Darum geht es

Sinnvolle Zusammensetzungen aus Zahlen, Größen und Variablen, die mithilfe von Rechenzeichen und Klammern gebildet werden, heißen Terme. Sie sind eine ökonomische Darstellung von allgemeinen Zusammenhängen, Mustern und Folgen. Terme haben keinen Wahrheitsgehalt. Schwerpunkte im Unterricht liegen auf dem Aufstellen, Interpretieren und Umformen von Termen.

Enthalten die **Terme keine Variablen**, sondern nur Zahlen bzw. Größen, die mit Rechenzeichen und Klammern verbunden werden, so spricht man von Zahlentermen oder Rechenausdrücken. Diese sind für Schülerinnen und Schüler leichter zu erfassen als Terme mit Variablen und bilden die Grundlage für den Aufbau von Termvorstellungen. Der Aufbau von Termvorstellungen ist mit dem Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen eng verbunden. Somit beginnt algebraisches Denken nicht mit dem Umformen von Termen, sondern zunächst beim Beobachten von Strukturen an geometrischen Gebilden (z. B. beim Erkennen von Figurenfolgen) und dann auch an arithmetischen Gebilden. Zunehmend sollen die Strukturen auch mit Termen beschrieben werden (z. B. Beschreiben von Punktemustern). Eine wesentliche Grundlage für das Erfassen von Umformungsregeln ist ein Verständnis der Rechengesetze für natürliche Zahlen, da die Umformungsregeln auf den Rechengesetzen basieren.

Terme mit Variablen sind abstrakter als reine Rechenausdrücke. Der Schritt zu diesem abstrakten Denken ist ein wesentlicher Entwicklungsschritt, der von der Lehrkraft sorgfältig begleitet und unterstützt werden muss. Eine Anbahnung der Idee der Variablen erfolgt schon in den ersten Grundschuljahren durch den Einsatz von Platzhaltern in Form von Kästchen, Bildern usw. Schrittweise werden diese Symbole durch Buchstaben ersetzt. Durch Terme mit Variablen werden Situationen, Muster und Modelle beschrieben und verallgemeinert.

Für den Begriff der **Variablen** werden die folgenden drei Grundkonzepte unterschieden, die im Verlauf der Schulzeit entwickelt werden müssen: die Variable als *Unbekannte*, die Variable als *unbestimmte, allgemeine Zahl* und die Variable als *Veränderliche*.

Die Variable als Unbekannte zu betrachten, entspricht zum Beispiel ihrer Funktion in Zahlenrätseln und Gleichungen. Dabei geht es um eine zu ermittelnde gesuchte oder gedachte Zahl.

Die Variable als unbestimmte, allgemeine Zahl wird zum Beispiel verwendet, um Rechengesetze und Formeln auszudrücken. Bei diesem Konzept dient die Variable dazu, allgemeine Aussagen zu formulieren und Zahlen nicht näher einzugrenzen. Diese Aussage, dieses Rechengesetz oder diese Formel gilt dann für alle Zahlen aus einem bestimmten Zahlbereich.

Beim Konzept der Variablen als Veränderliche durchlaufen die Werte systematisch einen bestimmten Zahlenraum. Es werden verschiedene Werte eingesetzt, so dass eine funktionale Beziehung zwischen den eingesetzten Werten und den ermittelten Termwerten entsteht. Diese Vorstellung mündet in der Idee der funktionalen Zusammenhänge.

Die Variable als Unbekannte:
Wie heißt die Zahl?
„Das Dreifache einer Zahl vermindert um 10 ergibt 8.“

Die Variable als unbestimmte, allgemeine Zahl:
„Das Kommutativgesetz:

a + b = b + a“

Die Variable als Veränderliche:

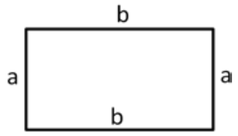
$x \rightarrow 3 \cdot x + 2$

x	0	1	2	3	4
y	2	5	8	11	14

Neben dem Begriff der Variablen ist im Umgang mit Termen der Begriff der *Gleichwertigkeit* von wesentlicher Bedeutung. Es werden folgende Aspekte der Gleichwertigkeit von Termen unterschieden: Beschreibungsgleichheit, Einsetzungsgleichheit und Umformungsgleichheit von Termen.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreibungsgleichheit



Der Umfang kann durch folgende Terme angegeben werden:

