Einerwürfel umtauschen. Auf dem Zahlenstrahl lassen sich Vorgänger- und Nachfolgezahlen bestimmen, sowie Nachbarzehner, Nachbarhunderter und weitere Beziehungen zwischen Zahlen erkunden. Zum Rechnen ist der Zahlenstrahl weniger geeignet, da er ein zählendes Vorgehen nahelegt. Daher finden bei der Erarbeitung von Rechenstrategien oftmals Rechenstriche ohne vorgegebene Einheiten Verwendung. Auf diesen lassen sich Zahlbeziehungen und multiple Rechenwege z. B. zur Lösung der Aufgabe 204 – 197 darstellen, erkennen, kommunizieren und begründen. Auch vielfältige Besprechungen und Vergleiche von Rechenstrategien tragen zu einem vertieften Verständnis des Stellenwertsystems bei, indem Zahlen in zunehmend größer werdenden Zahlräumen passend zu gegebenen Aufgaben und Situationen zerlegt, zusammengesetzt und in Beziehung untereinander betrachtet werden.

Die Besprechung von Abständen zwischen Zahlen auf einem (fiktiven) Zahlenstrahl stellt eine wiederkehrende Lerngelegenheit für die Entwicklung von Stützpunktvorstellungen zu Zahlgrößen dar: Mit Verweis auf Längen lässt sich ab Jahrgangsstufe 4 beispielsweise erarbeiten: „Was ist 10 m, 100 m, 1000 m oder gar 10 000 m von unserem Klassenzimmer entfernt? Ist der Unterschied zwischen 10 und 1000 oder der zwischen 1000 und 10 000 größer? Warum?“ In höheren Jahrgangsstufen lässt sich in ähnlicher Weise besprechen: „Ist der Unterschied zwischen 1 000 000 und 1 000 000 000 größer oder

der zwischen 1 000 000 000 und 10 000 000 000? Warum? Kennt ihr Beispiele für solche Zahlen?“ Aktuelle Zahlenbeispiele finden sich u. a. in öffentlichen Haushaltsdebatten, aus Zielen zum Klimaschutz oder ergeben sich aus Fermi-Aufgaben im Unterricht. Tragfähige Stützpunktvorstellungen und ein Verständnis des Zahlensystems sind für ein verstehensbasiertes Nutzen entsprechender Informationen erforderlich. Beispielsweise ließe sich diskutieren, ob ein Schuldenanstieg von 1 Million zu 1 Milliarde oder von 1 Milliarde zu 10 Milliarden bedeutsamer ist. Entscheidend ist hier nicht das Oberflächenmerkmal *Anzahl der Nullen*, sondern der *Stellenwert* bzw. die Verschiebung des ersten Stellenwertes. Noch weit vor Einführung einer formalen Exponentialrechnung lässt sich derart die exponentielle Struktur des Stellenwertsystems erfahren und inhaltlich beschreiben, u. a. mit Bezug zu Entfernungen auf der Erde und im Sonnensystem. Verbunden damit lässt sich auch mit der bekannten Reiskornaufgabe am Schachbrett („Für jedes weitere Feld kommen doppelt so viele Reiskörner hinzu.“) exponentielles Wachstum diskutieren, berechnen sowie informell beschreiben. Erkenntnisse daraus können dann mit informell-inhaltlichen Beschreibungen der exponentiellen Struktur des Stellenwertsystems verknüpft werden. Später unterstützen solche Erfahrungen ein Verständnis der 10er-Potenzschreibweise von Stellenwerten bei natürlichen Zahlen.

Multiplikatives Verständnis: Erweitertes Verständnis von Zahlen und Zahlbeziehungen

Eine besondere Bedeutung kommt ab Jahrgangsstufe 2 der Erarbeitung der Multiplikation zu (Gaidoschik, 2014; Padberg & Benz, 2021). Bei der Addition und Subtraktion lassen sich Zahlen, auch in der Zehner-Bündelungsschreibweise des Stellenwertsystems, als Vielfache von 1 betrachten. Bei der Multiplikation erhält der Multiplikator jedoch eine andere Bedeutung (Hurst & Hurrell, 2014). Beispielsweise gilt dies bei der Aufgabe $3 \cdot 4$ wahlweise für die 3 (drei Vierer-Mengen) oder für die 4 (die 3, viermal). Der Operator bezeichnet, wie oft eine Menge vervielfältigt wird. Betrachtet man z. B. die Darstellung der Multiplikationsaufgabe $3 \cdot 4$ am Punktefeld, so nimmt man drei 4er-Reihen oder vier 3er-Spalten wahr. Am Punktefeld können sowohl einzelne Multiplikationsaufgaben als auch Zusammenhänge zwischen Aufgabe dargestellt und besprochen werden: $3 \cdot 4$ und $3 \cdot 5$ unterscheiden sich um eine 3er-Spalte oder 3er-Reihe. Das Ergebnis von $3 \cdot 5$ ist daher um 3 größer als das Ergebnis von $3 \cdot 4$. Nur mit einem solchen Verständnis multiplikativer Bedeutungen und Zusammenhänge lässt sich ausgehend von einem bereits bekannten Ergebnis einer Aufgabe wie $5 \cdot 6$ das Ergebnis einer noch nicht bekannten Aufgabe wie $5 \cdot 7$ herleiten. Die Idee des Distributivgesetzes wird derart bereits beim Aufgabenzusammenhang zwischen $5 \cdot 6$ und $5 \cdot 7$ am Punktefeld in Jahrgangsstufe 2 veranschaulicht und eingeführt, ohne dies formal als solches zu benennen. Ebenso ist das Kommutativgesetz der Multiplikation am Punktefeld bereits informell beschreibbar: „Je nachdem, ob ich Reihen oder Spalten betrachte, sehe ich $3 \cdot 4$ oder $4 \cdot 3$ Punkte. Die Gesamtzahl der Punkte ist gleich.“ Mit entsprechenden konkreten Beispielen zu Punktefeldern oder Rechteckflächen lassen sich auch in höheren Jahrgangsstufen Regeln zum Umgang mit Klammern in Termen oder allgemein das Distributivgesetz und das Kommutativgesetz der Multiplikation mit Variablen erklären und veranschaulichen.

