Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

„Man hat mir gesagt, dass jede Gleichung im Buch die Verkaufszahlen halbiert. Ich beschloss also, auf mathematische Formeln ganz zu verzichten. Schließlich habe ich doch eine Ausnahme gemacht: Es handelt sich um die berühmte Einstein'sche Formel $E = mc^2$. Ich hoffe, dies wird nicht die Hälfte meiner potentiellen Leser verschrecken."

Diese Sätze stehen in der Danksagung von Stephen W. Hawkings in seinem Buch „Eine kurze Geschichte der Zeit". Insofern stellt sich, wenn man die Schulbücher der Sekundarstufe betrachtet, die Frage, wie viele Schülerinnen und Schüler überhaupt noch am Mathematikunterricht teilnehmen möchten. Offenbar werden Formeln von vielen als ein undurchdringbares und abschreckendes Ausdrucksmittel der Mathematik wahrgenommen.

Für die Personen, die die Sprache der Formeln schon sprechen, ist das oft gar nicht verständlich, denn sie haben Formeln als Hilfsmittel entdeckt, mit dem man Zusammenhänge zwischen Zahlen und Größen kompakt und einfach beschreiben kann und mit dem man Modelle und die aus ihnen entstehenden Konsequenzen konstruieren kann. Losgelöst vom realen oder mathematischen Modell ist es dann möglich, mit den Mitteln der Algebra weitere Schlüsse aus diesen Formeln zu ziehen. Der Schulunterricht muss daher bereits in der Grundschule die Grundlage für dieses Hilfsmittel legen.

Betrachten wir noch einmal das Eingangsbeispiel: Wenn p die Anzahl der potenziellen Leserinnen und Leser ist, und n die Anzahl der Gleichungen im Text, dann beschreibt der abgerundete Bruch $\left\lfloor\frac{\mathrm{p}}{2^{\mathrm{n}}}\right\rfloor$ die Anzahl der noch verbleibenden Leserinnen und Leser. Soll diese größer als 1 sein, dann muss $\mathrm{p} \geq 2^{\mathrm{n}}$ sein. Ein Buch mit 100 Formeln bräuchte also eine Quintillion potenzielle Leserinnen und Leser, damit mehr als ein Exemplar davon verkauft wird. Abgesehen davon, dass dieser Text mit drei Formeln nun schon sieben Achtel der potenziellen Leserinnen und Leser verschreckt hat, wird deutlich, dass wir mit algebraischen Umformungen in Bereiche vordringen, die sich der konkreten Realisierung entziehen – die Algebra ermöglicht es, den Bereich des Erlebbaren zu verlassen und allgemeine Schlüsse in der Vorstellung und darüber hinaus zu ziehen.

Ein weiterer Aspekt der Beschreibung von mathematischen Zusammenhängen über algebraische Ausdrücke ist, dass sie damit maschinell bearbeitet werden können. Die Beschreibung der systematischen Veränderung eines Wertes kann mit Termen erfolgen, die Computer verarbeiten können. Der Übergang von der Arithmetik, dem „Rechnen", zur Algebra entspricht auf der „digitalen Seite" dem Übergang vom Taschenrechner zu Computeralgebrasystemen (CAS). Die Beschreibung als Term ermöglicht nun dem Gerät eine Berechnung automatisiert durchzuführen. Die durch $4\mathrm{x}^2 - 9$ gegebene Parabel kann mit dem Funktionsplotter als Graph auf dem Bildschirm oder in der Tabellenkalkulation als Wertetabelle dargestellt werden, wozu dieser Term jeweils für viele verschiedene x ausgewertet wird. Der nächste, tatsächlich algebraische Schritt ist dann die Berechnung der Ableitungsfunktion oder von Stammfunktionen. Ähnlich verhält es sich mit dem Übergang vom systematischen Probieren durch (arithmetisches) Einsetzen über das algebraische Finden einer Nullstelle bis hin zum Faktorisieren des Terms in $(2\mathrm{x} - 3)(2\mathrm{x} + 3)$ über die 3. binomische Formel. Auch hier ist wieder die Progression von der Arithmetik zur Algebra von der Grundschule bis zur Oberstufe sichtbar.

Schließlich kann man mit mehreren Termen Gleichungen aufstellen, die im Gegensatz zu den ähnlich aussehenden Termumformungen nicht beschreiben, dass die Terme exakt gleich sind, sondern für bestimmte Belegungen der dort verwendeten Variablen gleich sind oder gleich sein sollen. Ohne die Spezifizierung, welche Belegungen für die Variablen erlaubt sind, kommt man hier nur schwer weiter. Auch wenn die rigorose Behandlung von Quantoren und Mengen nicht mehr Bestandteil des Curriculums ist, so muss dennoch die sprachliche Beschreibung dieser Bedingungen – „für alle …“, „es gibt …“ – im Unterricht eingeübt werden.

Das vorliegende Material soll dabei helfen, den Erwerb der notwendigen Kompetenzen im Bereich Gleichungen und Funktionen zu unterstützen und Grundvorstellungen zum Variablen- und Termbgriff, zu Gleichungen, Funktionen und Operatoren aufzubauen. Der Zusammenhang zu den anderen Leitideen liegt auf der Hand, liefert uns doch die Formelsprache das Instrumentarium, Mathematik auf einer höheren Ebene zu betreiben.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose zielgerichtet und zum passenden Zeitpunkt einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen sowie Fehlvorstellungen und die Entstehung von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher produktorientierten oder einer eher prozessorientierten Diagnostik unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zu produktorientierter Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bzw. als Zeichen für „kann“ oder „kann nicht“ bewertet. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Anderseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrunde liegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. Diagnostische Interviews stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der im direkten Gespräch Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen in Erfahrung gebracht werden kann. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten ab. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten oder eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik „Gleichungen und Funktionen“ entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung zwischen produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das Können (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Hier ist zu empfehlen, die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anzuknüpfen. Die Förderaufgaben sind im Dialog zwischen der Lehrkraft und den Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen möglich. Dabei bietet sich auch die Möglichkeit der Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützen. In diesen Situationen wird der Lehrkraft sowohl ein erneuter Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse ermöglicht als auch den Schülerinnen und Schülern die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst gemacht. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Gleichungen und Funktionen

Die Leitidee „Gleichungen und Funktionen", die in den KMK-Standards für den Primarbereich „Muster und Strukturen" (2005) und für den mittleren Abschluss „Funktionaler Zusammenhang" (2004) heißt, hat ihre mathematische Grundlage in Algebra und Analysis, die bei der Beschreibung von Strukturen und ihrer Analyse Hand in Hand gehen und damit den Kern der Mathematik darstellen. Da es stets darum geht, nicht nur einen Einzelfall, sondern ganze Situationen zu beschreiben, kommt man nicht umhin, den Begriff der Variable als zentrales Konzept einzuführen. Diese begegnen Schülerinnen und Schülern schon früh – allerdings zunächst als „Kästchen" oder Lücken für gesuchte Werte in Rechenaufgaben, als vorzustellende Werte ohne Namen („Ich denke mir eine Zahl. Diese ist durch 5 teilbar.") oder über die Vergabe von Namen („Multipliziere deine Lieblingszahl mit 5"). Die symbolische Schreibweise als x, y oder z ist dann später eine willkommene Vereinfachung.

Die erste Begegnung mit Operatoren findet auch in der Arithmetik statt. Der Gegenoperator von „plus 7" ist „minus 7", und so kann die Subtraktion als die Handlung erklärt werden, die die Addition einer bestimmten Zahl rückgängig macht. Diese Vorstellung ist eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung des funktionalen Denkens. Äquivalenzumformungen von Gleichungen, die später durchgeführt werden, greifen auf diese Operatorsichtweise zurück

Zum einen lassen sich diese Operatoren funktional erklären – sie beschreiben die Veränderung eines Wertes und der Operator $+7$ entspricht somit der linearen Funktion f mit $\mathrm{f(x) = x + 7}$. Das Verständnis des Operators $+7$, der bereits in der Grundschule eingeführt wird, ist also eine Grundlage für das Verständnis von Funktionen.

