Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

„Man muß jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen' ‚Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können."

Diese zugespitzte Beschreibung des axiomatischen Aufbaus der Geometrie stammt von David Hilbert, der sie laut seinem Schüler und Biografen Otto Blumenthal in einer Diskussion mit anderen Geometern in einem Berliner Wartesaal getätigt hat. Hilbert verursachte vor über 100 Jahren mit den „Grundlagen der Geometrie" einen Umbruch in der mathematischen Sichtweise auf Geometrie: Anstatt, wie Euklid, die Objekte der Geometrie – also Punkte, Geraden, Ebenen – inhaltlich zu beschreiben, beschränkte er sich auf die Schaffung eines Axiomensystems, also einer Beschreibung, wie Objekte sich zueinander verhalten müssen, um als „Geometrie" zu gelten. Mit dem oben angeführten Ausspruch drückte er aus, dass „das *anschauliche* Substrat der geometrischen Grundbegriffe mathematisch belanglos sei und nur ihre Verknüpfung durch die Axiome in Betracht komme" (Blumenthal, 1935, S. 402).

Die Geometrie, die in der Schule unterrichtet wird, ist weit entfernt von einer solchen Sichtweise. Gerade die Anschauung ist ein notwendiges didaktisches Element des Unterrichts. Zudem muss es möglich sein, die reale Welt mithilfe der Geometrie zu beschreiben und mathematische Modelle der Realität zu erstellen, die diese logisch und rechnerisch zugänglich machen. Insofern beschreibt Hilbert zwar die mathematische Seite der Geometrie korrekt, doch diese genügt nicht, um alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu fördern, die notwendig für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht sind. Als Lehrkraft muss es also sowohl gelingen, den Schülerinnen und Schülern die Kompetenzen zu vermitteln, sich in der (abstrakten) Welt der Geometrie zurecht zu finden, als auch ihnen den Weg von realen Problemen und Gegebenheiten in die mathematische Geometrie und zurück zu weisen.

Die Leitidee *Raum und Form* befasst sich mit all jenen Objekten, die in drei oder zwei Dimensionen beschrieben werden sollen. Dabei bietet sich die Chance, nicht nur zu beschreiben oder Probleme zu lösen, sondern auch und besonders zu kreativem Tun. Kunst und Mathematik liegen in dieser Leitidee nah beieinander und können sich gegenseitig unterstützen. Die Darstellung mathematischer Zusammenhänge in Figuren oder mit Körpern kann dabei helfen, mathematische Intuition zu erwerben. Und nicht zuletzt bietet der Umgang mit grafischen oder räumlichen Darstellungen eine Chance, ästhetische Elemente der Mathematik in den Unterricht einzubinden. Mathematik kann nicht nur Spaß machen, sondern sogar *schön* sein!

In diesem Themengebiet liegt auch ein Ursprung für einen modernen Zweig des Mathematikunterrichts. Neben Tabellenkalkulation, CAS und Funktionsplotter sind Dynamische Geometriesysteme (DGS) seit Anfang der 1990er Jahre eine tragende Säule für den Einsatz neuer Medien (oder *digitaler Werkzeuge*) im Mathematikunterricht. Dies ist eine Besonderheit: In kaum einem Fach gibt es so spezifische Software, die für einen didaktisch wertvollen Einsatz konzipiert ist. Dabei entfaltet sich die wahre Stärke von DGS, wenn sie nicht nur als Demonstrationsobjekt, sondern in der Hand der Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Explorieren, Darstellen und Problemlösen verwendet werden. Dabei spielen wichtige traditionelle Elemente des Geometrieunterrichts immer noch eine tragende Rolle: Ohne Koordinatisierung keine Modellierung.

Diese Vielfalt auf der weiten inhaltlichen Skala zwischen Logik und Argumentation sowie Darstellung und Intuition, aber auch auf der methodischen Skala zwischen Skizze und Knetgummi sowie DGS und Virtual Reality (VR) bietet viele Chancen, ist aber auch herausfordernd für die Gestaltung von Unterricht. Eine wichtige pädagogische Grundhaltung möchten wir daher betonen: Geometrie – oder *Raum und Form* – kann und soll Freude bereiten und damit einen weiteren Zugang zur Mathematik für diejenigen öffnen, die diesen bisher nicht hatten oder ihn verloren haben.

Das vorliegende Material soll dabei helfen, den Erwerb der notwendigen Kompetenzen im Bereich *Raum und Form* zu unterstützen und Grundvorstellungen in vielfältigen Gebieten aufzubauen und miteinander zu verknüpfen.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose zielgerichtet und zum passenden Zeitpunkt einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen sowie Fehlvorstellungen und die Entstehung von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher produktorientierten und einer eher prozessorientierten Diagnostik unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zur produktorientierten Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bewertet bzw. festgestellt, ob die Lernenden etwas „können“ oder „nicht können“. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Andererseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrunde liegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. Diagnostische Interviews stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der im direkten Gespräch Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen in Erfahrung gebracht werden können. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten ab. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten und einer eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik *Raum und Form* entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung aus produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Nach erfolgter Diagnose sollen die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anknüpfen. Die Förderaufgaben sind im *Dialog* zwischen der Lehrkraft und den Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen möglich. Dabei bietet sich auch die Möglichkeit der Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützt. In diesen Situationen wird der Lehrkraft ein erneuter Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse ermöglicht sowie den Schülerinnen und Schülern die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst gemacht. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Raum und Form – Das didaktische Potenzial des Geometrieunterrichts

„Aus historischer Sicht ist die Geometrie die Mutter der Mathematik" (Blanck & Eichler, 1996, S. 35), da sie das älteste mathematische Teilgebiet ist. Viele Jahrhunderte lang war Mathematik im Wesentlichen gleichbedeutend mit Geometrie. Dabei diente sie als reine Naturwissenschaft zunächst praktischen Bedürfnissen wie Landvermessung, Tempelbauten oder der Anlage von Verteidigungssystemen. Bedenkt man, dass es um den Ruf der Geometrie in der Schule nicht besonders gut bestellt ist (Krauthausen, 2018; Kuzle, 2022; Rasch & Sitter, 2016), da dem Geometrieunterricht eine Randposition sowohl im Curriculum als auch im Mathematikunterricht zukommt (Hofbauer, 2018; Wittmann, 1999), ist dies eine zugleich spannende und unbefriedigende Erkenntnis. Die Geometrie im Mathematikunterricht kann viele, von zahlreichen Autorinnen und Autoren benannte Funktionen erfüllen. Wir können an dieser Stelle nicht alle nennen, möchten im Folgenden aber dennoch einen groben Überblick geben.

Franke und Reinhold (2016) nennen die Förderung der elementaren geistigen und räumlich-visuellen Fähigkeiten durch die Auseinandersetzung mit Geometrie. Verschiedene Handlungen, Beobachtungen und Gespräche zu diesen Erfahrungen regen das Denken an und fördern es (Krauthausen, 2018; Radatz & Schipper, 1983). Dadurch entwickelt sich auch die Raumvorstellung weiter. Ohne diese wäre schulisches Lernen nicht möglich, da wir in einer räumlich wahrzunehmenden Welt leben und weil die Raumvorstellung in enger Verbindung zur Intelligenz steht (Feskorn & Bohlmann, 2020; Franke, 2007; Franke & Reinhold, 2016). Weitere Gründe sind nach Wittmann (1999) die Notwendigkeit von Geometrie für naturwissenschaftliche und künstlerische Berufe sowie der gewinnbringende Einsatz von heuristischen Strategien auch für andere Themengebiete. Der Geometrieunterricht bietet sich damit besonders gut für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen an (Kuzle & Bruder, 2016). Dazu gehören unter anderem das Lösen von Problemen mit Struktur und Systematik (Holland, 2007; Kuzle & Bruder, 2016; Radatz et al., 1996), das Begründen, Beweisen und Argumentieren (Holland, 2007) und das Entwickeln der Kommunikationskompetenz. Das mathematische Problemlösen und Argumentieren sehen Weigand et al. (2014) als ein zentrales Ziel des Geometrieunterrichts an. Grundsätzlich sollen Aktivitäten mit geometrischem Charakter dafür sorgen, dass Freude am entdeckenden und problem-orientierten Arbeiten geweckt wird, außerdem bieten sie zahlreiche Gelegenheiten, um Argumentations- und Gesprächsanlässe zu fördern (Franke, 2007).