Die Darstellung am Punktefeld findet auch in größeren Zahlräumen Verwendung, um geschickte Rechenwege von Aufgaben wie z. B. $19 \cdot 50$ zu entdecken, nachzuvollziehen oder zu erklären („ein 50er weniger als …“). Das allgemeinere Rechteck-Flächen-Modell für die Multiplikation eignet sich später in erweiterten Zahlbereichen ebenfalls für die Darstellung der Multiplikation von Brüchen (z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$), Dezimalzahlen (z. B. $1{,}9 \cdot 5{,}0$) bis hin zur Veranschaulichung binomischer Formeln und bedingter Wahrscheinlichkeiten bzw. stochastischer Abhängigkeit und Unabhängigkeit am Einheitsquadrat. Die Thematisierung multiplikativer Zusammenhänge zwischen einem Faktor und dem Produkt, wie z. B. „Das Ergebnis von $5 \cdot 7$ ist um 5 größer als das Ergebnis von $5 \cdot 6$“, legt zudem eine wichtige Grundlage für das (spätere) Verständnis proportionaler Zusammenhänge. Dies kommt z. B. in Preis-Menge-Beziehungen oder Flächenberechnungen zum Ausdruck: „Doppelte Länge bei gleicher Breite ergibt doppelte Fläche: Warum …?“ und weitergehend als Gegenbeispiel „Verdoppelt sich auch der Umfang? Warum?“. Aufschlussreich sind hier wiederum Begründungen mit Zeichnungen zur Veranschaulichung der proportionalen und nicht proportionalen Zusammenhänge bis hin zum Distributivgesetz als weitere Aspekte multiplikativen Verständnisses.

Mit Blick auf längerfristige Lernprozesse werden multiplikative Zusammenhänge demnach in den Jahrgangsstufen 2 und 3 bei einer verstehensbasierten Erarbeitung des Einmaleins (d. h. ohne verfrühte Automatisierung) auch mit Bezug auf Reihen und Zusammenhänge zwischen Reihen veranschaulicht und diskutiert. Nachfolgend geschieht dies bei diskreten Mengen wie in Tabellen zu Preis-Menge-Beziehungen. Dies legt die Grundlage für später thematisierte multiplikative Zusammenhänge auch zwischen kontinuierlichen Größen. Dazu werden u. a. Preis-Menge-Beziehungen mit rationalen Zahlen in Tabellen genutzt und dazu passende Diagramme (Ursprungsgeraden) besprochen. Auch Maßstäbe und Ähnlichkeitsabbildungen beschreiben kontinuierliche multiplikative Zusammenhänge. Beim Umrechnen zwischen Maßstäben, in Dreisatztabellen und bei Prozentwertaufgaben werden multiplikative Zusammenhänge erweitert und vertieft. Dabei werden Verhältnisse zwischen zugeordneten Mengen oder Strecken sowie Verhältnisse zwischen Mengen-Beziehungen oder Strecken-Beziehungen veranschaulicht, herausgearbeitet und letztendlich formalisiert dargestellt. In diesem längerfristigen Lernprozess ist der regelmäßige Rückbezug auf die zugrundeliegenden multiplikativen Zusammenhänge und deren Veranschaulichung in verschiedensten Kontexten essenziell. Ziel ist, einem unverstandenen und möglicherweise zu einseitigem Hantieren mit Formeln und separiert verwendeten Rechenregeln vorzubeugen. Dazu können die stets inhaltlich interpretierbaren Bedeutungen von Formeln, Rechenregeln und Begriffen (z. B. Quotienten aus Wertepaaren, Proportionalitätsfaktor) mit Erfahrungen und Vorstellungen aus vielfältigen Alltagskontexten vernetzt und zudem aktiv Bezüge zwischen verschiedenen inner- und außermathematischen Kontexten hergestellt werden (Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek, 2010).

Entwickeln von Vorstellungen zu Brüchen

Das Verständnis von Brüchen (Padberg & Wartha, 2017) baut in mehrfacher Hinsicht ebenfalls auf einem zuvor erarbeiteten Verständnis multiplikativer Zusammenhänge auf: Formal stehen Zähler und Nenner in einem multiplikativen Zusammenhang. Solange sich ihr Verhältnis nicht ändert, bleibt auch der Wert eines Bruches gleich. Bis das von Schülerinnen und Schülern verstanden werden kann, ist es jedoch ein weiter Weg. Eingeführt werden Brüche überwiegend in ihrer Bedeutung als Anteil (Padberg & Wartha, 2017). $\frac{1}{3}$ bezeichnet dann eines von drei gleich großen Teilen eines Ganzen. Darstellungen am Bruchstreifen oder im Pizzamodell erlauben es, die gleich großen Teile zu identifizieren und deren Anzahl auszuzählen. Dies ist ein bewährtes und an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler bereits in der Grundschule anschlussfähiges Vorgehen. Vielfältige nachfolgende Aufgabenbeispiele haben weitergehend das Ziel, die notwendige gleichzeitige Betrachtung von Zähler und Nenner zu fordern und zu fördern und derart das Verständnis von Brüchen auszubauen und zu vertiefen: $\frac{3}{4}$ eines kleineren und $\frac{2}{3}$ eines größeren Kuchens lassen sich nicht so ohne weiteres vergleichen, oder $\frac{3}{4}$ eines kürzeren und $\frac{2}{3}$ eines längeren Streifens. Dies verdeutlicht die Bedeutung des Ganzen, auf das sich ein Bruch bezieht. Eine solche Operatorvorstellung von Brüchen inklusive gleichzeitiger Betrachtung von Zähler und Nenner wird bereits angebahnt, wenn sich Brüche auf diskrete Materialien beziehen: „Was sind $\frac{2}{3}$ von 15 Rechenplättchen?“ Zur Lösung müssen die Bedeutung des Nenners (drei gleich große Teilmengen von 15), des Zählers (Anzahl der ausgewählten Teilmengen) und des Ergebnisses (Anzahl der Rechenplättchen in den ausgewählten Teilmengen) in ihrem Gesamtzusammenhang berücksichtigt und interpretiert werden. Spätestens bei der Addition und Subtraktion von Brüchen dienen Rechteckmodelle der Veranschaulichung des Erweiterns sowie des Zusammenfassens oder Wegnehmens gleichgroßer, d. h. gleichnamiger Anteile. Das Rechteckmodell setzt ein Verständnis von Flächen und Flächenzerlegungen voraus, wie es beispielsweise zuvor mit dem (handelnden und rechnerischen)