$a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot (a + b)$

Einsetzungsgleichheit

Term 1: $(a + 5)^2$
Term 2: $a^2 + 10a + 25$

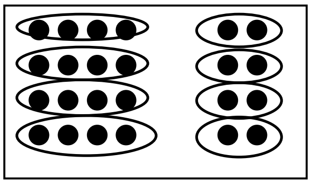
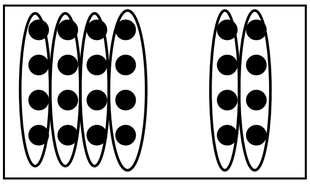
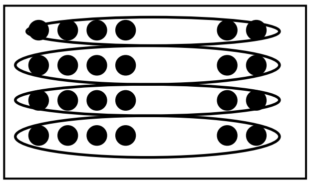
Die Terme sind einsetzungsgleich. Setzt man in beide für a jeweils die gleiche Zahl ein, dann sind ihre Termwerte gleich.

Umformungsgleichheit

Term 1: $2 \cdot (x + 1)$
Term 2: $2 \cdot x + 2$

Term 1 lässt sich durch Auflösen der Klammern nach Distributivgesetz in Term 2 „verwandeln“

Schülerinnen und Schüler lernen das Konzept der Beschreibungsgleichheit von Termen ohne Variable schon sehr früh kennen. Die Beschreibungsgleichheit ist die Gleichwertigkeit zweier Terme, wenn diese denselben Sachverhalt oder dieselbe Figur auf unterschiedliche Weise beschreiben. Bereits in den ersten Jahrgangsstufen der Grundschule erfahren die Lernenden, dass 5 + 7 das Gleiche ist wie 7 + 5 oder aber 2 + 2 + 2 das Gleiche ist wie 3 · 2. Dass Terme ganz unterschiedlich aussehen können und trotzdem das Gleiche beschreiben, erfahren sie auch an geeigneten geometrischen Fragestellungen.
In den höheren Jahrgangstufen werden die Lernenden mit Termen mit Variablen vertraut gemacht. Im Zuge dessen lernen sie auch die Einsetzungsgleichheit kennen, wenn sie zum Beispiel aufgefordert werden, in verschiedene Terme gleiche Zahlen einzusetzen und so ihre Gleichwertigkeit zu prüfen. Einsetzungsgleich sind 2 Terme mit Variablen dann, wenn beide Terme für alle einsetzbaren Zahlen jeweils denselben Termwert ergeben.
Umformungsgleichheit spielt besonders in der Sekundarstufe I eine Rolle, wenn Variablen als Zeichen angesehen werden, mit denen – auch ohne Deutung im Sachkontext – nach bestimmten Regeln gearbeitet werden kann. Bevor der Übergang zum Kalkül erfolgt, müssen aber Vorstellungen an konkreten Inhalten entwickelt werden. Ein Bezug zwischen der inhaltlichen Vorstellung und dem Kalkül sollte auch in höheren Jahrgangsstufen immer wieder hergestellt werden. Das Umformen von Termen darf kein automatisiertes bzw. eingeübtes Anwenden von scheinbar willkürlich vorgegebenen Umformungsregeln sein. Dies wird vermieden, indem die Lernenden zunächst ein Verständnis von beschreibungs- und einsetzungsgleichen Termen entwickeln.
Im Umgang mit Termen ist es notwendig, zwischen symbolisch-algebraischer, grafischer, verbaler und numerischer Darstellung zu wechseln und diese zu vernetzen.

<table>
<tr><th>Grafische Darstellung</th><th>Tabellarisch</th><th>symbolisch</th><th>Verbale Darstellung</th></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td>1. Spalte</td><td>2. Spalte</td><td>Ganze Zeile</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr>
<tr><td>4 · 4</td><td>4 · 2</td><td>4 · (4 + 2)</td></tr>
</table></td><td>4 · (4 + 2)</td><td>Beispiele:
Es sind vier Zeilen.
In jeder Zeile sind erst vier Punkte und dann noch zwei Punkte.</td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="7">6 · 4</td></tr>
</table></td><td>6 · 4</td><td>Es sind sechs Spalten mit jeweils vier Punkten.</td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td>6</td><td rowspan="4">4 · 6</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
</table></td><td>4 · 6</td><td>Es sind vier Zeilen mit jeweils sechs Punkten.</td></tr>
</table>

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0