Ein weiterer gewichtiger Grund für den Geometrieunterricht ist seine Handlungsorientierung, die „Spaß an der Mathematik und Bereitschaft zum selbstständigen Lösen von Problemen" (Radatz & Schipper, 1983) fördern kann. Hinzu kommt, dass auch Schülerinnen und Schüler, die sonst in Mathematik nicht so stark sind, in der Geometrie häufig wieder Anschluss finden (Radatz & Schipper, 1983). Trotz verschiedener Leistungsniveaus und zunehmender Heterogenität der Klassen kann jeder im Geometrieunterricht Erfolge durch die guten Differenzierungsmöglichkeiten von Geometrieaufgaben erzielen (Bauersfeld, 1993). Dies kann wiederum zu einer positiveren Haltung zum Mathematikunterricht führen (Klunter & Raudies, 2006). Des Weiteren leistet der Geometrieunterricht einen Beitrag zur Lebensweltererschließung (Eichler, 2005; Franke, 2007; Radatz & Schipper, 1983; Schipper et al., 2017), da unsere Umwelt durch geometrische Strukturen geprägt ist und deren Durchdringung ein gewisses Maß an Anleitung bedarf (Radatz & Rickmeyer, 1991). Neben den oben benannten Aspekten bietet der Geometrieunterricht auch für das inhaltliche Verständnis der Themen aus Arithmetik und Analysis eine wichtige Grundlage. Demnach sollen geometrische Aktivitäten dazu beitragen, dass Begriffsbildungsprozesse unterstützt werden (Franke, 2007). Wittmann (1999) ist davon überzeugt, dass ein Verständnis für Grundbegriffe aus diesen Bereichen ohne Geometrie nicht möglich ist. Zudem eignen sich geometrische Inhalte oftmals für fächerübergreifenden Unterricht, z. B. mit dem Sach- und Kunstunterricht, der zur Einführung oder zur Festigung der neuen bzw. bereits gelernten Aspekte dient.

Diese Liste der Ziele und Funktionen des Geometrieunterrichts ist noch lange nicht vollständig. Vielmehr soll diese klar beleuchten, wie der Geometrieunterricht entscheidend zu der Entwicklung der intellektuellen Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern beiträgt (Wittmann, 1999), da das Denken von geometrischen Vorstellungen geprägt ist. Letztlich werden durch die Geometrie auch grundlegende geistige Fähigkeiten wie das Ordnen und Klassifizieren gefördert (Franke, 2007).

Für die unterrichtliche Behandlung von *Raum und Form* ist nicht nur in der Primarstufe der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

a. sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

b. den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

c. die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen.

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Einige der oben benannten Ziele und Funktionen des Geometrieunterrichts sind auch explizit im Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg (MBJS, 2015) zu finden, wie etwa die Orientierung im Raum und in der Ebene, um „Erfahrungen zu Eigenschaften von geometrischen Objekten, Prozessen und Beziehungen“ (MBJS, S. 9) zu sammeln. Um „die Fähigkeit [zu] entwickeln, sich geometrische Objekte vorzustellen und mit ihnen in der Vorstellung zu operieren“ (MBJS, S. 9), sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit der Analyse ebener Figuren und Körper, ihrer Klassifikation und ihrer Darstellung durch Skizzen, Konstruktionen, Netze, Schrägbilder oder Modelle auseinandersetzen. Dabei werden durch „die Darstellung geometrischer Situationen mithilfe von Koordinaten geometrische Probleme der analytischen Bearbeitung zugänglich“ (MBJS, S. 9). Auch die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen wird im Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg (MBJS, 2015) angesprochen, indem Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte beschrieben und Gesetzmäßigkeiten begründet werden sollen, um sie in Sachzusammenhängen nutzen zu können.

Die Behandlung vieler geometrischer Themen im Rahmenlehrplan basiert auf dem Spiralprinzip (Bruner, 1973). Die Bearbeitung vieler Grundschulinhalte soll bereits auf die Sekundarstufengeometrie vorbereiten. Dies ist besonders wichtig, da sich geometrische Fähigkeiten in der Grundschulzeit entscheidend entwickeln (Krauthausen, 2018). Leider wird der Geometrieunterricht heutzutage oft vernachlässigt (Backe-Neuwald, 2000; Kuzle, 2022). Die am häufigsten dafür genannten Gründe sind mangelnde Zeit und ein nicht hierarchisch aufgebauter Lehrgang (Kuzle & Glasnović Gracin, 2020; Kuzle, 2022). So wird der Geometrie-Lehrgang häufig aufgrund mangelnder Kohärenz der geometrischen Ideen, der Terminologie, der pädagogischen Ansätze und der Aktivitäten in den verschiedenen Klassenstufen kritisiert (z. B. Franke & Reinhold, 2016; Mammana & Villani, 1998; Van de Walle & Lovin, 2006).

Da sich das „geometrische Denken“ als Grundlage der Mathematik durch die gesamte Schullaufbahn zieht, ist der Aufbau eines Verständnisses im oben genannten Sinne eine komplexe Aufgabe. Um diese zu strukturieren, eignen sich *zentrale Ideen*, *Grundideen* oder *fundamentale Ideen* (der Geometrie). Wenngleich diese Konstrukte weder im Allgemeinen noch in der Mathematikdidaktik neu sind, wurden diese im Geometriebereich erst in den 80er- und 90er-Jahren konkretisiert und sind kaum im schulischen Kontext verbreitet. Einige Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker haben diese Konstrukte für den Geometrieunterricht konkretisiert (u. a. Bender, 1983; Kuzle & Glasnović Gracin, 2020; Wittmann, 1999). Gerade das Modell von Bender (1983) hebt die besonderen Charakteristika der Geometrie als mathematische Disziplin hervor. Er nennt in seinem Modell der zentralen Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I vier Eigenschaften der Geometrie, die begründen, warum alle Menschen in der obligatorischen Schulzeit Geometrieunterricht erhalten sollten:

1. „Geometrie zur Strukturierung der räumlichen Umwelt und zur Erforschung der praktischen Nutzbarkeit dieser Struktur (dabei: Zwecke und Zweckmäßigkeit von Formen, Her- und Darstellen in weitem Sinn, Lösen von Problemen aller Art, Aufbau eines Begriffssystems),
2. Geometrie als Kulturgut und Bildungsinhalt (Prototyp einer Wissenschaft, universelle Rolle im Denken),
3. Geometrie zum Training geistiger Fähigkeiten (Raumanschauung, Argumentationsfähigkeit, Kreativität, Geometrisierung (Idealisierung)),
4. Geometrie zur Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen (Ästhetik von Formen und Ordnungen; eigenes Tun, Herstellung von ‚Produkten‘; Erfahrung oder Kraft des eigenen Verstands und der Autonomie des Denkens)“ (S. 9).

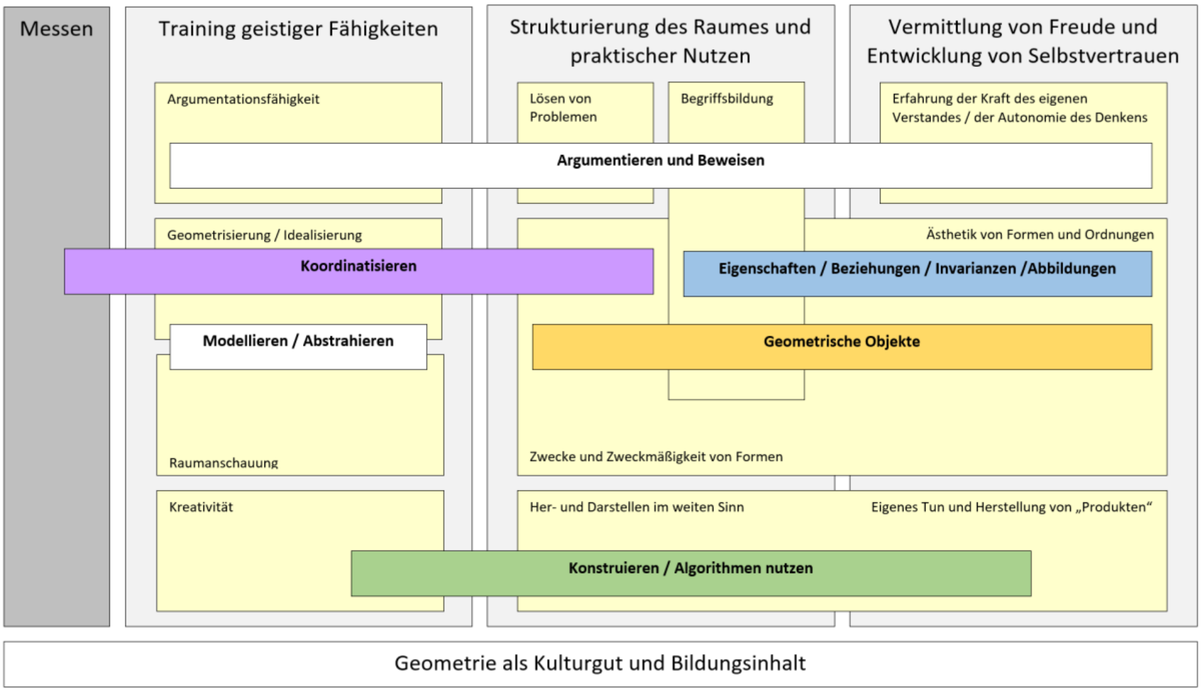

Abbildung 1: Konzeptbild zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich *Raum und Form*