Verkettet man Operatoren, führt also bestimmte Rechenoperationen nacheinander aus, so erhält man Terme, mit denen man auch mehrschrittige Rechnungen durchführen kann. Erlaubt man in diesen Termen auch Operatoren, deren Wirkung über eine Variable beschrieben wird, zum Beispiel „n" für „nimm das n-fache", dann werden die möglichen Rechnungen noch reichhaltiger. Und schließlich erlauben Vorrangregeln und Klammersetzung auch die Beschreibung von beliebig komplizierten Rechnungen über Terme. Und so, wie Operatoren als Funktionen interpretiert werden können, können über Terme gegebene Funktionen wieder als Operatoren interpretiert werden. Die Funktion f mit $\mathrm{f(x) = x^3}$ ist dann zum Beispiel ein Operator, der aus einer Zahl den Rauminhalt eines Würfels mit dieser Kantenlänge macht. Mit diesen Termen als Operatoren schließt sich dann der Kreis.

Die durch **Terme** beschriebenen Rechnungen können dann, wie schon kurz in der Einleitung beschrieben, in verschiedener Form genutzt werden. Das Einsetzen von Werten für Variablen ordnet ihnen einen Termwert zu, man führt also die Rechnung aus. Beobachtungen zur Struktur der Terme und zu den Termwerten ist wesentliche Aufgabe der Grundschule (z. B. bei der Untersuchung von Zahlenmauern). Das Gleichsetzen zweier Terme ermöglicht es, Lösungsmengen zu bestimmen: die Variablenbelegungen, für die beide Terme den gleichen Termwert haben. Hierzu nutzt man meist das Umformen von Gleichungen, welches wie die Regeln zur Manipulation von Termen darauf basiert, eine äquivalente – gleichwertige – Gleichung zu finden, also eine, deren Lösungsmenge der Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung entspricht. Die Verwendung eines Terms als Funktionsterm erlaubt die allgemeine Beschreibung der Funktionswerte für gegebene Parameter und Argumente und eröffnet damit die Möglichkeit, komplexere Zusammenhänge zu modularisieren. Die Funktion f mit $\mathrm{f(x) = g(x) + 5}$ erklärt, dass die neue Funktion das tut, was die alte Funktion tat, und zusätzlich noch 5 addiert. Die Funktion p mit $\mathrm{p(x) = f(g(x))}$ beschreibt, dass man zunächst das tut, was g beschreibt, und mit dem Ergebnis macht, was f beschreibt, also die Nacheinanderausführung bzw. Verkettung der beiden Funktionen. Dies alles kann man auf Ebene der Zahlen tun, man kann aber auch über konkrete Handlungen bereits in der Grundschule zu diesen Vorstellungen hinführen.

Für die unterrichtliche Behandlung von Gleichungen und Funktionen ist nicht nur in der Primarstufe der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

a. sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

b. den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

c. die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen.

Am Ende stehen die drei zentralen Aspekte funktionalen Denkens (Vollrath, 1989):

(1) „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen. […].

(2) Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken. […].

(3) Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.“

Der Einsetzungsaspekt (1) entspricht dabei der Nutzung von Termen als Rechenvorschrift, der Kovarianz- oder Veränderungsaspekt (2) entspricht der Nutzung von Termen als Operator, der Objektaspekt (3) entspricht der Nutzung von Termen als algebraischem Objekt.

Darüber hinaus ist die Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge unterschiedlich darzustellen und zwischen diesen flexibel zu wechseln, nicht nur für die inhaltsbezogenen Kompetenzen im Bereich „Gleichungen und Funktionen“ relevant, sondern auch für andere mathematischen Gebiete wie etwa „Größen und Messen“ (z. B. Umfang eines Kreises, siehe Tabelle 1).

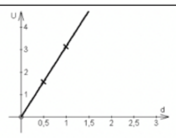
<table>
<tr><td>verbal</td><td>Der Umfang ist ein Vielfaches vom Durchmesser</td><td>$U = \pi \cdot d$</td><td>symbolisch</td></tr>
<tr><td>numerisch</td><td><table><tr><td>d</td><td>U</td></tr><tr><td>1</td><td>3,1</td></tr><tr><td>2</td><td>6,3</td></tr><tr><td>3</td><td>9,4</td></tr></table></td><td></td><td>grafisch</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen unterschiedlichen inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Im Rahmenlehrplan 1–10 Berlin Brandenburg für das Fach Mathematik finden sich die Kernkompetenzen *Terme und Gleichungen darstellen*, *Gleichungen und Gleichungssysteme lösen*, *Zuordnungen und Funktionen untersuchen*, *Zuordnungen und Funktionen darstellen* und *Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge nutzen* im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Gleichungen und Funktionen“ wieder. Das Ziel dieser Leitidee ist es, dass die Schülerinnen und Schüler „ein Verständnis für das Operieren mit Variablen entwickeln“ und „in Sachsituationen funktionale Zusammenhänge zur Beschreibung und Problemlösung nutzen“ (MBJS, 2015, S. 9). Darüber hinaus sollen mithilfe von Funktionen „Phänomene der Abhängigkeit und Veränderung erfasst und analysiert werden“ (MBJS, 2015, S. 9), wobei der eingangs erwähnte Modellcharakter von Funktionen hervorgehoben wird, ebenso wie die prägende Tätigkeit des Darstellungswechsels.

Da sich das „funktionale Denken“ als Grundlage der Mathematik durch die gesamte Schullaufbahn zieht, ist der Aufbau eines Verständnisses im oben genannten Sinne eine komplexe Aufgabe. Um diese zu strukturieren, lohnt es sich, die zentralen Begriffe in diesem Bereich zu identifizieren: Variablen, Operationen, Terme, Gleichungen und funktionale Zusammenhänge.

Auf diesen Überlegungen aufbauend hat das LISUM ein Modell entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich „Gleichungen und Funktionen“ zu strukturieren (siehe Abbildung 1). Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge oder die strikte Trennung von Unterrichtsinhalten, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte zu individuellen Fördermaßnahmen. Dabei ist es notwendig, Zusammenhänge zwischen den tragenden Ideen herzustellen und sie miteinander zu verknüpfen.

