Darum geht es

Die Schwierigkeiten beim Mathematiklernen lassen sich häufig auf ein einseitig ausgebildetes Operationsverständnis zurückführen. Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten haben eine Operation oft nur als Symbol für einen Algorithmus und nicht als Handlung begriffen. Zwar müssen Rechenoperationen auch automatisiert werden, aber vor allem müssen sie verstanden und tragfähige Operationsvorstellungen entwickelt werden. Das Besprechen, Beschreiben und das flexible Interpretieren von Darstellungen sowie das Durchdringen von Sachkontexten fördern die Herausbildung tragfähiger Operationsvorstellungen. Wichtig ist das Verbalisieren möglichst verschiedener Vorstellungen zu den Operationen, um zu vermeiden, dass Lernende eine Operation nur als Algorithmus lernen, ohne die Operation zu verstehen. Sehr bedeutsam ist in diesem Zusammenhang die Herausbildung verschiedener Grundvorstellungen zu einer Operation. Einseitig ausgebildete Grundvorstellungen können zum Beispiel bei der Bearbeitung von Sachaufgaben zu Problemen führen, wenn dort auf andere Grundvorstellungen Bezug genommen wird.

Die Entwicklung von Operationsvorstellungen ist eng verbunden mit der Entwicklung des additiven und multiplikativen Denkens. Das multiplikative Denken ist entscheidend für die Entwicklung wichtiger mathematischer Vorstellungen, wie das algebraische Denken, das proportionale Denken, die Entwicklung von Vorstellungen über Verhältnisse und statistische Stichproben. Je länger das Bild von der Multiplikation als wiederholte Addition vorherrscht, desto schwieriger wird es für die Lernenden, Verhältnisse, Proportionen und algebraische Beziehungen zu verstehen.

Prozentsätze, Brüche und Dezimalzahlen müssen als das Verhältnis zwischen zwei Mengen verstanden werden. Um eine unendliche Anzahl von äquivalenten Brüchen zu erzeugen, kann jeder gegebene Prozentsatz als ein auf 100 basierendes Verhältnis interpretiert werden. Hierfür benötigen Lernende ein Verständnis der zugrundeliegenden multiplikativen Struktur.

Die Potenzschreibweise und das Umgehen mit Potenzen bereiten einigen Lernenden besondere Schwierigkeiten. Eine der wichtigsten Ursachen besteht offensichtlich darin, dass die Bedeutung der Potenz mit ihren einzelnen symbolhaften Elementen nicht verstanden wird und deshalb die Struktur eines Rechenausdrucks oder eines algebraischen Terms nicht erfasst werden kann. Eine grundlegende Vorstellung zur Potenzrechnung stellt das Verständnis als verkürzte Multiplikation dar. Es beinhaltet sowohl einen zeitlich-sukzessiven, dynamischen Aspekt (Prozess des Hintereinander-Ausführens von Multiplikationen) als auch einen arithmetischen Aspekt (Komprimierung großer Zahlen durch die Potenzschreibweise). Potenzen können aber auch räumlich als Dimensionen erfasst werden, als Flächeninhalt mit dem Exponenten 2 oder als Volumen mit dem Exponenten 3. In der Analysis finden Potenzen bei der Formulierung von Funktionstermen Anwendung, z. B. bei quadratischen Funktionen, Potenzfunktionen und bei Exponentialfunktionen. Das Verständnis für Potenzen spielt auch in der Kombinatorik eine wichtige Rolle, z. B. bei der Berechnung von Variationen mit Wiederholung.

Ein sicheres Verständnis von Umkehroperationen ist Voraussetzung für das Lösen von Gleichungen. Während das Umkehren von Addition und Multiplikation zumeist problemlos gelingt, tauchen oft Unsicherheiten beim Lösen von Aufgaben wie z. B. $12 - x = 15$ oder $\frac{3}{x} = 9$ auf. Auch die Umkehrung des Potenzierens bereitet einigen Lernenden Schwierigkeiten. Für Aufgaben wie z. B. $x^2 = 12$ wird mitunter eine falsche Umkehrung (geteilt durch 2) gewählt. Diese Unsicherheiten wirken sich dann im weiteren Lernverlauf sowohl in der Analysis als auch in der Geometrie (z. B. Satz des Pythagoras) aus.

Das Verständnis von und der sichere Umgang mit Rechengesetzen spielt eine bedeutende Rolle bei der Bewältigung von Aufgaben der Algebra, sowohl beim Zusammenfassen von Termen als auch beim Lösen von Gleichungen. Zum Beispiel basiert die Reihenfolge von Umformschritten auf den Vorrangregeln beim Rechnen, das Zusammenfassen des Terms $2x^2 \cdot 3x$ basiert auf dem Assoziativgesetz, das Zusammenfassen des Terms $2x^2 + 3x^2$ basiert auf dem Distributivgesetz und die Unsicherheit beim Lösen der Gleichung $\frac{3}{x} = 9$ liegt mitunter an einer falschen Übertragung von Kommutativität auf diese Rechensituation.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0