Auf diesen Überlegungen aufbauend hat das LISUM ein Modell entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich *Raum und Form* zu strukturieren und konkretisieren (siehe Abbildung 1). Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge oder die strikte Trennung von Unterrichtsinhalten, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte über individuelle Fördermaßnahmen. Dabei ist es notwendig, Zusammenhänge zwischen den tragenden Ideen herzustellen und sie miteinander zu verknüpfen, was auch aus der Abbildung 1 zu entnehmen ist. Das Modell möchte damit die Bedeutung von tragfähigen Verstehensgrundlagen für einen längerfristig erfolgreichen Lernprozess im Bereich *Raum und Form* von der Grundschule bis zur Sekundarschule unterstützen. Im Modell stehen die vier oben genannten Aspekte im Vordergrund: Training geistiger Fähigkeiten, Strukturierung des Raums und praktischer Nutzen, Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen sowie Geometrie als Kulturgut. Zusätzlich wird die Leitidee *Messen* in das Modell einbezogen, da diese die Grundlage für die Verknüpfung von Raum und Form mit rechnerischen Zugängen, aber auch für Koordinatisierungen darstellt. Gemeinsam bilden *Raum und Form* und *Messen* die Grundlage für das mathematische Fachgebiet der Geometrie. Zur gezielten Förderung der Kompetenzen der Leitidee *Größen und Messen* werden die entsprechenden Materialien des LISUM zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht empfohlen.

Die zentrale Idee *Training geistiger Fähigkeiten* mit ihren Komponenten Argumentationsfähigkeit, Geometrisierung / Idealisierung, Raumanschauung und Kreativität bildet die erste Säule des Modells. In der zweiten Säule wird die zentrale Idee *Strukturierung des Raums und praktischer Nutzen* dargestellt. Diese umfasst das Lösen von Problemen, die Begriffsbildung, sowie Zwecke und Zweckmäßigkeit von Formen und Her- und Darstellen im weiten Sinn. Die dritte Säule zur zentralen Idee *Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen* besteht aus den Komponenten Erfahrungen der Kraft des eigenen Verstandes und der Autonomie des Denkens, Ästhetik von Formen und Ordnungen sowie eigenes Tun und Herstellung von „Produkten“. Da die Ästhetik und die Zweckmäßigkeit von Formen sowie das Her- und Darstellen im weiten Sinn und von Produkten nicht immer gut zu trennen sind, wurden diese als zwei säulenübergreifende gemeinsame Blöcke dargestellt.

Die Idee der Geometrie als *Kulturgut und Bildungsinhalt* bildet die Basis des Modells, auf der die oben genannten Säulen aufbauen.

Die starke Vernetzung all dieser Inhalte wird durch Querschnittsthemen deutlich, die sich über mehrere Blöcke erstrecken und so diese miteinander verknüpfen. Das **Argumentieren und Beweisen** und das **Konstruieren / Algorithmen nutzen** verbinden alle drei Säulen miteinander, **Geometrische Objekte** und ihre **Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen** verbinden Begriffsbildung und Formenlehre in Säule 2 und 3; der wichtige Bereich des **Koordinatisierens** schlägt eine Brücke zwischen Messen und Strukturierung des Raumes samt praktischem Nutzen der Geometrie über das Training geistiger Fähigkeiten. Schließlich ist noch das **Modellieren und Abstrahieren** zu nennen, welches insbesondere die konkrete Raumanschauung mit der geometrischen Idealisierung verknüpft.

Im Folgenden gehen wir auf einige Teilbereiche detailliert ein.

Training geistiger Fähigkeiten

Franke und Reinhold (2016) und Winter (2016) sehen vielseitige Möglichkeiten und großes Potential darin, Schülerinnen und Schülern bereits in den ersten Grundschuljahren mittels geometrischer Lernumgebungen an das entdeckende Lernen heranzuführen, und somit die *Argumentationsfähigkeiten* zu fördern. Hierzu wird davon ausgegangen, dass Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und das Üben von Problemlösefähigkeiten weniger durch Informationen von außen generiert werden, sondern durch eigenes aktives Handeln und die Verknüpfung neuer Informationen mit bereits vorhandenen kognitiven Strukturen. Dieses selbstständige Handeln kann durch äußere Impulse angeregt werden, indem die Lehrkraft als Lernbegleitung fungiert, welche sich der Begrenztheit der didaktischen Einflussnahme bewusst ist, jedoch zum Beobachten, Erkunden und Probieren anhält und intuitives Handeln fördert (Winter, 2016). Dabei ist es wichtig, der Eigendynamik von Lernprozessen Raum zu lassen und Fehler gemeinsam mit den Lernenden zu analysieren, um das Verstehen und Anwenden von heuristischen Strategien in den Fokus rücken zu lassen. Zudem betont Winter (2016), dass entdeckendes Lernen zu intellektuellen und emotionalen Identifikationen, zu Erfolgserlebnissen, Teilerfolgserlebnissen, Misserfolgserlebnissen sowie zu Erlebnissen mit seinem eigenen Verstand führt und so die Lernenden in besonderer Weise motiviert. Dabei geht er davon aus, dass jeder Mensch neugierig und wissbegierig ist und im entdeckenden Lernen eine Möglichkeit gegeben ist, selbst zum Erforschen von neuen Aufgaben und Problemfeldern angeregt zu werden. Der Geometrieunterricht bietet viele Möglichkeiten, genau dieses entdeckende Lernen zu praktizieren.

Mit *Raumanschauung* ist die Auffassung räumlicher Verhältnisse gemeint. Räumliche Fähigkeiten sind dabei ein recht globales Konstrukt. Deswegen ist es nicht erstaunlich, dass selbst unter Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern bisher kein Konsens bezüglich einer einheitlichen Definition gefunden werden konnte. Nach Franke (2007) umfassen räumliche Fähigkeiten zum einen die Aspekte der visuellen Wahrnehmung, welche durch die Aufnahme von visuellen und taktilen Reizen gekennzeichnet sind, zum zweiten das räumliche Vorstellungsvermögen und zum dritten das räumliche Denken. Dabei ist jede Komponente des Oberbegriffs „räumliche Fähigkeit“ sehr komplex und wird deshalb in der Regel über mehrere Teilkomponenten beschrieben. Die Teilkomponenten der visuellen Wahrnehmung sind folgende: Figur-Grund-Unterscheidung, visuomotorische Koordination, Wahrnehmungskonstanz, räumliche Orientierung („Wahrnehmung von Beziehungen & Raumlage“) und visuelles Gedächtnis. Visuelle Wahrnehmung ist dabei eine Voraussetzung für das räumliche Vorstellungsvermögen. Während bei der visuellen Wahrnehmung Informationen aus der Umwelt aufgenommen und verarbeitet werden, geht die Raumvorstellung über den Informationsverarbeitungsprozess und über die bloße Raumwahrnehmung hinaus.

Räumliches Vorstellungsvermögen bezieht sich stärker darauf, neuartige Vorstellungen räumlicher Phänomene generieren zu können. Diese können unabhängig von den vorhandenen erfahrbaren Bildern oder Modellen sein (Franke & Reinhold, 2016). Räumliches Vorstellungsvermögen ist die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken, sich im dreidimensionalen Raum zu orientieren oder mit räumlichen Begebenheiten gedanklich zu operieren. Dies umfasst auch die aktive Umordnung von im Gedächtnis gespeicherten Vorstellungsbildern und die Fähigkeit, in der Vorstellung aus vorhandenen Bildern neue zu entwickeln (Weigand et al., 2014). Dies ist zum einen von großer lebenspraktischer Bedeutung, wird aber auch als ein maßgeblicher Indikator von Intelligenz angesehen (Franke & Reinhold, 2016). Schon sehr früh bewegen sich Kinder im Raum, erfassen diesen und machen so ganz selbstverständlich erste geometrische Erfahrungen (Freudenthal, 1973). Laut Franke und Reinhold (2016) sollte die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens zu den Hauptzielen des Geometrieunterrichts gehören. Die Teilkomponenten sind folgende: Veranschaulichung, mentale Rotation, räumliche Beziehungen und räumliche Orientierung. Räumliches Denken, ab der Sekundarstufe I relevant, ist die Fähigkeit, mit räumlichen Vorstellungsinhalten beweglich umgehen zu können.