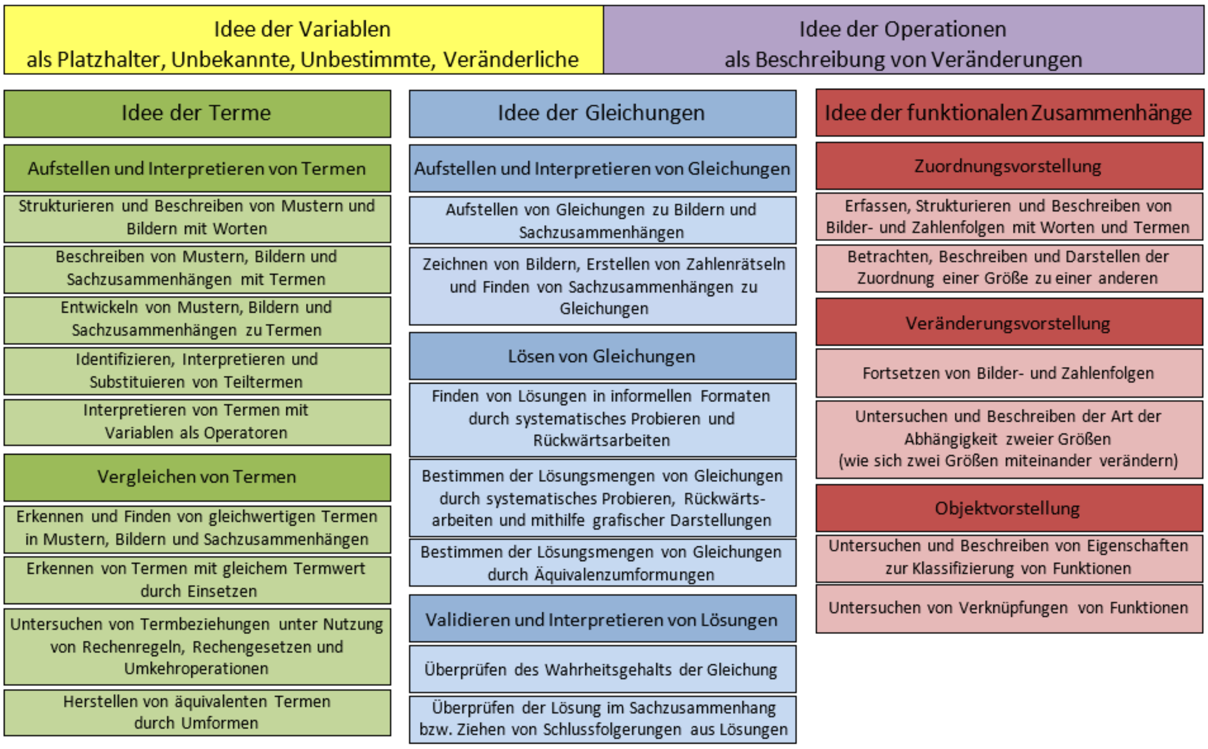


Abbildung 1: Konzeptbild zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich „Gleichungen und Funktionen“

Idee der Variablen

Als Überbau dienen die „Idee der Variablen“ und die „Idee der Operation“. Variablen können dabei als eine Art Verallgemeinerung von Zahlen angesehen werden – plakativ gesagt: Statt einer konkreten Zahl „5“ können wir im Bereich der Gleichungen und Funktionen auch mit „x“ (oder auch anderen Symbolen, wie ___ oder ☐) arbeiten. Die Verwendung dieser Zahlen kann dabei verschieden sein und induziert verschiedene Arten von Variablen:

- Platzhalter, die später noch gefüllt werden,
- Unbekannte, die als Ergebnis einer Aufgabe gesucht werden,
- Unbestimmte, die eine Zahl beschreiben, deren konkreter Wert nicht für die Lösung der Aufgabe notwendig ist,

- Veränderliche, zu denen die Veränderung von anderen, abhängigen Variablen untersucht wird,

um nur einige zu nennen.

Auch Parameter und Konstanten sind hier noch zu nennen, genauere Betrachtungen zum Variablenbegriff finden sich zum Beispiel bei (Malle 1993).

Idee der Operation

Spielen die Variablen die Rolle der Zahlen, so ergeben sich die Rechenoperationen aus der Idee der Operation, die die Veränderung von Zahlen beschreiben. In der Leitidee „Zahlen und Operationen“ sind solche Operationen schon als Operatoren „+5“ oder „–5“ oder auch als der allgemeine Gegenoperator „minus“, der aus einer Zahl ihr Gegenteil macht, bekannt. Auch der Operatoraspekt der Bruchrechnung („3/4 von“) beschreibt eine Veränderung, die auf eine Zahl (oder Variable!) wirken kann.

Idee der Terme

Stehen Variablen und Operatoren zur Verfügung, so können aus diesen auch komplexere Beschreibungen von Rechnungen gebildet werden. Die Idee der Terme umfasst die symbolische Darstellung von solchen Rechenvorschriften und die dazugehörigen Übersetzungs- und Interpretationstätigkeiten. Dies kann schon sehr früh propädeutisch geschehen: Beschreibt man ein Muster (zum Beispiel Band-Ornamente oder Parkettierungen) mit einer Zeichenfolge, dann finden ähnliche Darstellungswechsel statt, wie sie beim Aufstellen und Interpretieren von Termen zu Rechenaufgaben notwendig sind. Ist es möglich, zwei solche Beschreibungen zu einer neuen, komplexeren Beschreibung zusammenzusetzen, dann kann man den Kerngedanken von Termen auch so zugänglich machen. So wird zum Beispiel aus dem Muster ABCABCABC mit den Ersetzungsregeln „A wird durch \/\ ersetzt“, „B wird durch __/ ersetzt“ und „C wird durch __/ ersetzt“ das neue Muster \/__/__/\/__/__/\/__/__/. Dabei werden der Einsetzungsaspekt und sogar die Verkettung von Funktionen bereits in der frühen mathematischen Bildung vorbereitet.

Neben dem Herstellen und Interpretieren von Termen ist aber auch der Vergleich mit Termen wichtig: Auf der Ebene der Arithmetik ist dieser bereits thematisiert, die Grundvorstellung des Zusammenfügens erklärt sofort, dass $4 + 7$ den gleichen Termwert wie $7 + 4$ ergibt. Ersetzt man hier die Zahlen durch Variablen, dann erhält man das Kommutativgesetz in allgemeiner Form. Hier ist es notwendig, die möglichen Belegungen der Variablen zu diskutieren, auch wenn Existenzquantor („es gibt eine Zahl für die gilt“) und Allquantor („für jede Zahl gilt“) zunächst nicht formal eingeführt werden. Ohne diese Unterscheidung ist der Weg vom Spezialfall zur Verallgemeinerung und damit zum Vergleich von Termen nicht zu schaffen, wie das Beispiel $3 \cdot 0 = 0 \cdot 5$ zeigt – es gilt keineswegs $x \cdot y = y \cdot z$ für beliebige x, y und z, aber es gibt ein y, so dass es für alle x und z gilt.

Idee der Gleichungen

Auf der Basis des Vergleiches von Termen ist es dann möglich, Gleichungen mit Termen aufzustellen, bei denen zulässige Belegungen der Variablen gesucht werden, die bei beiden Termen das gleiche Ergebnis liefern. Dabei können Terme sowohl durch gleichwertige (äquivalente) Terme ersetzt werden (wie in der Idee der Terme – grüne Säule in Abbildung 1 – vorbereitet), diese Gleichungen können aber auch als eigenständige mathematische Objekte angesehen werden und über Äquivalenzumformungen in neue Gleichungen verwandelt werden, die eventuell einfacher zu lösen sind. Dabei stehen neben heuristischen Verfahren wie dem systematischen Probieren oder grafischen Lösungsverfahren auch formalisierte Verfahren wie das Ineinander-Einsetzen zur Verfügung. Ohne die Interpretation der Lösungen (im Modellierungsaspekt) und Wege zum Validieren von Lösungen (primär durch das Einsetzen von Werten) wäre die Idee der Gleichungen allerdings unvollständig.

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Bei der Einführung von Funktionen, die die Zuordnung von Werten beschreiben, wird schließlich die Kraft der Terme als symbolische Darstellung von Rechnungen und Strukturen wirklich genutzt. Es sollte aber bedacht werden, dass Funktionales Denken nicht von der Beschreibung einer Funktionsvorschrift als Term abhängig ist. Ist eine Funktion als Wertetabelle gegeben, so kann man durchaus über den Wert an einer Stelle (und damit den Einsetzungsaspekt in der Zuordnungsvorstellung) sprechen – ebenso wie bei einer rein grafischen Darstellung. Ist eine Funktion über ihren Graphen im Koordinatensystem gegeben, so kann man problemlos über ihre Steilheit sprechen und damit die Veränderungsvorstellung betonen – was auch dann möglich ist, wenn man eine Wertetabelle vorliegen hat. Und die Untersuchung von Minimum, Maximum und anderen Kennwerten, die man ebenfalls in Term-freien Darstellungen durchführen kann, verknüpft die Leitidee „Gleichungen und Funktionen" nicht nur mit der Leitidee „Daten und Zufall", sondern ermöglicht einen Zugang zur Objektvorstellung von Funktionen. Dennoch: Das Verständnis von Termen und Gleichungen ermöglicht es Schülerinnen und Schülern, Funktionen auch über Funktionsterme darzustellen und damit die nützlichen Formeln für die Berechnung von abhängigen Größen bereitzustellen. Schließlich ist die Untersuchung dieser Terme als mathematische Objekte dann auch die Grundlage der Analysis in der Oberstufe.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken die genannten Bereiche und Kompetenzen auf verschiedenen Niveaustufen (B-G) und damit die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe ab. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Fördernotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch" bzw. „kann" oder „kann nicht", sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Dazu wurden alle Diagnoseaufgaben in das oben beschriebene vom LISUM entwickelte Modell und in den neuen Rahmenlehrplan eingeordnet. Auch die Förderaufgaben sind entsprechend dem Modell geordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den Förderaufgaben verfolgt wird.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam werden zu lassen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen, indem zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler konkrete Anregungen zur unterrichtlichen Bearbeitung gegeben werden. Für jede Idee aus dem LISUM-Modell ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