Auslegen von Flächen mit Einheitsquadraten zur Flächenbestimmung und zum Flächenvergleich angebahnt werden kann. Ein Verständnis der Addition und Subtraktion von Brüchen am Rechteckmodell ist zudem mit einem Verständnis der Gleichwertigkeit von Brüchen verbunden, inklusive der Bedeutung des (multiplikativen) Erweiterns und Kürzens als Verfeinern und Vergröbern der mit dem Nenner gekennzeichneten Unterteilung eines Ganzen. Hierbei spielen Teiler, d. h. multiplikative Zerlegungen der Zahlen in Zähler und Nenner, und das Erkennen gemeinsamer Teiler eine zentrale Rolle. Inhaltlich lassen sich multiplikative Zerlegungen von Zahlen bereits im vierten Schuljahr thematisieren, z. B. indem rechteckige Punktefelder mit unterschiedlichen Längen und Breiten gesucht werden, welche aus der gleichen Gesamtzahl bestehen. Dass es dabei Zahlen gibt, die sich vielfältig darstellen lassen (z. B. 24), und solche, die sich nur auf eine Weise darstellen lassen (z. B. 11), kann zur Thematisierung von Primzahlen führen. Verwandt damit ist z. B. im fünften Schuljahr die Suche nach geeigneten Größen von Schokoladetafeln, deren Einteilung in rechteckige Stücke besonders familienfreundlich, d. h. teilerreich ist.

Dezimalzahlen: Anteilsvorstellungen und Stellenwertverständnis

Dezimalzahlen erweitern und vertiefen u. a. das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems (Padberg & Wartha, 2017), indem sich die fortgesetzte Zehnerbündelung nun auch auf Stellenwerte kleiner als 1 bezieht. Damit verbunden ist, dass die Bestimmung der Stellenwerte nicht mehr von den Einern ausgeht, die bei natürlichen Zahlen ganz rechts notiert werden, und sich von dort nach links orientiert. Stattdessen ist der Bezugspunkt nun das Komma, und die Blickrichtung geht von hier ausgehend nach links und nach rechts: Links vom Komma folgen wie bisher nach den Einern die Zehner, Hunderter, Tausender etc. Rechts vom Komma gibt es jedoch keine Eintel, sondern es folgen unmittelbar Zehntel, Hundertstel, Tausendstel etc. Zehn Hunderter ergeben einen Tausender, jedoch ergeben zehn Tausendstel ein Hundertstel. Auch wenn viele Schülerinnen und Schüler bereits mit ausgewählten Dezimalzahlen, u. a. in Form von Geldbeträgen, vertraut sind, darf dies nicht darüber hinwegtäuschen, dass auch die Erarbeitung eines Verständnisses von Dezimalzahlen Zeit und vielfältige Lerngelegenheiten benötigt. Hierbei werden u. a. die verschiedenen, teils gleichwertigen Schreibweisen für Bruchzahlen und Dezimalzahlen aufeinander bezogen. Zudem werden Stellenwerte sowie Bündelungen und Entbündelungen inklusive Effekte der Multiplikation und Divisionen mit 10, 100 etc. an der Stellenwerttafel notiert und besprochen. Der Zahlenstrahl dient vorrangig zur Klärung von Lagebeziehungen zwischen Dezimalzahlen.

Flexibles Zählen

Flexibles Zählen hebt die Bedeutung einer verstehensbasierten Anwendung des Zählens und schrittweisen Zählens in allen Jahrgangsstufen hervor: In der Eingangsstufe machen Kinder u. a. die Erfahrung, dass es günstig ist, beim Zusammenfassen zweier Mengen von der größeren Menge ausgehend weiterzuzählen, um die Gesamtmenge zu bestimmen. Später kommen Anforderungen des Übergangs beim Weiter- oder Rückwärtszählen hinzu, z. B. dass nach 2198, 2199, 2200 nicht die 2300 folgt. Dies zeigt sich auch bei Fähigkeiten zum schrittweisen Weiter- oder Rückwärtszählen Will man beispielsweise von 2023 in Zehnerschritten rückwärts zählen: 2023, 2013, 2003, 1993, ist dafür die Entbündelung eines Tausenders und weitergehend eines Hunderters in Zehner notwendig. Vergleichbares gilt für das schrittweise Zählen mit Dezimalzahlen: Zählt man z. B. von 10,98 in 0,01er-Schritten weiter, so erfordert dies ein vertieftes Verständnis der Stellenwerte, um nicht bei 10,100 und 10,101 als vermeintlichen nächsten Schritten zu landen.

Darstellen von Zahlen

Darstellungswechsel unterstützen den Aufbau tragfähiger Vorstellungen von Zahlen und Operationen in allen Jahrgangsstufen (Padberg & Benz, 2021; Padberg & Wartha, 2017). Zahlen werden in unterschiedlichen Formen gesprochen und geschrieben (a) mit konkreten Materialien, z. B. unstrukturierten Rechenplättchen oder strukturierten Zehnersystemmaterialien sowie Kreissegmenten für Brüche, (b) bildlich, z. B. mit strukturierten Punktefeldern oder am Zahlenstrahl sowie mit Bruchstreifen, Prozentstreifen oder Rechteckmodellen für Brüche und (c) symbolisch als Zahl und Zahlwort. Außerdem werden sie in symbolischen Darstellungen wie z. B. der Stellenwerttafel oder dem Rechenstrich, notiert, verglichen, zerlegt und verändert. Dabei werden Zahleigenschaften sowie Beziehungen zwischen Zahlen herausgearbeitet, beschrieben und für das vorteilhafte und verstehensbasierte Rechnen genutzt. Materialien und Darstellungen sind überwiegend nicht selbsterklärend und müssen aktiv interpretiert werden. Austausch und Sprache unterstützen dies, beim Darstellungswechsel und generell in einem verstehensbasierten Mathematikunterricht. Übergeordnetes Ziel ist der Aufbau von tragfähigen Vorstellungen (Vom Hofe, 2003) zu mathematischen Begriffen wie Zahlen und Operationen. So werden u. a. neu eingeführte Begriffe mit bestehenden Erfahrungen verknüpft und die komplexen Eigenschaften von mathematischen Begriffen und ihre Beziehungen untereinander veranschaulicht und begreifbar gemacht. Später dienen die erarbeiteten Vorstellungen zu mathematischen Begriffen u. a. dazu, Mathematik in vielfältigen inner- und außermathematischen Problemstellungen anwenden und flexibel, zielorientiert und kreativ nutzen zu können.