Bei der unterrichtlichen Behandlung des Themas sind folgende Aspekte zu beachten: „Welche *Teilkomponente der Raumvorstellung* soll in erster Linie gefördert werden?“, „Welche *Aufgabenstellungen* sind dafür geeignet?“ (dazu gehört das Erfinden weiterer Angebote für *alle* Kinder, also auch leistungsschwächere Kinder, besonders schnelle und interessierte Kinder) und „Welche *Lösungsstrategien* sollen im Gespräch in den Vordergrund gerückt werden?“ („Kompetent ist das Kind, wenn es Raumvorstellungsfähigkeiten erworben hat und für die Bewältigung von Raumvorstellungsaufgaben geeignete Strategien kennt und diese flexibel einsetzen kann“ (Häring, 2015, S. 43).) Gespräche müssen dabei angeregt und kultiviert werden! Hierzu sind Geduld und Zeit wichtig, da der Erwerb nicht rasch erreicht werden kann. Darüber hinaus muss die Zeit für praktisch-gegenständliche Tätigkeiten, Probieren, Irren usw. eingeräumt werden. Zuletzt ist die Behandlung vorbereitungsintensiv, nicht zuletzt, um passende Aufgaben zu finden (siehe oben).

Zur Förderung des räumlichen Denkens sind vielfältige geometrische Grunderfahrungen anzuregen: durch grundlegende Handlungserfahrungen wie Experimentieren mit Material, durch taktile Erfahrungen (Tastsinn „Begreifen"), und durch kopfgeometrische Aktivitäten, die insbesondere ein exaktes Wahrnehmen, Betrachten, Erkennen von Perspektiven sowie Fähigkeiten im widerspruchsfreien Beschreiben, Erklären und Verwenden von Fachsprache fördern können. Laut Piaget basiert das Denken auf verinnerlichten Handlungen. Empirische Untersuchungen belegen: Der handlungsorientierte und experimentelle Einsatz von Modellen ist für die Entwicklung der Raumvorstellung im Geometrieunterricht äußerst wichtig, um Erfahrungen durch verbale und taktile Aktivitäten zu sammeln und zu reflektieren. Durch sinnliche Wahrnehmungen entstehen Vorstellungsbilder, die auch ohne das Vorhandensein der realen Objekte verfügbar sind und gedanklich verändert werden können. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch operative Aktivitäten auf niedrigerer Stufe (z. B. Arbeiten mit konkreten Materialien, Anfertigen von Zeichnungen) ausreichend Gelegenheiten zur Ausbildung und Stärkung ihrer räumlichen Vorstellungen bekommen. Bei Vorstellungsproblemen sollte auf die handelnde Ebene mit Materialen zurückgegriffen werden.

Wenn Aufgaben den Schülerinnen und Schülern schwerfallen, können folgende methodischen Hinweise hilfreich sein: Abstufung des Schwierigkeitsrades (z. B. bei Faltaufgaben zunächst nur einmal falten), Kontrollfragen der Lehrkraft (z. B. „Wie viel Schichten Papier liegen nach dem Falten übereinander?", „Wo befinden sich beim zusammengefalteten Papier die Faltachsen?", „Wo sind die Ränder des aufgefalteten Blattes?", „Wie würde das aufgefaltete Blatt aussehen, wenn man nach dem Falten nur die Ecken abgeschnitten hätte?") und Konkretisieren von Vorstellungen (beim vorgestellten Operieren die Augen schließen, kinästhetisch arbeiten, z. B. ein imaginäres Blatt mit den Händen falten).

Der Bereich der *Kreativität* ist gerade in der Geometrie besonders ergiebig. Im Bereich der geometrischen Kreativität (als Spezialgebiet mathematischer Kreativität und basierend auf den Ergebnissen der viel allgemeineren und umfangreichen Kreativitätsforschung) können vier Komponenten identifiziert werden (El Demerdash, 2010): Die Fähigkeit, schnell **viele** Ideen zu produzieren (*fluency),* die Fähigkeit, **wesentlich verschiedene** Ideen zu produzieren (*flexibility*), die Fähigkeit, **originelle** Ideen zu produzieren (**originality)** und die Fähigkeit, Ideen auszuführen, zu variieren, umzuformulieren, zu kombinieren, etc. (**elaboration)**. Diese Fähigkeiten können gut im Geometrieunterricht trainiert werden, da geometrische Aufgaben oft viele verschiedene Lösungswege und Herangehensweisen zulassen. Ein Beispiel ist die Bestimmung des Flächeninhalts einer komplexeren Form (oder analog des Rauminhalts eines Körpers): Diese kann durch Zerlegen in bekannte Formen, durch das Ergänzen mit bekannten Formen zu einfacheren Formen, oder durch andere Techniken wie Scherungen umgewandelt werden. Dabei gibt es für jede dieser Techniken wiederum viele verschiedene Wege und Ansätze. Ein weiteres Beispiel ist die Herstellung von Mustern wie Bandornamenten. Hier ist keine „Lösung" im eigentlichen Sinne gesucht, sondern regelbasiert zusammengesetzte Formen, die dann miteinander verglichen werden können. Diese kreative Tätigkeit hilft dabei, in späteren Problemlöseprozessen vielfältige Lösungsansätze zu generieren.

Strukturierung des Raums und praktischer Nutzen

Das kreative **Problemlösen**, der spielerische Umgang mit mathematischen Gegenständen sowie die Fähigkeit zu abstrahieren, das kausale und logische Denken und das kritische Urteilsvermögen sieht Graumann (2009) als essenzielle Bestandteile eines guten Mathematikunterrichts. Des Weiteren bietet das Problemlösen das Potential zur Förderung der Fähigkeiten zu argumentieren und über Lösungswege zu reflektieren (Graumann, 2009). Problemlösen ist die Fähigkeit, eine Aufgabe bearbeiten zu können, obwohl kein bekannter Lösungsweg vorliegt. Stattdessen müssen mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten eingesetzt werden, um Lösungsstrategien zu entwickeln. Dafür müssen die Kinder Zusammenhänge erkennen und die bekannten Lösungswege auf ähnliche Anforderungen übertragen (Franke & Reinhold, 2016). Krauthausen (2018) sieht eine große Chance in der spielerischen Lösung von mathematischen Problemen. Durch die offene Gestaltung des Aufgabenformats wird der Druck zur schnellen Lösung der Aufgabe reduziert und durch die Aufforderung des Ausprobierens können für die Schülerinnen und Schüler bedeutende Lernerfahrungen entstehen, die sich positiv auf die Motivation auswirken (Krauthausen, 2018). Die Geometrie bietet ein reichhaltiges Aufgabenfeld, um Problemlösestrategien zu erproben und anzuwenden. Sie bietet mehr als andere Felder der Mathematik einen Lebensweltbezug und viele praktische Anwendungsmöglichkeiten (Kuzle & Bruder, 2016). So können Lernende unbekannte Sachverhalte durch Heurismen, wie das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, das Nutzen von Analogien und den Rückbezug auf bereits bekannte Rechenoperationen aus der Geometrie lösen und ihren Lösungsweg reflektieren (Kuzle & Bruder, 2016).

Bei der **Begriffsbildung** im Geometrieunterricht stehen meist nicht Definitionen am Anfang des Begriffslernens; sie bauen vielmehr auf Vorstellungen, Kenntnissen und Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff auf (Weigand et al., 2014). Das bewusste „Definieren" und die Verwendung des Wortes „Definition" erfordert Kenntnisse über den Aufbau eines mathematischen Gebietes und ist erst im fortgeschrittenen Lehrgang möglich. Die Literatur zur Begriffsbildung, gerade in der Geometrie, ist zahlreich und vielfältig. Auch für die Vorgehensweise zum Begriffslernen gibt es diverse Beispiele und Stufenmodelle. Wir möchten hier nur einige zentrale Hinweise geben, die der Orientierung dienen können, und verweisen ansonsten auf die im Anhang angegebene Literatur.