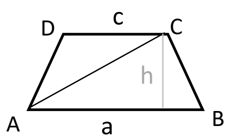
Spezielle Hinweise zu den im Material angesprochenen Teilbereichen

Idee der Terme

Terme sind sinnvolle Zusammensetzungen aus Zahlen, Größen und Variablen, die durch Rechenzeichen und Klammern miteinander verbunden sein können. Jede beliebige Zahl und Variable stellen ebenso einen Term dar. Terme sind also formal Zeichenreihen, die selbst Zahlen darstellen oder durch Einsetzen von Zahlen in Zahlen übergehen. Im Mathematikunterricht wird allerdings der Termbegriff üblicherweise nicht definiert.

Grundvorstellungen zu Termen
Die Betrachtung des Terms als Bauplan und des Terms als Rechenschema sind unterschiedliche Grundvorstellungen zu Termen (Siller & Roth, 2016).

Der Term als **Bauplan** beschreibt die mathematische Struktur einer Situation mit symbolischen Mitteln oder wird zur Bearbeitung eines Problems entwickelt. Ein so entstandener Term kann als mathematischer „Bauplan“ für die gegebene mathematische Situation oder das gegebene mathematische Phänomen interpretiert werden. Wenn man z. B. einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes entwickeln möchte, kann man das Trapez in zwei Dreiecke zerlegen. Aus den zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Termen zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken wird nun im Sinne eines Bauplans der Term zur Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes zusammengesetzt. Der Bauplan würde sich dann wie folgt ergeben: $A_{Trapez} = A_{Dreieck\ ABC} + A_{Dreieck\ ACD}$ (siehe Variablen in der untenstehenden Darstellung eines Trapezes).



Dreieck ABC $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Dreieck ACD $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

Aus dem obigen Term ist die Struktur der mathematischen Situation (also des Flächeninhalts des Trapezes) direkt ablesbar.

Nachdem ein Term im Sinne der Grundvorstellung des Bauplans für eine mathematische Situation aufgestellt wurde, wird dieser in aller Regel in einer bestimmten Anwendungssituation genutzt, um wiederholte gleichartige Berechnungen optimal (u. a. schnell, einfach, mit wenig Aufwand) durchzuführen (Siller & Roth, 29016). Die Grundvorstellung des *Terms als Rechenschema* beschreibt eine Vereinfachung von Berechnungen von Zahlenwerten durch weitere Termumformungen. Gehen wir zu unserem Beispiel zurück: Um den Flächeninhalten von beliebigen Trapezen zu berechnen, wird der Term als Bauplan nun zu einem *Term als Rechenschema* umgeformt, indem der Term $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ weiter umgeformt und zielgerichtet vereinfacht wird: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$. Dadurch wird es leichter, den Termwert zu ermitteln, wenn man für ein konkretes Trapez und bekannte Werte *a*, *c* und *h* dessen Flächeninhalt berechnen will. Die Grundvorstellung *Term als Rechenschema* spielt auch im alltäglichen Leben eine Rolle, zum Beispiel bei der Berechnung der Stromkosten (Siller & Roth, 2016).

Schon im Anfangsunterricht werden die ersten Vorstellungen zu Termen entwickelt. Algebraisches Denken beginnt schon beim Beobachten und Beschreiben von Strukturen geometrischer Gebilde (z. B. Figurenfolgen) und später arithmetischer Gebilde (z. B. Zahlenfolgen). Im weiteren Verlauf der Grundschulzeit sollen diese mit Worten beschriebenen Strukturen durch symbolische Mittel (Terme) ersetzt werden (z. B. Beschreiben von Punktmustern).

In erster Linie befassen sich die Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Grundschulzeit mit **Zahlentermen** oder Rechenausdrücken, die keine Variablen enthalten. Sie beinhalten ausschließlich Zahlen bzw. Größen, die mit Rechenzeichen und Klammern verbunden sind. Die Entwicklung von Termvorstellungen durch Zahlenterme ist mit dem Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen eng verbunden.

Terme mit Variablen sind für Schülerinnen und Schüler abstrakter und oftmals schwerer fassbar. Um die Entwicklung zum abstrakten Denken bei den Schülerinnen und Schülern voranzubringen, lernen sie bereits in den ersten Grundschuljahren den Platzhalter in Termen kennen. Für den Platzhalter werden häufig Symbole (z. B. Kreise, Vierecke …) verwendet. Schrittweise werden diese Symbole dann durch Buchstaben – die Variablen – ersetzt. So wird die Entwicklung der Vorstellung zur Variablen als Unbekannte angebahnt.

Je nach Art der Anwendung unterscheidet man: die Variable als Unbekannte, als Unbestimmte und als Veränderliche.

Die Variable als Unbekannte:
Wie heißt die Zahl?
„Das Dreifache einer Zahl vermindert um 10 ergibt 8."

Die Variable als Unbestimmte:
Das Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

Die Variable als Veränderliche:
$x \rightarrow 3 \cdot x + 2$

x	0	1	2	3	4
y	2	5	8	11	14

Tätigkeiten mit Termen

Von zentraler Bedeutung für den Unterricht sind folgende Tätigkeiten mit Termen:

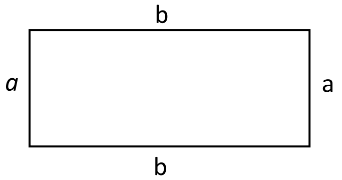
1. Aufstellen von Termen (z. B. zum Beschreiben des Flächeninhalts von Trapezen)
2. Analysieren von Termen (z. B. durch die Beschreibung von Termen mit Worten, durch das Erkennen der Termstruktur oder das Überprüfen der Terme auf ihre Richtigkeit entsprechend dem Sachkontext)
3. Umformen von Termen (z. B. das Vereinfachen durch Zusammenfassen oder das Auflösen von Klammern usw. Dabei ist zu beachten, dass die Umformungsregeln für Zahlenterme auch für Terme mit Variablen gelten.)
4. Berechnen von Termen (durch Bestimmen des Termwerts)
5. Interpretieren von Termen (z. B. durch die Beschreibung ihrer Bedeutung oder Rückübersetzung in einen Sachkontext)

   Darstellen von Termen (z. B. durch grafische Veranschaulichungen von Formeln → beispielsweise kann der Term der binomischen Formel $(a + b)^2$ durch Rechtecke visualisiert werden) (Vollrath, 1994; Vollrath & Weigand, 2007).

Man kann immer wieder beobachten, dass vielen Schülerinnen und Schülern das Umformen von Termen Schwierigkeiten bereitet. Besonders problematisch wird es in der Sekundarstufe I, wenn Terme mit Variablen umgeformt werden sollen. Ein Hauptaugenmerk sollte darauf gelegt werden, dass ein Bezug zu den inhaltlichen Vorstellungen hergestellt wird und Termumformungen nicht nur auf Vorrat gelernt werden, sodass es zum scheinbar willkürlichen Anwenden vorgegebener Umformungsregeln kommt. Vielmehr muss den Schülerinnen und Schülern klar werden, dass Umformungen der Entlastung des Gedächtnisses, der Vereinfachung numerischer Berechnungen und dem Herstellen übersichtlicher Terme dienen sollen, die als Hilfsmittel zum Lösen von Gleichungen genutzt werden können.