Zahlbeziehungen

Das Erkennen und das Anwenden von Zahlbeziehungen sind eng mit dem Verständnis von Zahlen und von Operationen verbunden (Padberg & Benz, 2021). Im Anfangsunterricht ermöglicht z. B. das Wissen, dass sich eine 7 in 5 + 2 sowie eine 8 in 5 + 3 zerlegen lassen, eine Lösung der Aufgabe 7 + 8 unter besonderer Nutzung der Bedeutung der Zahl 5, die sich wiederum in 2 + 3 zerlegen lässt. Wird dies gedanklich mit der Fünfer-Bündelung am Zwanzigerfeld verbunden, dann ist das Ergebnis am Zwanzigerfeld bereits sichtbar. Auch die Verdoppelung der 7 und dann noch 1 mehr würde eine Lösung erbringen, wie auch viele weitere individuelle Rechenwege, die jeweils auf anderen Zahlzerlegungen und Zahlbeziehungen aufbauen. Ähnliches gilt, wenn in Jahrgangsstufe 3 oder 4 eine Aufgabe wie 95 : 5 gelöst werden soll: Verbinden Schülerinnen und Schüler die 95 mit der vertrauten Fünfergruppierung am Hunderterfeld, so lässt sich vorteilhaft beschreiben, dass die 95 einmal die 5 weniger ist als 100, die aus insgesamt zwanzig Fünfern besteht. Eine alternative Zerlegung der 95 in 50 und 45, die sich mit Rückgriff auf das kleine Einmaleins im Kopf durch 5 teilen lassen, nutzt eine andere Zahlbeziehung zur Lösung der Aufgabe 95 : 5. Werden später Brüche verglichen, so dienen ebenfalls das Erkennen und Anwenden von Zahlbeziehungen der Orientierung und Lösungsfindung: Um $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$ zu vergleichen, kann z. B. auf einen Bruchstreifen zurückgegriffen werden. Darin lässt sich z. B. erarbeiten und allgemein beschreiben, woran man erkennt, dass eine Bruchzahl größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist: Ist der Zähler mehr oder weniger als das Doppelte des Nenners? Warum ist das so? Mit dieser Strategie (Reinhold & Reiss, 2020) werden dann auch Bruchvergleiche zwischen komplizierteren Brüchen wie $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{9}$ möglich, ohne aufwändige Berechnungen oder Rückgriff auf Bruchstreifen. Spätere Termumformungen, z. B. zum (geschickten) Lösen linearer oder quadratischer Gleichungen, nutzen ebenfalls das Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Rechenausdrücken. Diese entwickeln den beim Rechnen mit natürlichen und rationalen Zahlen geübten Blick für Strukturen von Zahlen und Eigenschaften von Operationen weiter. Generell basieren das Erkennen und das Anwenden von Zahlbeziehungen auf einer flexiblen, zielorientierten und kreativen Nutzung von Prozeduren und Strategien. In Verbindung mit tragfähigen Vorstellungen kennzeichnet und ermöglicht dies mathematisches Verständnis, das für vielseitige Problemlösungen in variablen Kontexten zur Verfügung steht.

Idee der Operation

Vorstellungen von Operationen und ihren Beziehungen

Viele der bisherigen Aussagen zur Idee der Zahl nehmen bereits Bezug auf die Idee der Operation, ganz im Sinne der Leitidee *Zahlen und Operationen*. So spielen Darstellungswechsel zum Aufbau tragfähiger Vorstellungen auch bei der Erarbeitung von Operationen (Padberg & Benz, 2021; Padberg & Wartha, 2017) für langfristig erfolgreiche und kumulative Lernprozesse eine zentrale Rolle. Abbildung 1 benennt die wichtigsten dynamischen (z. B. Wegnehmen für die Subtraktion) und statischen (z. B. Unterschied als weitere Bedeutung der Subtraktion) Vorstellungen zu Rechenoperationen. Eingeführt werden Operationen oftmals in dynamischen, alltagsnahen Kontexten, z. B. die Multiplikation als wiederholtes Hinzufügen: „Die Lehrerin geht viermal zum Pult und legt jedes Mal drei Blumen in die Mitte vom Sitzkreis.“ Das Ergebnis dieser (zeitlich-sukzessiven) Handlung, die viermal drei Blumen in der Mitte des Sitzkreises, stellt bei geeigneter Anordnung eine (räumlich-simultane) multiplikative Struktur dar. Die Notation der dazugehörigen Rechnung $4 \cdot 3$ lässt sich sowohl als wiederholte Addition oder als multiplikative Struktur interpretieren und ermöglicht so Mathematisierungen von vielfältigen Problemlösungen in unterschiedlichsten Kontexten, z. B. auch von multiplikativen Vergleichen: „Luisa hat 8 Sticker. Paula hat viermal so viele Sticker wie Luisa.“ Für das Verständnis von Rechenstrategien rücken oftmals die statischen Bedeutungen von Operationen, mit welchen Zahlbeziehungen interpretiert und genutzt werden können, ins Zentrum: “95 : 5 = ? In die 50 passt die 5 zehnmal, und in die 45 noch neunmal.“ Das entspricht der (eher statischen) Vorstellung des Aufteilens zur Division, wohingegen eine Einführung oftmals als (eher dynamisches) Verteilen stattfindet: 95 Murmeln werden an 5 Kinder verteilt. Ein Verständnis von Umkehroperationen ergänzt Vorstellungen zu Operationen und nutzt Beziehungen zwischen Rechenoperationen. So lässt sich 95 : 5 alternativ unter Rückgriff auf gekonnte Multiplikationsaufgaben lösen: “10 mal 5 ergibt 50, und dann noch 9 mal 5“. Wandelt man die Aufgabe zu Luisa und Paula leicht ab, wird sie deutlich schwieriger und erfordert ein Erkennen und Nutzen der Beziehung zwischen Multiplikation und Division in dieser neuen Situation: „Paula hat 8 Sticker. Paula hat viermal so viele Sticker wie Luisa.“