Das Begriffslernen ist eng mit dem Aufbau von Grundvorstellungen verknüpft. Insbesondere gehört dazu, dass die Lernenden *mentale Modelle zum Begriff aufbauen*. Dies geschieht nicht nur rezeptiv durch die Wahrnehmung von Beispielen und Darstellungen des Begriffs (also zum Beispiel durch die Präsentation verschiedener Körper oder ebener Figuren und ihren Bezeichnern), sondern auch durch eigenständiges Handeln. So können zum Beispiel Parallelogramme durch zwei gezeichnete Parallelenpaare hergestellt werden, oder durch das Falten / Schneiden eines Papierstreifens. Gerade durch den Einsatz von DGS, aber auch durch greifbare, reale Materialien können hergestellte Modelle verändert werden und dabei erlaubte Transformationen identifiziert werden, die weitere Beispiele für Objekte, die unter den Begriff fallen, erzeugen. Als Beispiel – für Parallelogramme – können hier Gelenkvierecke dienen, bei denen die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Diese können in andere Parallelogramme umgewandelt werden, aber auch in allgemeine Vierecke. Noch einfacher wird es bei der Untersuchung euklidischer Eigenschaften: Ein aus Papier ausgeschnittenes Polygon verändert weder Form noch Größe, wenn man es verschiebt, rotiert oder umdreht. Unterstützt wird der Aufbau der mentalen Modelle durch das Einfordern von Verbalisierungen durch die Schülerinnen und Schüler und die Diskussion von Handlungen an vorgestellten Objekten, wie auch sonst in allgemeinen Zugängen zu Grundvorstellungen. Genau diesen – für Geometrieunterricht – typischen Aspekt nimmt das Fördermaterial in den Blick.

Mit dem Aufbau der mentalen Modelle einher geht die Entwicklung des Begriffsumfangs, also der Gesamtheit aller Objekte, die durch einen Begriff bezeichnet werden samt der Abgrenzung zu Objekten, die nicht darunterfallen, und des Begriffsnetzes, also den Beziehungen zu anderen Begriffen. Als prominentes Beispiel dient hier das Haus der Vierecke (wobei „Haus" im Sinne von „Dynastie" oder „Stammbaum" gemeint ist, nicht im Sinne eines tatsächlichen Hauses), in dem dargestellt wird, welche Merkmale und Eigenschaften verschiedenen Viereckstypen gemein sind. Um diese Beziehungen nicht nur zu vermuten, sondern zu begründen, muss sich im Unterricht über den Begriffsinhalt, also die Merkmale und Eigenschaften, die den jeweiligen Begriff ausmachen, verständigt werden. Dies kann und sollte dann in Definitionen münden, sodass Diskussionen und Argumentationen über verschiedene geometrische Formen und Muster möglich werden. Dabei ist es typisch für die Geometrie, dass aus Grundbegriffen immer komplexere Begriffe aufgebaut werden – ein wichtiger Grund dafür, die Grundbegriffe grundlegend zu klären! Als Beispiel für diese Notwendigkeit ist hier die „Höhe in einem Dreieck" hilfreich: Die Höhe eines Dreiecks an sich existiert nicht, sondern es muss stets die dazugehörige Grundseite *oder* Ecke angegeben werden, da die Höhe den *Abstand* einer Ecke zu einer Grundseite bezeichnet.

Wie ebenfalls von Grundvorstellungen bekannt, ist schließlich noch die Fähigkeit, mit einem Begriff umzugehen, also ihn anzuwenden, ein Ziel des Begriffslernens. Auch dies kann bereits bei der Exploration der Begriffe, beim Aufbau der mentalen Modelle geschehen, also beim Konstruieren und Transformieren, aber auch beim Modellieren und Problemlösen innerhalb der Leitidee *Raum und Form*. Schülerinnen und Schüler sollten den Begriff und seine Merkmale dabei bewusst einsetzen, oder durch die Lehrkräfte dazu gebracht werden, ihre Tätigkeit so zu reflektieren, dass sie die Zwecke und Zweckmäßigkeit von Begriffen erfassen.

Das Lernen geometrischer Begriffe kann, orientiert an den oben genannten Anforderungen, zum Beispiel wie im Modell zum Lernen geometrischer Begriffe (Weigand et al., 2014) in einem Dreischritt gelingen:

1. Aufbau angemessener Vorstellung (Handeln, Wahrnehmen, Verbalisieren)
2. Erwerb von Kenntnissen (Eigenschaften, Beziehungen zwischen Eigenschaften, Beziehung zu anderen Begriffen)
3. Aneignen von Fähigkeiten (Konstruieren, Berechnen, Problemlösen)

Die Begriffsbildung an sich erschließt auch Formen, also Figuren und Körper, als Objekte des unterrichtlichen Handelns. Die **Zwecke und Zweckmäßigkeit von Formen** können damit im Unterricht sichtbar werden. Dreiecke erlauben es, Abstände und Winkel miteinander in Beziehung zu setzen und dienen als kleinste Bausteine aller ebenen Figuren. Die Kongruenzsätze sind damit nicht nur im Bereich des Argumentierens und Beweisens als Übungsmaterial verankert. Sie spielen eine entscheidende Rolle bei allen Diskussionen über die Stabilität von realen Konstruktionen, angefangen beim Fachwerk, welches ohne Dreiecke keine Stabilität hätte, bis hin zum 3D-Druck. Die Ähnlichkeit von Formen wird durch die Gleichheit von Winkeln getragen, was auch konkret bei der Manipulation von Bildern auf Bildschirmen (Zoomen) über zentrische Streckungen erfahrbar gemacht werden kann. Zusammen mit einer Länge, also einer messbaren Größe, können Figuren dann vollständig beschrieben werden. Kurz: Kennt man nur Winkel, so ist die Form vorgegeben, kennt man noch zusätzlich eine Größe, so ist die gesamte Figur bestimmt, kennt man alle Größen, so kann man aus diesen auch die Winkel, also die Form bestimmen.

Diese Zweckmäßigkeit kann beim **Her- und Darstellen** dann im Wechselspiel mit der Diskussion über Eigenschaften und Begriffe erfahren werden. Auch hier lohnt es sich, nicht nur komplexe Gebilde zu bauen, sondern auch Grundformen zu explorieren. Wie müssen drei Stangen beschaffen sein, um daraus ein Dreieck bauen zu können? Ist dieses durch die Länge der Stangen komplett festgelegt? Wie viele Stangen braucht man, um ein räumliches Gebilde zu bauen? Was passiert, wenn alle Stangen gleich lang sind? Funktioniert es auch mit verschieden langen Stangen? Kann man das Gebilde auch dadurch herstellen, dass man einen Block Knetmasse mit geraden Schnitten teilt? Welche Muster kann man aus Dreiecken, Vierecken, Fünfecken legen? Kann man, wenn man viele Kopien eines beliebigen Vierecks hat, damit den Tisch vollständig bedecken? Solche und andere Fragen sind gute Startpunkte für einen vielfältigen Geometrieunterricht.

Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen

Ein derart vielfältiger Geometrieunterricht erlaubt es dann Schülerinnen und Schülern, die **Kraft des eigenen Verstandes und der Autonomie des Denkens** zu erfahren. Krauthausen (2018) sieht im spielerischen Charakter des Geometrieunterrichts ein hohes Potential für die Motivation der Schülerinnen und Schüler bezüglich des ganzen Mathematikunterrichts. Als zentraler Bestandteil erfolgreichen Lernens gelten gelungene motivationale Prozesse, welche durch gelungene Lernumgebungen beeinflusst werden können. Krauthausen (2018) geht davon aus, dass insbesondere Kinder, die Schwierigkeiten im Bereich der Arithmetik haben, im Geometrieunterricht zu unerwarteten Erfolgserlebnissen gelangen können. Diese Erfolgserlebnisse können positive Selbstwirksamkeitserwartungen der Kinder erheblich steigern, was sich wiederum positiv auf den ganzen Mathematikunterricht auswirken kann. Laut Scherer und Moser Opitz (2010) erfordern viele Situationen des Alltags geometrische Kompetenzen sowie räumliche Vorstellungen und haben für die Schülerinnen und Schüler eine erhebliche Alltagsrelevanz. Diese Aspekte können sich motivierend auf die Lernenden auswirken und somit einen positiven Effekt auf den gesamten Mathematikunterricht haben. Das Wechselspiel zwischen spielerischen Explorationsphasen und der notwendigen Konsolidierung kann dabei durch das Modell von *Spielraum* und *Dokument* (Kortenkamp & Wollring, 2017) beschrieben werden.

