



Didaktische Hinweise

Darum geht es

Mit Gleichungen können Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (beispielsweise Zahlen, Größen oder Funktionen) und deren Eigenschaften ausgedrückt werden. Sie dienen als Werkzeug zur Formulierung und zum Lösen von Problemen. Sie können aber auch selbst als mathematische Objekte aufgefasst werden.

Das Gleichheitszeichen hat in den ersten Schuljahren die Bedeutung eines Zuweisungszeichens bzw. Handlungszeichens („Rechne aus!“). In den nächsten Schuljahren muss diese Vorstellung zunehmend zum Vergleichszeichen (Beziehungszeichen) entwickelt werden. Die Lernenden entwickeln die Erkenntnis, dass die linke und die rechte Seite einer Gleichung vertauschbar sind.

Gleichungen ohne Variable stellen mathematische Aussagen dar, die wahr oder falsch sind (Beispiel: $2 + 3 = 5$).

Gleichungen mit Variablen stellen Aussageformen dar. Durch das Einsetzen von Werten entstehen mathematische Aussagen (Beispiel: $2 + x = 5$). Alle Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden können, bilden die Grundmenge.

Die Schülerinnen und Schüler lernen im Verlauf ihrer Schulzeit verschiedene Aussageformen kennen und unterscheiden:

- Eine Gleichung ist eine erfüllbare Aussageform, wenn mindestens eine Zahl der Grundmenge zu einer wahren Aussage führt. Diese Zahlen bilden die Lösungsmenge der Gleichung.
- Eine Gleichung ist eine unerfüllbare Aussageform, wenn die Lösungsmenge leer ist. Dann wird für keine Zahl aus der Grundmenge die Gleichung zur wahren Aussage.
- Eine Gleichung ist eine allgemeingültige Aussageform, wenn alle Zahlen der Grundmenge zu wahren Aussagen führen.

Die Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung kann auf verschiedene Weise erfolgen. In der Grundschule werden die Schülerinnen und Schüler angeleitet, einfache Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen, Probieren (zunehmend systematisch) und die Nutzung von Umkehroperationen zu lösen.

Vorstellungen zum Lösen einfacher Gleichungen können mithilfe des Waagemodells entwickelt werden. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Der Grundgedanke dieses Modells besteht darin, dass eine Waage im Gleichgewicht bleibt, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht. Ebenso bleibt die Lösungsmenge der Gleichung erhalten, wenn auf beiden Seiten dieselbe Grundrechenoperation angewendet wird. Damit können mögliche äquivalente Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen veranschaulicht werden. Wie jedes Modell ist jedoch auch das Waagemodell nur begrenzt einsetzbar.

Vom systematischen Anwenden von Umkehroperationen gelangt man in der Sekundarstufe I zum kalkülmäßigen Lösen von Gleichungen. Es ist eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts, dass die Lernenden ein Verständnis zum Vorgehen beim Lösen von Gleichungen entwickeln. Deshalb sollen die Schritte zum Umformen von Gleichungen immer wieder begründet und die Lösungen von den Lernenden kritisch betrachtet werden. Ein mechanisches Umformen bzw. Abarbeiten der Umformungsschritte nach scheinbar willkürlichen Regeln soll von Anfang an vermieden werden. Beim Lösen von Gleichungen in schriftlicher Form ist auf eine übersichtliche Darstellung zu achten (beispielsweise: Setzen von Gleichheitszeichen unter Gleichheitszeichen; Vermeidung mehrerer Gleichheitszeichen in einer Zeile).

Gleichungen stellen in allen Leitideen ein spezielles Werkzeug zur Problemlösung dar. In Sachzusammenhängen soll mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden, ob auch Näherungslösungen akzeptiert werden können.

In der Sekundarstufe I werden auch Lösungsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen thematisiert. Das Prinzip dieser Verfahren ist das geschickte Kombinieren der Gleichungen, mit dem Ziel, aus dem Gleichungssystem eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten. Gesucht ist dann ein Zahlenpaar $(x|y)$, welches beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt und damit eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt. Dabei soll die Verbindung zum grafischen Lösen von Gleichungssystemen aufgebaut werden (Schnittpunkt der Graphen). Im Unterricht werden auch die zwei Sonderfälle betrachtet: Das Gleichungssystem kann keine Lösung haben oder es können unendlich viele Lösungen existieren.