Das Potenzieren wird meist als Kurzschreibweise für eine fortgesetzte Multiplikation in einem (eher) dynamischen Kontext eingeführt. Für die Einführung des Potenzierens kann es sich anbieten (vgl. dazu die Reiskornaufgabe am Schachbrett oben), auf die den Schülerinnen und Schülern vertraute und anschauliche Operation des Verdoppelns zurückzugreifen: Die Länge eines Meterstabs wird verdoppelt, das Resultat nochmals verdoppelt usw. Dieser Kontext entwickelt zunächst Vorstellungen zum exponentiellen Wachstum in einem dynamischen Kontext des Potenzierens als wiederholte Multiplikation: „Wie lang ist der Stab nach 10, 20 oder 30 Verdoppelungen? Länger als bis zum Ende des Pausenhofs, bis zur Stadtgrenze, …? Wie oft müsste man verdoppeln, um zum Schwimmbad zu kommen? Schätzt, bevor ihr rechnet.“ Auch die vertraute Umkehroperation des Halbierens einer Länge lässt sich in diesen Kontext einbinden und formal notieren: 2^{10} ist die Kurzschreibweise für zehn Verdoppelungen der Länge 1, wahlweise als Prozess (Operator) oder als Ergebnis. Wenn das Ergebnis 2^{10} nachfolgend einmal halbiert wird, ergibt das nunmehr neun Verdoppelungen, also 2^9. In anderen Worten: Neunmal verdoppelt und einmal halbiert lässt sich als Multiplikation/Division mit $2^9 : 2$ oder $2^9 \ \frac{1}{2} = 2^8$ notieren, etc. Dies kann schließlich zu einer Interpretation von 2^0 als „nichts verändern / Länge bleibt bei 1“ fortgesetzt werden. Noch weiter fortgesetzt lässt sich 2^{-1} als einmal halbiert oder – gleichbedeutend mit $\frac{1}{2}$ – 2^{-2} als zweimal halbiert, etc. interpretieren. $2^7 \cdot 2^5$ repräsentiert derart insgesamt 7 + 5 Verdoppelungen, woraus sich allgemein $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ ergibt, etc. Indem auf diese Weise erarbeitete Zusammenhänge und Vorstellungen zu positiven und negativen Potenzen auf andere Basiszahlen übertragen werden, z. B. die 10, lassen sich auch die Stellenwerte von Dezimalbrüchen als positive und negative Zehnerpotenzen bzw. als Kurzschreibweise für $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc. notieren und verstehen. Verbunden damit stellen allgemein Multiplikationen mit b die Umkehroperation der Multiplikation mit b^{-1} dar oder umgekehrt. Als statische Kontexte des Potenzierens bieten sich bis zur Hochzahl 3 Flächen und

Volumina an, sofern Schülerinnen und Schüler über tragfähige Vorstellungen z. B. zum Messen von Flächen mittels Einheitsquadraten oder zum Messen von Volumina mittels Einheitswürfeln verfügen. Über umgekehrte Fragestellungen, bei denen zu einem gegebenen Quadrat oder Würfel die Seitenlänge gesucht wird, ergibt sich das Bedürfnis nach einer Bezeichnung für Wurzeln als Umkehroperation des Potenzierens.

In der Grundschule werden neue Zahlräume (bis 100, bis 1000, …) über neue Kontexte eingeführt, die das Verwenden von Zahlen und Operationen mit immer größer werdenden Zahlen erfordern. Auch Bruchzahlen und negative Zahlen lassen sich derart über neue Kontexte einführen und zu den natürlichen Zahlen in Beziehung setzen. Später bei der Einführung von (Quadrat-)Wurzeln, meist über die Umkehroperation des Potenzierens (Quadrierens), bietet es sich an zu fragen, ob sich z. B. auch $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen lässt. Beispielsweise der vielfach verwendete Widerspruchsbeweis von Euklid ermöglicht eine Verbindung zur langen Geschichte des Faches Mathematik, zur Struktur von Zahlbereichen und zur Welt der Logik.

Generell gilt, dass ein solides Verständnis von Operationen auf jeweils mehreren Vorstellungen zu jeder Operation aufbaut. Eine einzelne Vorstellung ist nicht ausreichend, um Operationen in vielfältigen mathematischen und außermathematischen Situationen sinnvoll interpretieren und anwenden zu können. Wird z. B. die Subtraktion ausschließlich als Wegnehmen thematisiert, so steht beim Rechnen mit ganzen Zahlen die Vorstellung zum Unterschied nicht zur Verfügung. Mit dieser ist jedoch ein Verständnis des Rechenterms 3 – (–4) oftmals einfacher zu vermitteln, z. B. durch die Interpretation als Unterschied zwischen 3 und –4 (Grad Celsius) auf dem Zahlenstrahl (Thermometer), als mit der dynamischen Vorstellung zur Subtraktion, wenn z. B. von 3 (Euro oder Guthaben) –4 (Euro bzw. 4 Euro Schulden) weggenommen werden sollen. Vorstellungen zu Operationen werden oftmals auch als *Grundvorstellungen* bezeichnet. Damit ist nicht gemeint, dass diese lediglich bei der anfänglichen Einführung von Operationen bedeutsam sind. Vielmehr legen sie eine solide Grundlage für das Weiterlernen in höheren Jahrgangsstufen und sind kontinuierlich in erweiterten Zahlbereichen auszubauen, zu vertiefen und zu vernetzen.