Im Unterricht muss ein Verständnis von beschreibungs-, einsetzungs- und umformungsgleichen Termen entwickelt werden. Eine mögliche Abfolge von Lernschritten zur Erarbeitung von Termumformungen besteht aus folgenden Schritten: Zusammenfassen gleichartiger Ausdrücke, Vertauschen und Zusammenfassen in Summen, Auflösen von Klammern, Vertauschen und Zusammenfassen in Produkten, Ausmultiplizieren von Klammern, Kombination von Klammerausmultiplizieren und Klammerauflösen, Multiplizieren von Klammern und Umformen von Bruchtermen (Malle, 1993).

Beschreibungsgleichheit



Der Umfang kann durch folgende Terme angegeben werden:

$a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot (a + b)$

Einsetzungsgleichheit

Term 1: $(a + 5)^2$
Term 2: $a^2 + 10a + 25$

Die Terme sind einsetzungsgleich. Setzt man in beide Terme für *a* jeweils die gleiche Zahl ein, dann sind ihre Termwerte gleich.

Umformungsgleichheit

Term 1: $2 \cdot (x + 1)$
Term 2: $2 \cdot x + 2$

Term 1 lässt sich durch Auflösen der Klammern nach Distributivgesetz in Term 2 „verwandeln“.

Wie eingangs erwähnt, fällt den Schülerinnen und Schülern das bewusste Anwenden der Termumformungsregeln oft schwer. Eine mögliche Hilfe kann das Sprechen über die Umformungen sein. Beispielsweise können Aussagen zum Ziel, zum Weg und zur Begründung gemacht werden.

Beispiel:

> Zielangabe: „Ich möchte in $5 \cdot (a + 7)$ die Klammern auflösen.“
> Wegangabe: „Dazu multipliziere ich jeden Summanden mit 5.“
> Begründung: „Nach dem Distributivgesetz gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$“
> (Siller & Roth, 2016)

Ein wesentlicher Grundstein für das Umformen von Termen ist das Verständnis der Rechengesetze und Rechenregeln.

Darstellungen von Termen

Im Umgang mit Termen ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Darstellungsebenen kennenlernen (symbolisch-algebraisch, grafisch, verbal und numerisch), zwischen diesen flexibel wechseln und diese vernetzen können (Barzel & Herget, 2006). Das flexible Wechseln der Darstellungsformen zeigt, dass ein Verständnis für den Umgang mit Termen entwickelt wurde. In den Fördermaterialien wurde darauf besonders Wert gelegt. So kann das Verständnis bei den Schülerinnen und Schülern vertieft und es können individuelle Präferenzen berücksichtigt werden.

Folgende Darstellungswechsel kommen in den Fördermaterialien beispielsweise zum Tragen:

- verbal – symbolisch (z. B. beim Zuordnen von Termen zu Sachverhalten in der Förderaufgabe 12, *Idee der Terme* oder beim Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten in Förderaufgabe 15, *Idee der Terme*)
- symbolisch – visuell (z. B. beim Zuordnen von Termen zu Punktebildern in Förderaufgabe 13, *Idee der Terme* oder beim Aufstellen von Termen zu Mustern in Förderaufgabe 27, *Idee der Terme*)
- numerisch – visuell (z. B. beim Herstellen einer Zahlenfolge zu einer Bilderfolge in Förderaufgabe 7, *Idee der funktionalen Zusammenhänge* oder beim Ergänzen einer Werttabelle durch Ablesen der Werte im Koordinatensystem in Förderaufgabe 22, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- verbal – visuell (z. B. beim Entnehmen von Informationen aus einer grafischen Darstellung in Förderaufgabe 21, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- verbal – numerisch (z. B. beim Überprüfen einer Zuordnung und dem Eintragen in eine Wertetabelle in Förderaufgabe 20, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- symbolisch – numerisch (z. B. beim Überprüfen und Korrigieren der Darstellung einer Zuordnung in Förderaufgabe 26, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*, siehe Abbildung 2).

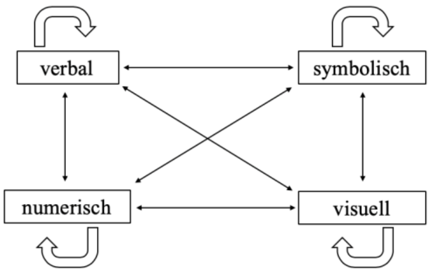


Abbildung 2: Darstellungen und Darstellungswechsel von Termen

Im Anfangsunterricht stehen insbesondere verbale und symbolische Darstellungen von Termen im Fokus. Durch das Erfinden von Rechengeschichten zu Termen beziehungsweise das Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten und realen Situationen kann der Darstellungswechsel geübt werden.

Idee der Gleichungen

Eine mathematische Gleichung ist eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme, die mithilfe des Gleichheitszeichens symbolisiert wird ($T_1 = T_2$). Bereits beim ersten Lösen von Rechenaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler unbewusst auch mit den ersten einfachen Gleichungen. Diese werden im weiteren Verlauf der Schulzeit sukzessive komplexer und erhalten durch die unterschiedliche Verwendung des Gleichheitszeichens (=) auch eine andere Bedeutung. Wird es zunächst oft als Handlungsanweisung verstanden („Berechne das Ergebnis des links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks"), so stellt es dann eine Äquivalenzrelation dar, die folgende Eigenschaften hat:

1. Reflexivität: Jedes Objekt *a* ist zu sich selbst äquivalent. „a = a".
2. Symmetrie: Wenn Objekt a äquivalent zu Objekt b ist, dann ist auch Objekt *b* äquivalent zu Objekt a. „Wenn a = b, dann b = a."
3. Transitivität: Wenn Objekt a äquivalent zu Objekt b und Objekt b äquivalent zu Objekt c ist, dann ist auch Objekt a äquivalent zu Objekt c. „Wenn a = b und b = c, dann gilt auch a = c."

Das heißt formal, dass ein Ausdruck wie 4 + 7 = 11 gleichbedeutend zum Ausdruck 11 = 4 + 7 ist.

Gleichungen als mathematische Objekte

Gleichungen können auch als mathematische Objekte aufgefasst werden. Dabei unterscheidet man Gleichungen mit und ohne freie Variablen. Gleichungen ohne freie Variablen stellen mathematische Aussagen dar, deren Wahrheitsgehalt im Prinzip überprüfbar ist.

Zum Beispiel:

- 4 + 7 = 11 ist eine wahre Aussage (w. A.)
- 3 + 5 = 8 + 2 ist eine falsche Aussage (f. A.)
- Für alle a und b gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (w. A.)

Bei Gleichungen mit freien Variablen handelt es sich um Aussageformen, die erst durch das Einsetzen von Elementen aus der Grundmenge an die Stelle der Variablen zu wahren oder falschen Aussagen werden. Zum Beispiel wird die Aussageform 4x + 7 = 11 mit der freien Variablen x für x = 1 zu einer wahren Aussage und für x = 0 zu einer falschen Aussage. Im Mathematikunterricht werden Verfahren gelehrt, um Einsetzungen zu bestimmen, die zu wahren Aussagen führen, zum Beispiel mithilfe von Äquivalenzumformungen.

Verwendung des Gleichheitszeichens
Im Mathematikunterricht wird zwischen zwei Verwendungsweisen des Gleichheitszeichens unterschieden: als Zuweisungszeichen (Handlungszeichen) und als Beziehungszeichen (Vergleichszeichen) (Malle,1993). Zu Beginn der Schulzeit lernen die Schülerinnen und Schüler das Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen kennen.