*„Die Mathematikdidaktik sollte sich auf die wahre Natur des Faches Mathematik besinnen: Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern, die im Prozess entwickelt, erforscht, fortgesetzt und verändert werden können“ (*Wittmann, 2004, S. 1).

Das Denken in Mustern und die Fähigkeit zur Abstraktion ist somit entscheidend für die Denkökonomie, weil von vielen Einzelfällen auf ein System geschlossen werden kann (Wittmann & Müller, 2007). Die **Ästhetik von Formen und Ordnungen** spielt dabei eine entscheidende Rolle. Die geometrische Anordnung von Mustern und das Erkennen von Strukturen muss zu diesem Zweck geschult werden. Das Themengebiet *Muster und Strukturen* wird häufig als ein eigenständiges Inhaltsgebiet der Geometrie verhandelt. Dabei geht es vor allem darum, die Entstehung von Mustern und Strukturen zu begründen und deren tiefere Struktur systematisch herauszuarbeiten. Ein tiefgehendes systematisches Verständnis für Muster durch den Geometrieunterricht zu entwickeln, kann für das Verständnis arithmetischer und algebraischer Kenntnisse in vielerlei Hinsicht genutzt werden. Im Arithmetikunterricht werden Muster genutzt, um Zahlen zu veranschaulichen, wie beispielsweise durch Würfel- und Punktebilder, in denen die Zahlstrukturen abgebildet werden. Gleiches gilt für Anschauungsmaterialien wie die Zwanziger- und Hunderterfelder, in denen die dekadische Struktur des Zahlensystems sichtbar wird (Kampmann, 2016). Wittmann und Müller (2007) postulieren Mathematik als Wissenschaft der Muster und sehen diese als Grundlage aller mathematischer Strukturen. Die Beschäftigung mit Beziehungen geometrischer Objekte zueinander kann als ein neuer möglicher Weg zur Förderung der Sicht auf die mathematischen Strukturen verstanden werden (Steinweg, 2013). Der Geometrieunterricht kann maßgeblich dazu beitragen, ein tiefgehendes Verständnis für Muster und Strukturen anzubahnen, welches dann in allen mathematischen Bereichen sinnvoll genutzt werden kann (Wittmann & Müller, 2007).

Geometrie als Kulturgut und Bildungsinhalt

Das Fundament des Strukturmodells soll daran erinnern, dass Geometrie über den Mathematikunterricht hinaus allgemeinbildend ist. Im Sinne eines genetischen Unterrichts lohnt es sich, die Entwicklung der Geometrie an Beispielen, die aus der Architektur (wie Pyramiden, Tempel, Hochhäuser), der Landvermessung oder auch der Kunst (nicht nur Ornamenten und Perspektive, sondern auch moderne / abstrakte Kunst, siehe hierzu unter anderem den Beitrag von Roth (2009) und andere im Themenheft Mathematik und Kunst) stammen können, zu betrachten. Hier bietet sich auch fächerübergreifender und fächerverbindender Unterricht an. Die Geometrie ist stets treibendes Element der Mathematik gewesen, zum Beispiel durch die Axiomatik von Euklid bis Hilbert. Schließlich und nicht zuletzt kann auch ganz aktuell der gesamte Themenkomplex der Computergeometrie, von Computerspielen in Pixelgrafik (Koordinatisierung!) über Ego-Shooter bis hin zu VR-Inhalten (Perspektive!) als Ansatz für einen modernen und interessanten Geometrieunterricht genutzt werden.

Wichtige Verbindungselemente der Teilbereiche

Die vielen Teilbereiche der Geometrie stehen, wie schon in der bisherigen Beschreibung ersichtlich, nicht für sich allein, sondern werden immer wieder durch gemeinsame Tätigkeiten oder Aspekte miteinander verknüpft. Wir möchten einige davon speziell hervorheben.

Argumentieren und Beweisen

„Mathematisches Argumentieren in der Grundschule und in den unteren Klassen der Sekundarstufe I sollte integraler Bestandteil jedes guten Mathematikunterrichts sein“ (Jahnke, 2007, S. 10) – nicht umsonst ist das mathematische Argumentieren eine im Rahmenplan Berlin Brandenburg besonders hervorgehobene allgemeine mathematische Kompetenz. Das Argumentieren als Herstellen von rationalen Begründungszusammenhängen dient der Klärung von Meinungen über Sachverhalte und Probleme, aber auch der Überzeugung des Gegenübers. Argumentiert wird dann, wenn strittige oder bestreitbare Behauptungen vorliegen; „In einer Argumentation wird versucht, mit Hilfe des kollektiv Geltenden etwas kollektiv Fragliches in etwas kollektiv Geltendes zu überführen“ (W. Klein, 1980, S. 19).

Geometrie birgt dabei ein besonderes Potenzial: Durch ihre Anschaulichkeit ist es einfach möglich, sich Meinungen zu bilden; durch die Axiomatisierung und den Aufbau von (Grund-)Begriffen ist es aber auch möglich, Schritt für Schritt bestreit- und begründbare Schlüsse zu ziehen. Damit können die Komponenten des mathematischen Argumentierens und dazu passende Unterrichtsphasen (siehe Bezold, 2012) besonders gut in den Geometrieunterricht eingebaut werden. Dazu gehören das Entdecken von mathematischen Phänomenen, die Beschreibungen der Entdeckungen, das Hinterfragen dieser Entdeckungen und das Begründen der Entdeckungen in einem forschend-entdeckenden Mathematikunterricht (Bezold, 2012). Ein typisches Beispiel ist hier die Frage nach der Innenwinkelsumme in Dreiecken – die Schülerinnen und Schüler können leicht viele Dreiecke herstellen, deren Innenwinkel messen, Vermutungen dazu äußern (und in Frage stellen – ist die Innenwinkelsumme in manchen Dreiecken vielleicht nur 178°?), und dann zu Begründungen kommen. Der Reichtum der (elementar-)geometrischen Fragestellungen und der dazu produzierbaren Beispiele und Gegenbeispiele ist dabei meist einfacher zugänglich als in der Arithmetik.

Im Unterricht können geeignete Kommunikationsanlässe mit den typischen Fragen und Aufträgen wie „Beschreibe, was du beobachtest!“, „Welche Besonderheiten hast du entdeckt?“, „Was fällt dir auf?“, „Untersuche deine Lösungen. Beschreibe, was du entdeckst!“, „Welche Lösungen hast du gefunden?“, „Wie bist du vorgegangen, um Besonderheiten und Lösungen zu finden?“, „Ist das immer so?“, „Findest du noch mehr Beispiele?“, „Kann das stimmen?“, … leicht geschaffen werden (siehe auch Bezold (2009, 2012), Ruwisch (2017)).

Das eigentliche Beweisen als formales Schließen, welches oft als Königsdisziplin der Mathematik empfunden wird, ist letztendlich die am stärksten formalisierte Niveaustufe des Beweisens (Holland, 2007). Er unterscheidet die (1) Niveaustufe des Argumentierens zur Vermittlung eines „Aha“-Erlebnisses, in der mündlich argumentiert wird, Argumente von Mitschülerinnen und Mitschülern aufgegriffen, weitergeführt oder widerlegt werden, und Beweisgedanken verstanden und in eigenen Worten wiedergegeben werden. Dabei sind alle veranschaulichenden Hilfsmittel zugelassen, und die Argumentationskette soll so kurz wie möglich, aber so ausführlich wie nötig sein. Die (2) Niveaustufe des inhaltlichen Schließens mit dem Ziel der Sicherung der Allgemeingültigkeit verlangt eine Notation des Beweises als Sequenz von Beweisschritten, ohne übertriebene Ausführlichkeit in weitgehend umgangssprachlicher Darstellung. Sie ist dann eine Vorstufe der (3) Niveaustufe des formalen Schließens, die als Ziel die Sicherung der Allgemeingültigkeit der zu beweisenden Aussage hat. Dabei wird der Beweis als Sequenz von Beweisschritten angemessen ausführlich und lückenlos notiert, und die dabei verwendeten Sätze angegeben. Alle drei Niveaustufen nehmen dabei in verschiedener Strenge Bezug auf Beweisfiguren.