Vernetzung von Operationsvorstellungen mit Rechenregeln, Rechenstrategien und Algorithmen

Mathematisches Verständnis und Fähigkeiten zur Anwendung von Mathematik in vielfältigen Kontexten zeichnet sich somit durch die Vernetzung von Vorstellungen zu (Zahlen und) Operationen mit dem (a) Anwenden von Eigenschaften, Rechenregeln und Gesetzen, mit dem (b) Nutzen und Verstehen von Rechenstrategien und mit dem (c) Nutzen und Verstehen von Algorithmen zum Rechnen aus. Hierfür wurden bereits einige Beispiele gegeben. Als Beispiel nicht nur aus der Grundschule dient die vielfach bestehende Herausforderung, Effekte der Multiplikation und Division mit Zehnerzahlen zu verstehen. Diese ist eng verbunden mit dem Umrechnen zwischen Einheiten in der Leitidee *Größen und Messen*, und mit einem Verständnis von Zahlen und Operationen in größeren Zahlräumen bis hin zum Rechnen mit Dezimalzahlen. Experten (Lehrkräfte, ältere Schülerinnen und Schüler) orientieren sich hierbei oftmals an Regeln zum Weglassen und Hinzufügen von „Nullen“. Sie können dies optimalerweise reflektiert tun, da bei ihren Regeln mit tragfähigen Vorstellungen zu Zahlen und Operationen, vielfältigen Rechenstrategien und einem breiten mathematischen Erfahrungswissen verbunden sind. Eine vorschnelle Einführung solcher Regeln zum Weglassen und Hinzufügen von „Nullen“ in der Grund- und Sekundarstufe erweist sich im Unterricht jedoch langfristig oftmals als kontraproduktiv. Schülerinnen und Schüler erhalten dann in oberflächlicher Analogie zur Multiplikationsaufgabe $20 \cdot 40 = 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10$ auch bei einer Divisionsaufgabe wie 360 : 40 nicht selten das Ergebnis 900. Zur Reflexion, ob das Ergebnis stimmen kann, sind Regeln zum Anhängen und Streichen von „Nullen“ unbrauchbar und verbergen sogar den Blick auf grundlegende Bedeutungen der Multiplikation und Division mit Zehnerzahlen: Beim Multiplizieren mit 10 wird aus einem Einer ein Zehner oder aus einem

Hunderter ein Tausender. In der Stellenwerttabelle rutscht eine Ziffer damit nach links, was eine tragfähigere Interpretation darstellt als das Anhängen von „Nullen“. Bei der Division lässt sich der gegenteilige Effekt u. a. auch mit Rechengeschichten veranschaulichen: „Wenn ich 360 Sticker nicht an 40 Kinder verteile, sondern an 4 Kinder, denn erhält jedes Kind zehnmal so viel.“ Das lässt sich bildlich und rechnerisch darstellen, z. B. indem die Operation „: 40“ zerlegt wird in „erst : 4 und dann : 10“ oder andersherum. Derartige Untersuchungen, Entdeckungen und Diskussionen sind um einiges aufwändiger als eine Orientierung an vorschnellen Regeln, mittels derer Schülerinnen und Schüler Rechenaufgaben der aktuellen Lektion oftmals tatsächlich schnell und korrekt lösen können. Langfristig tragen solche vielfältigen und aufrichtigen Erarbeitungen zur Vernetzung von Vorstellungen, Regeln und Strategien jedoch zu einem vertieften und tragfähigen Verständnis von Zahlen und Operationen bei. Zudem befördern sie ein authentisches und sinnstiftendes Bild von Mathematik.

Die Bedeutung der Vernetzung von Vorstellungen zu (Zahlen und) Operationen mit dem (a) Anwenden von Eigenschaften, Rechenregeln und Gesetzen, mit dem (b) Nutzen und Verstehen von Rechenstrategien und mit dem (c) Nutzen und Verstehen von Algorithmen zum Rechnen zeigt sich z. B. auch in der Prozentrechnung: Als Veranschaulichung von Prozentaufgaben mit vermehrtem und vermindertem Grundwert eignen sich Prozentstreifen: Diese visualisieren Beziehungen zwischen Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz in unterschiedlich strukturierten Situationen. Prozentstreifen können Vorstellungen von Prozenten als Teil eines Ganzen, als gekürzte oder ungekürzte Bruchzahl, als Dezimalzahl oder als Prozentangabe unterstützen. Weitergehend verdeutlichen sie den Bezugswert einer Prozentangabe, ermöglichen es Zwischenschritte im Lösungsprozess kenntlich zu machen und bieten damit vielfältige Orientierungen. Wichtig im Unterricht ist auch hier wieder die Vernetzung mit anderen Darstellungsarten und Strategien zur Lösung von Prozentaufgaben mittels Dreisatztabellen, Tabellen und Formeln. Jede dieser Darstellungsarten hat spezifische Vorteile. Ein übergeordnetes Ziel wäre es, dass Schülerinnen und Schüler langfristig lernen, sich verschiedene Aufgabentypen zu Prozenten vorstellungsbasiert, z. B. auch mit Tabellen oder Prozentstreifen, zu erschließen. Auf dieser Grundlage identifizieren sie dann den Situationen und Aufgabentypen angemessene mathematische Modellierungen in Form von Rechenausdrücken und (umgestellten) Formeln und können nachfolgend ihre Ergebnisse auf Sinnhaftigkeit im gegebenen Kontext überprüfen.