Beispiel: Rechne aus. 13 + 15 =

Die Verwendung des Gleichheitszeichens entspricht dabei der „=“ Taste auf dem Taschenrechner. Auch im Beispiel *Berechne das Volumen des Prismas* V_{Prisma} *= Grundfläche · Höhe* wird das Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen verwendet.

Diese erste Vorstellung des Gleichheitszeichens als Zuweisungszeichen muss nach und nach zur Vorstellung des Gleichheitszeichens als Beziehungszeichen ergänzt und weiterentwickelt werden. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler, dass auf beiden Seiten einer Gleichung gleichwertige Terme stehen und die Seiten einer Gleichung vertauschbar sind (z. B. verschiedene Namen desselben Objektes wie $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5} = 3{,}8$, Gleichwertigkeit bei Termen wie $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, Gleichungen $7x^2 + 2x - 24 = 0$). Mit Gleichungen werden also Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen oder Funktionen) und deren Eigenschaften ausgedrückt. Sie dienen als Werkzeug zur Formulierung und zum Lösen von Problemen.

Es kommt vor, dass Schülerinnen und Schüler immer wieder Fehlvorstellungen zum Gleichheitszeichen entwickeln (Winter, 1982):

- Das Gleichheitszeichen wird vornehmlich als Zuweisungszeichen verstanden und nicht als Beziehungszeichen. Demnach wird z. B. eine Gleichung wie 3 + 2 = 2 + 3 nicht akzeptiert, sondern neu dargestellt als 3 + 2 = 5 und 2 + 3 = 5.
- Auch bei z. B. 18 + 4 = 22 + 5 = 27 : 3 = 9 wird das Gleichheitszeichen ausschließlich als Handlungsauftrag betrachtet und damit falsch verwendet.
- Darstellungen ohne Operationszeichen, wie z. B. 5 = 5, werden nicht akzeptiert, da sie zu keiner Handlung anregen.
- Die Vorstellung von Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen ist dann verfestigt und ändert sich nicht wesentlich von der Grundschule bis in den Sekundarbereich, zum Teil sogar nicht bis in den tertiären Bereich.

Aus diesem Grund ist es unerlässlich, beide Vorstellungen von Gleichheitszeichen – Zuweisungs- und Beziehungszeichen – bereits in der Grundschule zu thematisieren, auch um den Übergang von der Arithmetik zur Algebra angemessen vorzubereiten (Winter, 1982).

Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen: Methoden
Die Lösungsmenge einer Gleichung ist die Menge L von Elementen aus der Grundmenge G, die die Gleichung zu einer wahren Aussage machen. Sind zwei oder mehr Gleichungen angegeben, spricht man von einem Gleichungssystem. Diese sind für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe relevant. Eine Lösung des Gleichungssystems muss alle Gleichungen simultan erfüllen. Um die Lösung einer Gleichung oder eines Gleichungssystems zu finden, gibt es verschiedene Methoden (Vollrath, 1994). Nachfolgend sollen diejenigen erwähnt werden, die im Unterricht eine Rolle spielen. Schon für die Grundschule sind einige von ihnen relevant.

Beim gedanklichen Lösen wird die (entsprechend einfache) Gleichung im Kopf gelöst. Beim systematischen Probieren wird die Lösung durch das Einsetzen verschiedener Zahlen und Überprüfen des jeweiligen Wahrheitsgehaltes der Gleichung gefunden.

Zum Beispiel kann die Aufgabe 4x + 8 = 2x +14 wie im Folgendem bearbeitet werden.

x	y = 4x + 8	z = 2x + 14	4x + 8 = 2x +14
0	8	14	f. A.
1	12	16	f. A.
2	16	18	f. A.
3	20	20	w. A.

Tabelle 2: Lösen einer Gleichung durch systematisches Probieren.

Die 3 ist also die Lösung der Gleichung 4x + 8 = 2x + 14.

Eine einfache Gleichung wird durch die Umkehroperation gelöst. Aus einer Addition wird eine Subtraktion, aus einer Multiplikation eine Division und umgekehrt. Beispielsweise wird bei der Gleichung 3x = 12 die Division verwendet (12 : 3 = 4). Somit folgt x = 4.

Wenn einer der Terme zwei miteinander verknüpfte Operationen enthält, so kann die Gleichung mittels eines Termvergleichs gelöst werden. Beispielsweise besteht die Gleichung 3x + 2 = 14 aus den beiden Termen 3x + 2 und 14. Vergleicht man diese, so kann man sie so darstellen, dass beide die 2 beinhalten: 3x + 2 = 12 + 2. Somit kommt man auf 3x = 12. Diese Terme können so dargestellt werden, dass beide die 3 enthalten: 3x = 3 · 4. Damit kommt man auf x = 4. Auch diese Denkweise sollte bereits in den Jahrgangsstufen 5 und 6 thematisiert werden.

Besteht eine Gleichung aus komplexer werdenden Zusammenhängen von additiven und multiplikativen Verknüpfungen, so führt das Lösen durch Gegenoperationen (Rückwärtsarbeiten) dazu, dass die Verknüpfungen (mithilfe der Gegenoperationen) aufgelöst werden.

Beispiel: x · 3 + 4 = 19

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "="] & x \cdot 3 \arrow[r, "+ 4"] & x \cdot 3 + 4 \arrow[d, phantom, "="] \\
5 & 15 \arrow[l, ": 3"'] & \mathbf{19} \arrow[l, "- 4"']
\end{tikzcd}$$

Dieses Verfahren sollten die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Zahlenrätseln schon in der Grundschule kennenlernen und nutzen. Es bahnt das in der Sekundarstufe übliche Gleichungslöseschema an, bei dem dann allein die Umkehroperation notiert wird.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{rlcrl}
-3 & 2x + 3 & = & 13 & -3 \\
:2 & 2x & = & 10 & :2 \\
 & x & = & 5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclr}
2x + 3 & = & 13 & \mid -3 \\
2x & = & 10 & \mid :2 \\
x & = & 5 &
\end{array}$$

Beim grafischen Lösen wird ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen gelöst. Die Terme werden als Funktionsterme interpretiert und die Graphen der Funktionen y = Term 1 und y = Term 2 dargestellt. Das Prinzip dieser Verfahren ist das geschickte Kombinieren der Gleichungen mit dem Ziel, aus dem Gleichungssystem eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten. Gesucht ist dann ein Zahlenpaar (x, y), welches beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt und damit eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt. Dabei soll die Verbindung zum grafischen Lösen von Gleichungssystemen aufgebaut werden (x-Wert und y-Wert des Schnittpunkts der beiden Graphen sind die Lösungen der Gleichungen). Beispielsweise werden bei $4x + 8 = 2x + 14$ zwei Graphen der beiden Termen gezeichnet, nämlich $y = 4x + 8$ und $y = 2x + 14$ (siehe Abbildung 3).

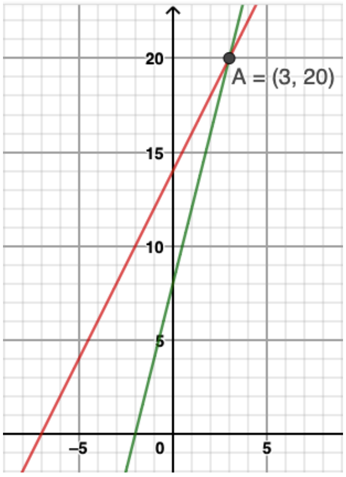


Abbildung 3: Grafisches Lösen des Gleichungssystems

Eine weitere Methode ist das Lösen von Gleichungen mithilfe einer Lösungsformel, das in der Sekundarstufe gelernt wird. Ein Beispiel ist die Lösungsformel für das Lösen einer quadratischen Gleichung in der Form

$x^2 + px^2 + q = 0$: $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

Weitere Aspekte beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
Die meisten linearen Gleichungen, die im Mathematikunterricht vorkommen, haben genau eine Lösung. Eine Gleichung ist eine erfüllbare Aussageform, wenn mindestens eine Zahl der Grundmenge zu einer wahren Aussage führt. Alle Zahlen, auf die das zutrifft, bilden die Lösungsmenge der Gleichung. Allerdings sollte nicht der Eindruck entstehen, dass Gleichungen in jedem Fall eindeutig lösbar wären.