Konstruieren / Algorithmen nutzen

Konstruktionsaufgaben haben nach Ludwig und Weigand (2014) einen wichtigen Platz im Geometrieunterricht. Dabei leisten sie sowohl einen Beitrag zu den inhaltsbezogenen Zielen beim Begriffslernen, dem genannten Entdecken und Beweisen geometrischer Sätze und dem Festigen von bereits Gelerntem durch das Konstruieren selbst, als auch zu den allgemeinen Lehrzielen – dem Fördern der Problemlösefähigkeit, dem Erwerb von praktischen Zeichenfähigkeiten, der logischen Schulung und der Sprachschulung.

Dabei finden geometrische Konstruktionen mit verschiedenen Werkzeugen und auf verschiedenen Exaktheitsstufen statt. Neben den klassischen Hilfsmitteln Zirkel und Lineal oder Geodreieck wird heute nicht nur in der beruflichen Praxis (mit professioneller CAD-Software zum technischen Zeichnen), sondern auch im Unterricht der Computer eingesetzt (DGS). Gerade durch den Computereinsatz wird es möglich, Konstruktionen nicht nur exakt, sondern auch wiederholbar in algorithmischer Form durchzuführen, sodass Zusammenhänge nicht nur durch die Untersuchung einiger weniger Beispiele, sondern durch die Untersuchung einer Vielzahl miteinander vernetzter Beispiele erschlossen werden können (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2001).

Die zur Verfügung stehenden Werkzeuge und Grundkonstruktionen sind besonders bei Konstruktionsaufgaben als Problemlöseaufgaben relevant. Den Mittelpunkt einer Strecke zu finden ist besonders einfach, wenn diese Grundkonstruktion direkt zur Verfügung steht (als Makro oder Grundfunktionalität in einem DGS), schwieriger, wenn man nur Zirkel und Lineal (ohne Skala) zur Verfügung hat, und tatsächlich ein schwieriges, aber lösbares Problem, wenn man nur einen Zirkel benutzen darf. Auch andere Werkzeuge – Seile, Stangen, Gummibänder – erschließen neue Konstruktionsmöglichkeiten.

Neben den bereits genannten Werkzeugen ist selbstverständlich auch das einzelne Blatt Papier mit Stift für Skizzen und auch ohne Stift, zum Beispiel beim Origami und Falten von Mustern und Figuren, schon ein geometrisch und didaktisch nutzbares Objekt, insbesondere in der Grundschule.

In der unterrichtlichen Umsetzung wird dann zwischen dem Skizzieren (als Freihandzeichnen ohne Anspruch auf Maßstäblichkeit) und dem Konstruieren im mathematischen Sinn (mit idealen Objekten) unterschieden. Dieses Konstruieren kann sogar als rein ideelle Tätigkeit stattfinden, die nicht zwangsläufig, aber doch meistens zeichnerisch in eine reale Darstellung umgesetzt wird. Der höhere Anspruch an die Fertigkeit des Zeichnens als an das Skizzieren kann im Rahmen des Spiralcurriculums deutlich werden.

Beim konstruktiven Herstellen von Beispielen liegt der Fokus oft auf den Endprodukten. Dabei darf aber nicht vergessen werden, dass der Prozess des Konstruierens, der Weg von einer Ausgangs- zu einer Zielsituation, mindestens genauso wichtig ist. Auch hier gibt es wieder Gelegenheiten zum Argumentieren – warum liefert eine Konstruktion oder Konstruktionsvorschrift das gewünschte Ergebnis? Dabei wird auch der Darstellungswechsel zwischen Konstruktionen und ihren möglichen Beschreibungen mit einbezogen. Wie auch in anderen Themengebieten kann dabei bidirektional vorgegangen werden – zu durchgeführten Konstruktionen werden Konstruktionsbeschreibungen angefertigt, oder gegebene Konstruktionsbeschreibungen werden durchgeführt. Hieraus ergeben sich im Unterricht immer wieder Gesprächsanlässe. Mithilfe von DGS, die Konstruktionsbeschreibungen automatisiert erstellen können, kann dies gut unterstützt werden.

Koordinatisieren

Koordinatensysteme ermöglichen den rechnerischen Zugang zur Geometrie – doch sie sind nicht von vorneherein gegeben, sondern ein besonderes mathematisches Konstrukt, welches in der gesamten Schullaufbahn aufgebaut wird und verschiedene Inhaltsbereiche miteinander verknüpft. Daher spielt das Koordinatisieren eine besondere Rolle als fundamentale Idee.

Koordinatensysteme ermöglichen es, Orte in der Ebene oder im Raum über Abstände in zwei bzw. drei Richtungen von einem Ursprung aus anzugeben. Dabei sind sowohl der Ort des Ursprungs als auch die Richtungen und die Länge der Einheitsschritte frei wählbar. Beginnt man in der Geometrie bereits vor der Konstruktion mit einem vorgegebenen Koordinatensystem, so verliert man diese Wahlfreiheit. Durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems kann man Rechnungen vereinfachen oder sogar komplett vermeiden. Gleichzeitig ist es schwierig, spezielle Orte in der Ebene anzugeben, ohne ihre Koordinaten in Bezug auf ein – dann festgelegtes – Koordinatensystem anzugeben. Daher umfasst das Koordinatisieren vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel in zwei Richtungen: Ausgehend von Konstruktionen oder Figuren ohne vorgegebenes Koordinatensystem können Wege gesucht werden, diese Figuren zu beschreiben („Gehe einen Schritt, drehe dich um 90° nach links, und wiederhole diese beiden Aktionen viermal" beschreibt ein Quadrat, ohne dass man Koordinaten benötigt), und ausgehend von gegebenen Koordinatensystemen kann man Figuren einzeichnen, für deren Bestandteile Koordinaten gegeben sind (ähnlich dem Zuordnungsaspekt bei Funktionen).

Das Koordinatisieren wird über die gesamte Schullaufbahn eingeübt, zum Beispiel bei der Angabe von Feldern in einem Schachbrettmuster über das Zählen von einer Ecke aus, bei Wegbeschreibungen, die räumliches Vorstellungsvermögen erfordern, beim Modellieren von Realsituationen, oder, ganz eindimensional, beim Übergang von Rechenstrich zu Zahlenstrahl und Zahlengerade. Einen ganz besonderen Zusammenhang stellt dann der Satz des Pythagoras her – er vermittelt zwischen dem Konzept Abstand (in der Ebene haben die Punkte $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ den Abstand $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$), dem Flächeninhalt von (rotierten) Quadraten, rechtwinkligen Dreiecken und den trigonometrischen Funktionen.

Modellieren / Abstrahieren

Das Herstellen eines Lebensweltbezugs und das Erforschen der eigenen Umwelt im geometrischen Sinne kann eine große Motivation für die Lernenden sein (Freudenthal, 1973). Durch die Einbeziehung umweltlicher Aspekte wird eine breite Fundierung der geometrischen Begrifflichkeit, eine stärkere Konzentration auf die substantiellen Inhalte sowie eine Förderung der intuitiven Erschließung des Themas erreicht (Graumann, 1994). Ein praxisnaher Geometrieunterricht, der die Lernenden mit geometrischen Themen ihres Alltags konfrontiert, eignet sich deshalb besonders, um das Interesse der Lernenden zu wecken und an ihre Vorerfahrungen anzuknüpfen (Freudenthal, 1973). Das Modellieren liefert hier neben den bereits genannten Tätigkeiten also einen eigenen motivierenden Beitrag.

Das Modellieren wurde bereits mehrfach als allgemeine mathematische prozessbezogene Kompetenz genannt, die besonders mit der Geometrie verknüpft ist. „Geometrie ist eine der großen Gelegenheiten, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen. Es ist eine Gelegenheit, Entdeckungen zu machen ... Gewiss, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit den Augen und Händen macht, sind überzeugender und überraschender. Die Figuren im Raum sind, bis man sie entbehren kann, ein unersetzliches Hilfsmittel, die Forschung und die Erfindung zu leiten" (Freudenthal (1973, Bd. 2, S. 380). Der erste Satz dieses Zitats von Freudenthal deutet auf diese Verknüpfung hin: Im Modellierungskreislauf ist das Mathematisieren, der Übergang von der Realität in die Sprache der Mathematik, Grundlage für die darauffolgende Behandlung des so formulierten

Problems mit mathematischen Methoden. Dabei ist es notwendig, die Realität zu idealisieren, geometrische Objekte und Beziehungen zwischen diesen zu identifizieren und mit den Begriffen zu arbeiten, die die Geometrie zur Verfügung stellt.