Kompetenzerwerb: Inhaltliches Denken vor Kalkül

Bereits vor Schulbeginn nutzen Kinder Zahlen und Operationen in vielfältigen Kontexten. Sie verwenden beispielsweise Zahlen zum Zählen und haben Vorstellungen zur Größe von Mengen und Teilmengen. Schulisches Lernen schließt an diese Vorerfahrungen an und entwickelt das mit der zunehmend komplexeren Verwendung von Zahlen und Operationen verbundene mathematische Verständnis weiter (Padberg & Benz, 2021). Hierbei stehen das Ausführen von Prozeduren, z. B. das Verwenden von Abzählreimen oder von Formeln für Prozentwertaufgaben, in einer engen und sich gegenseitig beeinflussenden Beziehung zum Verständnis der zugrundeliegenden mathematischen Prinzipien (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Solche Prinzipien sind beispielsweise das ordinale Verständnis der Zahlwortreihe, das Verständnis eines Prozentwertes als Operator oder proportionale Zusammenhänge. Eine zu einseitige oder zu frühe Orientierung an Prozeduren, z. B. an unverstandenen Rechenregeln, Algorithmen oder Formeln insbesondere in den höheren Jahrgangsstufen der Grundschule und der Sekundarstufe, hat sich als nachteilig für einen langfristigen, kumulativen Kompetenzaufbau im Fach Mathematik erwiesen. Dies begründet die Forderung des didaktischen Prinzips *Inhaltliches Denken vor Kalkül* (Prediger, 2009): „Für nachhaltige Lernprozesse … ist das Verweilen im inhaltlichen Denken ebenso entscheidend wie die Aufrechterhaltung der Bezüge zum inhaltlichen Denken nach der Einführung des Kalküls.“ Mit inhaltlichem Denken ist ein Perspektivwechsel vom oftmals im Mathematikunterricht dominant anzutreffenden Tätigkeiten auf Kalkülebene („So rechnet man das …“) hin zu dahinter liegenden strukturellen Prinzipien von Zahlen und Operationen (z. B. beim Dreisatz, bei Prozentwertaufgaben oder bei Termumformungen …) verbunden.

Inhaltliches Denken beinhaltet eine Vernetzung von mathematischen Begriffen (z. B. Zahlen und Operationen) mit Vorstellungen zu Situationen. Dies kommt in der Idee der Grundvorstellungen (Vom Hofe, 2003) zum Ausdruck, z. B. wenn die Subtraktion als Unterschied zwischen Anzahlen und nicht nur als Wegnehmen verstanden wird. Dies ermöglicht eine tragfähige Vorstellung von der Subtraktion für das Lösen von Textaufgaben („Bert hat 8 Kekse. Er hat 3 Kekse mehr als Ernie. Wie viele Kekse hat Ernie?"), für das Interpretieren von Termen wie „3 – (–5) = ?" als Suche nach dem Unterschied zwischen 3 und -5, oder für eine Interpretation des Terms $x_2 - x_1$ als Seitenlänge in einem Steigungsdreieck, das hinter der Formel $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ steht.

Inhaltliches Denken beinhaltet zudem das Erkennen und Nutzen mathematischer Strukturen, z. B. von Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen. Dies kommt beispielsweise in flexiblen Rechenwegen zum Ausdruck, wenn die Aufgabe 9 · 13 vorteilhaft über die Zwischenaufgabe 10 · 13 gelöst wird, oder erkannt wird, dass 602 – 499 einfacher durch genaues Hinsehen als durch den nach seiner Einführung oftmals ausschließlich verwendeten schriftlichen Subtraktionsalgorithmus gelöst werden kann. Ebenso ist ein Vergleich der Brüche $\frac{10}{11}$ und $\frac{14}{13}$ über das gleichnamig Machen recht aufwändig. Die Verwendung einer Strategie für Bruchvergleiche, wie die Nutzung des hier geeigneten Vergleichswertes 1, macht die Aufgabe für diejenigen, die diese Zusammenhänge erkennen, sehr einfach (Reinhold & Reiss, 2020). Das Erkennen und Nutzen derartiger mathematischer Beziehungen baut auf tragfähigen Vorstellungen zu den mathematischen Begriffen auf, hier z. B. die Vorstellung eines Bruches als Anteil, oder die Vorstellung der Beschreibung eines Verhältnisses durch Zähler und Nenner: 10 ist kleiner als 11, aber 14 ist größer als 13. Gleichermaßen vertieft die Suche und die Nutzung solcher mathematischer Beziehungen die Vorstellungen und damit das Verständnis von mathematischen Begriffen, hier von Brüchen und Bruchvergleichen als Beispiele für Zahlen und Operationen.

Inhaltliches Denken zu quadratischen Termen kann, als weiteres Beispiel, sowohl eine Vernetzung mit Vorstellungen zu Situationen als auch das Erkennen und Nutzen mathematischer Strukturen beinhalten. Basierend auf Erfahrungen zur Multiplikation mit dem Malkreuz und zur Darstellung von Produkten am Flächenmodell lassen sich quadratische Terme als Beschreibungen von Flächen interpretieren und umgekehrt: Um in einem Term wie $(x + 3)^2$ die Klammern aufzulösen, eignet sich seine Darstellung auf Rechteckpapier. Dem Wert x wird eine beliebige (z. B. blaue) Streckenlänge zugewiesen, dem Wert 3 eine (z. B. rote) Strecke der Länge 3 Kästchen. Das zeichnerische Quadrat mit der Seitenlänge x + 3 beinhaltet die vier Teilflächen x^2, x · 3, 3 · x sowie 3 · 3, womit sich das Distributivgesetz in Anwendung auf diesen konkreten Term oder die erste Binomische Formel veranschaulichen lassen. Auch umgekehrt nutzen solche Modelle Flächen, um Summen oder Differenzen als Produkt zu schreiben: Zu den Termen $x^2 – 10x + 25$ oder $x^2 – 25$ lassen sich Quadrate und Rechtecke finden, welche die zweite und dritte Binomische Formel veranschaulichen bzw. zu den gesuchten Produkten führen. Zur Abgrenzung und Flexibilisierung bieten sich zwischendurch Terme ohne Quadrate an, wie ax + bx + 2x, oder andere Buchstaben wie $d^2 – e^2$. Ergänzend kann zu gegebenen Rechteckbildern gefragt werden, welcher Term passt, und woran man dies sieht.