Die Konzentration auf das Wesentliche, das Weglassen von Informationen, also das Abstrahieren, ist eine weitere wichtige Tätigkeit. Es kommt eben nicht auf die Farbe einer Figur oder Material, überlappenden Nahtstellen bei Dosen und Getränkeverpackungen, Augenzahlen bei Spielwürfeln usw. an, sondern auf ihre Form. Es geht es darum, an realen Gegenständen Eigenschaften zu ignorieren, um Vorstellungen über charakteristische Eigenschaften der geometrischen Figur aufzubauen.

Geometrische Objekte und Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Die gerade für das Modellieren herangezogenen Objekte und Relationen sind die beiden letzten hier beschriebenen Verbindungselemente zwischen den Teilbereichen und können tatsächlich nur gemeinsam genannt werden, obwohl der Fokus mal mehr auf den Objekten, mal mehr auf den Relationen, also Eigenschaften, Beziehungen, Invarianzen und Abbildungen, liegt. Hier schließt sich der Kreis zum Hilbert'schen Eingangszitat: Der mathematische Zugang zu Objekten nutzt die Beschreibung von Beziehungen. So wird die euklidische Geometrie dadurch charakterisiert, dass Verschiebungen, Rotationen und Spiegelungen die wesentlichen Eigenschaften von geometrischen Objekten nicht ändern, und somit Form (Winkel) und Größe (Abstand) die beiden relevanten Messgrößen von geometrischen Objekten sind.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken ein breites Spektrum von Lernzielen ab, gegliedert nach den genannten Bereichen und Kompetenzen (siehe Abbildung 1) und sind verschiedenen Niveaustufen (B-G) zugeordnet. Damit wird die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe angesprochen. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Fördernotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch" bzw. „kann" oder „kann nicht", sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Für die Grundschule werden die bereits bestehenden Diagnosematerialien der individuellen Lernstandsanalysen ILeA plus verwendet und auf die bestehenden begleitenden Unterlagen zur Durchführung und Erläuterung von ILeA plus verwiesen. Die im Handbuch zu ILeA plus bereitgestellten Förderideen zu jedem Förderinhalt wurden für dieses Fördermaterial in konkrete Aufgaben übersetzt und liegen als Aufgabensammlung vor. Für die Sekundarstufe wurden neue Diagnose- und Fördermaterialien orientiert an dem oben beschriebene und vom LISUM entwickelte Modell (siehe Abbildung 1) entwickelt und eingeordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den entsprechenden Förderaufgaben verfolgt wird.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam werden zu lassen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen, indem zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler konkrete Anregungen zur unterrichtlichen Bearbeitung gegeben werden. Für jede Idee aus dem LISUM-Modell ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

Literatur und weiterführende Literatur

Backe-Neuwald, D. (2000). *Bedeutsame Geometrie in der Grundschule: Aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, des Faches, des Bildungsauftrages und des Kindes.* [Dissertation, Universität Paderborn].

Bauersfeld, H. (1993). Grundschul-Stiefkind Geometrie. *Grundschulzeitschrift, 62*, 8–11.

Bender, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1983* (S. 8–17). Franzbecker.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Verlag Dr. Kovac.

Bezold, A. (2012). Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. Eine empirische Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica, 35*, 73–103.

Blanck, S. & Eichler, K.-P. (1996). Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie – Chance für einen kindorientierten Unterricht. *Grundschulunterricht 46(*6)*, 35–39.*

Blumenthal, O. (1935). Lebensgeschichte. In Dritter Band: *Analysis · Grundlagen der Mathematik · Physik Verschiedenes.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-38452-7_25

Bruner, J. S. (1973). *Der Prozeß der Erziehung* (3.Aufl.). Berlin Verlag.

El-Demerdash, M. (2010). *The effectiveness of an enrichment program using Dynamic Geometry Software in developing mathematically gifted students' geometric creativity in high schools*. [Dissertation, PH Schwäbisch Gmünd]. https://doi.org/10.13140/2.1.1733.0247

Eichler, K.-P. (2005). Zum Geometrieunterricht in der Grundschule. *Grundschulunterricht, 11,* 2–6.

Feskorn, C. & Bohlmann, N. (2020). Von der Hand in den Kopf. Zur Bedeutung und Förderung von räumlichem Vorstellungsvermögen. *Grundschulunterricht Mathematik, 1,* 4–8.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Aufl.). Spektrum.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Spektrum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1 & 2). Ernst Klett Verlag.

Graumann G. (1994). Geometrie im Alltag: Konzeption, Themenübersicht, Praxisberichte. In *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe (S. 31–59).* Franzbecker.

Graumann, G. (2009). Allgemeine Ziele, die mit Tests schwerlich erfasst werden können, erläutert an vier Beispielen aus dem Geometrieunterricht. In M. Ludwig, R. Oldenburg & J. Roth (Hrsg.), *Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. AK Geometrie 2007/08* (S. 65–74). Franzbecker.

Häring, G. (2015). Raumvorstellungsvermögen – facettenreich und faszinierend. *Grundschule Mathematik, 45,* 40–43.

Hofbauer, H. (2018). *Kompetenzen und Einstellungen von Mathematiklehrkräften*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22567-4

Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren* (3. Aufl.). Franzbecker.

Jahnke, H. N. (2007). Beweisen und hypothetisch-deduktives Denken. Gefälligkeitsübersetzung: Proving and hypothetic-deductive thinking. *Der Mathematikunterricht, 53*(5), 10–21.

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. *mathematik lehren, 150*, 4–12.

Kampmann, R. (2016). *Muster & Strukturen in der Grundschule Klasse 1/2: Differenzierte Einheiten zum Forschen & Entdecken für alle Kompetenzbereiche des Mathematiklehrplans*. Auer Verlag.

Klein, W. (1980). Argumentation und Argument. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik, 10*(38/39), 9–57.

Klunter, M. & Raudies, M. (2006). Lernstandsanalyse im Mathematikunterricht. LISUM (Hrsg.): *Sieben diagnostisch-pädagogische Verfahren für den Schulanfang. Ein Reader zum Leitfaden*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/readerzurlernstandsanalyse0

Kortenkamp, U. & Wollring, B. (2017). *Raum und Form.* In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik Unterrichten* (S. 99–112). Kallmeyer Klett.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule.* (4. Aufl.), Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Kuzle, A. (2022). Geometry teaching in transition: An investigation on the importance of school geometry in primary education. *CEPS – Center for Educational Policy Studies Journal*. Advanced online submission. https://doi.org/10.26529/cepsj.1267

Kuzle, A. & Bruder, R. (2016). Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie. *mathematik lehren, 19*6, 2–8.

Kuzle, A. & Glasnović Gracin, D. (2020). Making sense of geometry education through the lens of fundamental ideas: An analysis of children’s drawing. *The Mathematics Educator, 29*(1), 7–52.

Ludwig, M. & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 55–80). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Mammana, C. & Villani, V. (Hrsg.). (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study.* Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6

Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr.* Schroedel.

Rasch, R. & Sitter, K. (2016). *Module für den Geometrieunterricht in der Grundschule. Geometrie handlungsorientiert unterrichten und beziehungshaltig entdecken.* Kallmeyer und Klett.

Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (2001). Grundlagen Dynamischer Geometrie. In H.-W. Henn, H.-J. Elschenbroich & T. Gawlick (Hrsg.), *Zeichnung – Figur – Zugfigur* (S. 123–144). Franzbecker.

Roth, J. (2009). Strukturen, Figuren und Abbildungen – Ein Zusammenspiel von Konkreter Kunst und Mathematik. *Der Mathematikunterricht*, *2*, 5–11.

Ruwisch, S. (2017). Requests for mathematical reasoning in textbooks for primary-level students. In B. Kaur, W. K. Ho., T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (Bd. 4, S. 113–120). PME.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2693-2

Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 3. Schuljahr.* Schroedel.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2015). *Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik*. LISUM.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule – Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2738-0

Van de Walle, J. A. & Lovin, L. H. (2006). *The Van de Walle professional mathematics series: Vol 3. Teaching student-centered mathematics: Grades 5–8*. Pearson.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99–122). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt Didaktik der Mathematik*, *8*, 14–18.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10605-8

Wittmann, E. C. (1999). Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung: Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (S. 205–223). Bültmann und Gerriets.

Wittmann, E. Ch. (2004). *Mathematik als Wissenschaft von Mustern – von Anfang an.* Kurzfassung des Impulsreferats im Rahmen der Auftakt- und ersten Fortbildungsveranstaltung des BLK-Programms SINUS Transfer Grundschule, 30.9. – 02.10.2004, Verwaltungsakademie Bordesholm. http://www.sinus-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Kurzf_SINUS-Ref.pdf

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. von den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Cornelsen. http://doi.org/10.18452/3123