Kalkül und inhaltliches Denken oder Prozeduren und Verständnis bedingen und beeinflussen sich gegenseitig und sollten daher im Mathematikunterricht in allen Klassenstufen in einem ausgewogenen Verhältnis und miteinander vernetzt als Lernziele sowie als mathematische Aktivitäten zum Tragen kommen.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Der Einsatz der vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien erfolgt durch die Lehrkräfte, die zeitlich und inhaltlich passend zu ihrer Unterrichtsplanung solche Themenbereiche auswählen, zu denen sie Informationen zum Leistungsstand der eigenen Klasse und Hinweise für auf die Ergebnisse abgestimmte Fördermöglichkeiten wünschen. Die Materialien zur Leitidee *Zahlen und Operationen* decken ein breites Spektrum von Lernzielen ab, gegliedert nach der Idee der Zahl und der Idee der Operationen und zugeordnet zu Niveaustufen.

Beim Einsatz der Diagnoseaufgaben geben zunächst die Lösungsquoten Hinweise auf die Leistungsverteilung in der Klasse und auf den Leistungsstand einzelner Schülerinnen und Schüler. Darüber hinaus bietet es sich an, wenigstens bei ausgewählten Schülerinnen und Schülern auch Lösungswege genauer zu betrachten. Damit lässt sich zum einen sicherstellen, ob z. B. ein falsches Ergebnis tatsächlich auf die mit der Aufgabe überprüfte (vgl. Aufgabenbeschreibung) fehlende Kompetenz zurückzuführen ist, oder ob möglicherweise weitere Fehlerquellen ausschlaggebend waren, die alternative oder ergänzende Fördermaßnahmen nahelegen würden (inkl. Lesefehler, Flüchtigkeitsfehler beim Rechnen etc.). Zum anderen ergeben Analysen von richtigen und falschen Lösungswegen Hinweise auf das Denken der Schülerinnen und Schüler. Das können oftmals detaillierte Hinweise darauf sein, was die Schülerinnen und Schüler bereits können und nicht können, worin die Schwierigkeiten liegen, teils auch auf bestehende Fehlvorstellungen oder worauf das weitere Lernen aufbauen kann. Solche vertiefenden Analysen von Lösungswegen können überraschende, spannende und unerwartete Antworten hervorbringen. Dies kann den Erfahrungshintergrund der Lehrkräfte erweitern, Anlass für Austausch zwischen Schülerinnen und Schülern mit ihrer Lehrkraft bieten und nicht zuletzt auch zu einem kontinuierlich erweiterten und vertieften Verständnis der Lehrkräfte vom Kompetenzaufbau beitragen.

Das LISUM-Modell (Abbildung 1) betont zentrale Ideen im Kompetenzaufbau und bei den Lernzielen zur Leitidee *Zahlen und Operationen*. Das Modell möchte damit die Bedeutung von tragfähigen Verstehensgrundlagen für einen längerfristig erfolgreichen Lernprozess von der Grundschule bis zur Sekundarschule unterstützen. Für die Grundschule werden die bereits bestehenden Diagnosematerialien der individuellen Lernstandsanalysen ILeA plus verwendet und auf die bestehenden begleitenden Unterlagen zur Durchführung und Erläuterung von ILeA plus verwiesen. Die im Handbuch zu ILeA plus bereitgestellten Förderideen zu jedem Förderinhalt wurden für dieses Fördermaterial in konkrete Aufgaben übersetzt und liegen als Aufgabensammlung vor. Für die Sekundarstufe wurden neue Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt. Diese stellen Beispiele und Anregungen dar, die von den Lehrkräften erweitert und ergänzt werden können. Die bereitgestellten Aufgaben bieten eine Orientierung und Anregung, worauf im Lernprozess und damit bei der Diagnose und Förderung zu achten ist. Aufgaben stehen im Zentrum eines jeden Mathematikunterrichts. Daher ist es sinnvoll, an dieser zentralen Gelenkstelle von Unterricht anzusetzen. Der konkrete Einsatz der Aufgaben erfolgt durch die Lehrkräfte in Passung zu ihrer persönlichen Unterrichtsgestaltung und abgestimmt auf die schulischen Rahmenbedingungen. Lernförderliche Aufgaben sind eingebettet in einen Unterricht, der den Schülerinnen und Schülern bestmöglich in differenzierenden Unterrichtssettings eine aktive Mitarbeit auf einem an das Vorwissen abgestimmten Niveau ermöglicht. Austausch über Lösungswege, Begründungen und Kooperationen unterstützen das individuelle Weiterlernen. Einer bedeutungshaltigen Verwendung von Sprache kommt im Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle zu, um Interpretationen von mathematischen Begriffen auszuhandeln, zu überprüfen, mit vielfältigen Beispielen und Darstellungen zu verknüpfen. Derart nutzen Schülerinnen und Schüler Mathematik für flexible, zielorientierte und kreative Problemlösungen in variablen inner- und außermathematischen Kontexten.

Literatur

Gaidoschik, M. (2014). Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten (1. Aufl.). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Gaidoschik, M. (2016). Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis (9. Auflage). Bergedorfer Förderdiagnostik. Hamburg: Persen.

Hurst, C., & Hurrell, D. (2014). Developing the Big Ideas of Number. International Journal of Educational Studies in: Mathematics, 1(2), 1–18. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/397449 (abgerufen am 06.09.2021)

Kilpatrick, J. (Ed.) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington D.C.: National Academy Press.

Lobato, J., Ellis, A., Charles, R., & Zbiek, R. (2010). Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8. Essential understanding series. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Padberg, F., & Benz, C. (2021). Didaktik der Arithmetik: Fundiert, vielseitig, praxisnah (5., überarb. Auflage 2021). Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin: Springer Berlin; Springer Spektrum.

Padberg, F., & Wartha, S. (Eds.) (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0 (abgerufen am 11.8.2021)

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül: Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), Beltz-Pädagogik. Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (pp. 213–234). Weinheim: Beltz. Retrieved from http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-Prediger_Beltz-Inhalt_vor_Kalkuel.pdf (abgerufen am 06.09.2021)

Reinhold, F., & Reiss, K. (2020). Anschauliche Wege zum Größenvergleich von Brüchen. Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis, 1(1), 1–33. Retrieved from https://zmfp.de/fileadmin/user_upload/veroeffentlichungen/ZMFP_2020_1_Reinhold_Reiss.pdf (abgerufen am 06.09.2021)

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93(2), 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik lehren. (118), 4-8. Hannover: Friedrich Verlag.