Im Unterricht werden daher auch die zwei Sonderfälle betrachtet: Ein Gleichungssystem kann *keine* Lösung haben, z. B. $2(x + 1) = 2x + 3$, oder es können *unendlich viele* Lösungen bei sogenannten allgemeingültigen Gleichungen existieren, z. B. $2(x + 1) = 2x + 2$.

Im ersten Fall ist eine Gleichung eine unerfüllbare Aussageform, da die Lösungsmenge leer ist: Für keine Zahl aus der Grundmenge wird die Gleichung zur wahren Aussage. Im zweiten Fall ist die Gleichung eine allgemeingültige Aussageform: Alle Zahlen der Grundmenge führen zu wahren Aussagen. Handelt es sich um ein Gleichungssystem, dessen Gleichungen als Gerade im Koordinatensystem dargestellt werden, so sind diese im ersten Fall parallel und es gibt keinen Schnittpunkt, im zweiten Fall sind beide Geraden identisch.

Beim syntaktischen Umformen durch das Anwenden von Regeln wird zwischen Äquivalenzumformungen, Gewinnumformungen und Verlustumformungen unterschieden.

Bei Äquivalenzumformungen ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht (z. B. Lösungsformel für quadratische Gleichungen, Gauß'scher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme).

Bei Gewinnumformungen kann die Erfüllungsmenge der Gleichung *vergrößert* werden (z. B. beide Seiten einer Gleichung quadrieren, mit einem ganzrationalen Term multiplizieren). Betrachtet man eine konkrete Gleichung wie z. B. $\sqrt{x+1} = x - 1$, so hat diese Gleichung die Lösungsmenge {3}. Aber wenn wir nun die beiden Seiten der Gleichung quadrieren, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x - 1)^2 \\ x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= x^2 - 3x \\ 0 &= x(x - 3) \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat aber zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

Bei Verlustumformungen kann die Erfüllungsmenge der Gleichung *verkleinert* werden (z. B. wenn man aus den Termen auf beiden Seiten die Wurzel zieht oder beide Seiten durch einen rationalen Term dividiert). Betrachtet man eine konkrete Gleichung wie z. B. $x^2 + 2x = 0$. Diese Gleichung hat als Lösungsmenge {–2, 0}. Aber wir dividieren nun die beiden Seiten der Gleichung durch x:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 0 \quad | :x \\ x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung $x + 2 = 0$ hat aber als Lösungsmenge nur {–2}.

Für die Problematik von Gewinn- und Verlustumformungen sollte man die Schülerinnen und Schüler sensibilisieren.

Ein weiterer Aspekt, den man bei diesem Thema beachten sollte, ist, dass im Mathematikunterricht eine allzu starke Vereinfachung der Sprache nicht sinnvoll ist, da sie zu Verwechslungen, Unexaktheiten und Fehlern führen kann (Vollrath & Weigand, 2007). Eine häufig verwendete Floskel ist beispielsweise *auf die andere Seite bringen*. Diese kann zu folgendem Fehler führen: $x + 3 = 5$ aus *Ich muss 3 auf die andere Seite bringen, dabei geht das, was oben ist, nach unten* ergibt sich $x = \frac{5}{3}$.

Zusammenfassend ist es eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts, dass die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis zum Vorgehen beim Lösen von Gleichungen entwickeln. Deshalb sollen die Schritte zum Umformen von Gleichungen immer wieder begründet und die Lösungen von den Schülerinnen und Schülern kritisch betrachtet werden. Ein mechanisches Umformen bzw. Abarbeiten der Umformungsschritte nach scheinbar willkürlichen Regeln soll von Anfang an vermieden werden. Das Lösen von Gleichungen durch Umformen benötigt sichere Kenntnisse der Termumformungsregeln. In der Praxis werden diese zum großen Teil parallel zur Gleichungslehre entwickelt.

Didaktische Modelle zum Lösen von Gleichungen

Zum Lösen von Gleichungen existieren unterschiedliche Modelle wie etwa das Waagemodell, das Boxenmodell (Knack-die-Box-Modell), die Zahlengerade und das Streifenmodell (Falt-Modell) (Barzel & Holzäpfel, 2011). Insbesondere im Anfangsunterricht eignet sich das Waagemodell, um Gleichungen und Äquivalenzumformungen zu veranschaulichen und Vorstellungen zum Lösen einfacher Gleichungen zu entwickeln. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Der Grundgedanke besteht darin, dass eine Waage im Gleichgewicht bleibt, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht. Ebenso bleibt eine Gleichung bestehen, wenn auf beiden Seiten dieselbe Operation angewendet wird. Daraus lassen sich mögliche Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen begründen wie z. B. auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren, beide Seiten mit derselben Zahl (außer 0) multiplizieren oder dividieren und die beiden Seiten der Gleichung vertauschen. Die (Balken-)Waage kann als realer Gegenstand benutzt werden oder nur als Vorstellungshilfe dienen, insbesondere wenn die Variable auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auftritt. Allerdings ist das Waagemodell wie jedes Modell nur begrenzt einsetzbar. Es kann z. B. nur Gleichungen darstellen, bei denen ausschließlich positive Zahlen vorkommen. Es ist jedoch erwiesen, dass das Waagemodell syntaktische Fertigkeiten unterstützt und dabei hilft, das Gleichheitszeichen als Beziehungszeichen (Vergleichszeichen) besser erfassen zu können (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (unabhängige Variable, *x*-Wert) genau ein Element der anderen Menge (abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Bereits in der Grundschule und sogar schon im Anfangsunterricht kann ein erstes funktionales Denken entwickelt und geschult werden. Dieses beruht auf einer mengentheoretischen Sichtweise. Dabei spielt der Zuordnungsgedanke die entscheidende Rolle, wenn z. B. zwei Mengen gegeben sind. Zur Menge A gehören die Kinder einer Klasse und zur Menge B gehören alle Farben. Jedem Kind wird nun genau seine Lieblingsfarbe zugeordnet. Dabei entstehen Paare (Kind | Lieblingsfarbe). „Mengentheoretisch betrachtet stellen Funktionen die Beziehung zwischen zwei Mengen dar. Es entstehen also Paare (a,b)" (Büchter et al., 2019, S. 4).

Definiert wird eine Funktion wie folgt: Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu. Anders gesagt: $f\colon D \rightarrow Z$. Für das dem Element $x \in D$ zugeordnete Element der Zielmenge schreibt man im Allgemeinen f(x).

Funktionen sind eindeutige Abbildungen von einer Menge D auf eine Menge Z. Jedem x wird genau ein y zugeordnet (siehe Abbildung 4a).

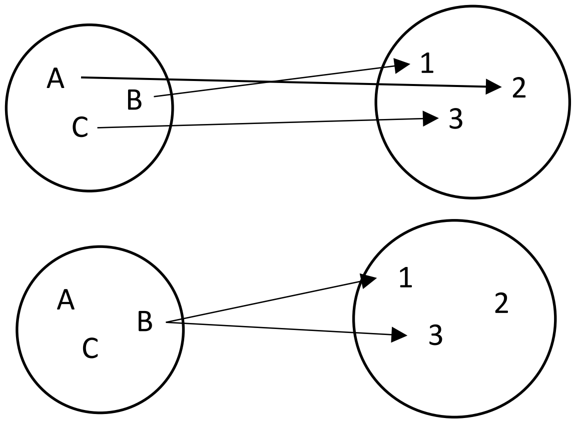


Abbildung 4a: Eindeutige Abbildungen
Abbildung 4b: Nichteindeutige Abbildungen sind keine Funktionen. Beispielsweise wird hier dem Buchstaben B die 1 und die 3 zugeordnet.

Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, dass die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff erfassen, Funktionstypen und ihre Eigenschaften kennen und sie zum Beschreiben und Herstellen von Zusammenhängen nutzen (Malle, 2000).

Zentrale Aspekte von Funktionen
„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist" (Vollrath, 1989, S. 6). Dabei beschränkt sich funktionales Denken nicht auf den Funktionsbegriff oder auf einzelne Funktionsklassen, die in der Schule behandelt werden. Eine Schülerin oder ein Schüler denkt funktional, wenn sie/er ihre/seine Fähigkeiten aus dem Umfeld der Funktionen (u. a. Terme, Gleichungen, Operationen) zur Lösung eines gestellten Problems einsetzt. Hierzu müssen bestimmte Kompetenzen entwickelt werden, die zu Grundvorstellungen der Funktionen passen. Jede Lehrkraft muss dabei diese Kompetenzen im Blick haben und diese bei den Schülerinnen und Schülern entwickeln. Somit kann jede Lehrkraft schon einmal anhand der Schülerbeschreibung einschätzen, ob eine Schülerin bzw. ein Schüler funktional denkt (bzw. denken kann).

Funktionales Denken unterteilt sich in drei grundlegende Aspekte. Vollrath (1989), Büchter (2008) sowie Leuders und Prediger (2005) beschreiben die folgenden Grundvorstellungen, die nur in der Namensgebung etwas voneinander abweichen, inhaltlich aber größtenteils übereinstimmen:

a. Zuordnungsvorstellung
Die Zuordnungsvorstellung (Zuordnungsaspekt) umfasst, dass jedem Element x aus der Definitionsmenge genau ein Element *y* aus der Wertemenge zugeordnet wird. Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion nur lokal (mit einzelnen Wertepaaren) betrachtet. Es werden also Zusammenhänge zwischen zwei Größen beschrieben ($x \rightarrow y$ und $y = f(x)$). Hier wird im Allgemeinen die Frage fokussiert „Welche Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet?" (Büchter, 2008) bzw. „Welche Größe ist von welcher abhängig?" (Leuders & Prediger, 2005). Im Mathematikunterricht könnten konkrete Fragestellungen sein: „Zu welcher Masse gehört welcher Preis?" oder „Welcher Funktionswert y gehört zu einem Argument x?" (siehe Abbildung 5).

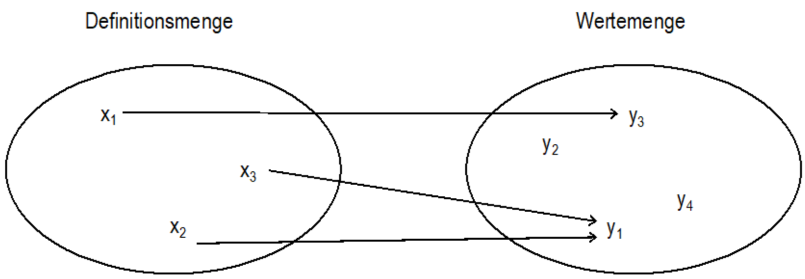


Abbildung 5: Veranschaulichung des Zuordnungsaspektes

b. Veränderungsvorstellung
Die Veränderungsvorstellung (Kovarianzvorstellung, Änderungsverhalten) nimmt die Änderung der abhängigen Variablen in Abhängigkeit von der Änderung der unabhängigen Variablen in den Blick. Verändert sich eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise und umgekehrt. Die Mengen sind also ggf. voneinander abhängig. Zusätzlich zur Zuordnung wird noch die Dynamik der Veränderung betrachtet. Hier steht also im Vordergrund, wie sich zwei Größen miteinander verändern. Eine typische Fragestellung ist: „Wie wirkt sich die Änderung einer Größe auf die andere Größe aus?" oder anders gesagt „Wie wirkt sich die Veränderung der Argumente x auf die Funktionswerte y aus?". Im Mathematikunterricht soll zunächst die Abhängigkeit zweier Größen mit Worten beschrieben oder durch die Betrachtung der Wertepaare formuliert werden (z. B. je mehr … desto mehr). Anschließend kann die Abhängigkeit zwischen Argument und Funktionswert auch in anderen Formen, z. B. einer Gleichung oder einer grafischen Darstellung ausgedrückt werden (siehe Abbildung 6). Mithilfe solcher Darstellungen können später die Begriffe *Steigungsverhalten* oder *Änderungsverhalten* aufgebaut werden.

c. Objektvorstellung

Bei Objektvorstellung (Vorstellung der Funktion als Ganzes) wird der Zusammenhang als Ganzes angeschaut und die Funktion als Objekt betrachtet bzw. „tritt uns als Objekt entgegen". Beispielsweise kann sie durch einen bestimmten Graphen oder symbolisch als Term oder Funktionsname dargestellt (siehe Abbildung 6) und darüber gesprochen werden. Dies geschieht beispielsweise, wenn Funktionen addiert oder subtrahiert werden. Eine typische Frage unter diesem Aspekt ist „Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn die Parameter der Funktion verändert werden?".

Nicht immer spielen alle drei Grundvorstellungen gleichzeitig eine Rolle, aber sie greifen ineinander über. Durch gezielte Aufgabenstellungen kann die Lehrkraft den Fokus auf eine bestimmte Grundvorstellung richten (siehe Fördermaterialien zur Idee der funktionalen Zusammenhänge).

Darstellen funktionaler Zusammenhänge

Ein weiterer Ansatz, funktionales Denken zu beschreiben, verwendet die vier wichtigsten Repräsentationsformen: verbale Beschreibung, numerisch als Tabelle, grafisch als Diagramm oder Graph und schließlich rein symbolisch als Term (Hußmann & Lackmann, 2011) (siehe Abbildung 6).

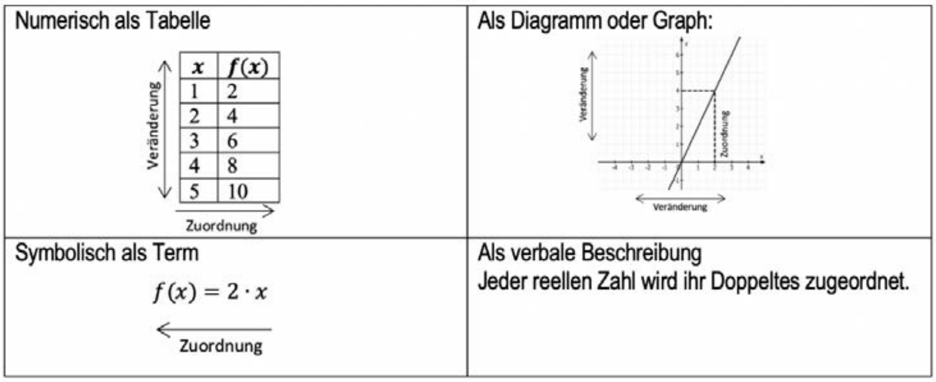


Abbildung 6: Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Zusammenhänge

Wenn man von funktionalem Denken spricht, ist nicht nur die Verwendung unterschiedlicher Darstellungen gemeint, sondern auch das flexible Wechseln von einer Darstellungsform in eine andere. „Erst die Kenntnis dieser verschiedenen Gesichter und die Kompetenz, zwischen ihnen hin und her zu wechseln, zeugen von einem Verständnis von Funktionen und führen zu einem flexiblen Umgang mit ihnen. Es lohnt sich, auch mit Lernenden über die Frage zu reden, wieso man überhaupt zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln will" (Leuders & Prediger, 2005, S. 4). Der Wechsel von Darstellungsformen ist verbunden mit einer Vielzahl mathematischer Tätigkeiten, wie das Ablesen von Werten, Skizzieren von Graphen, Werte ermitteln … (siehe Abbildung 7).

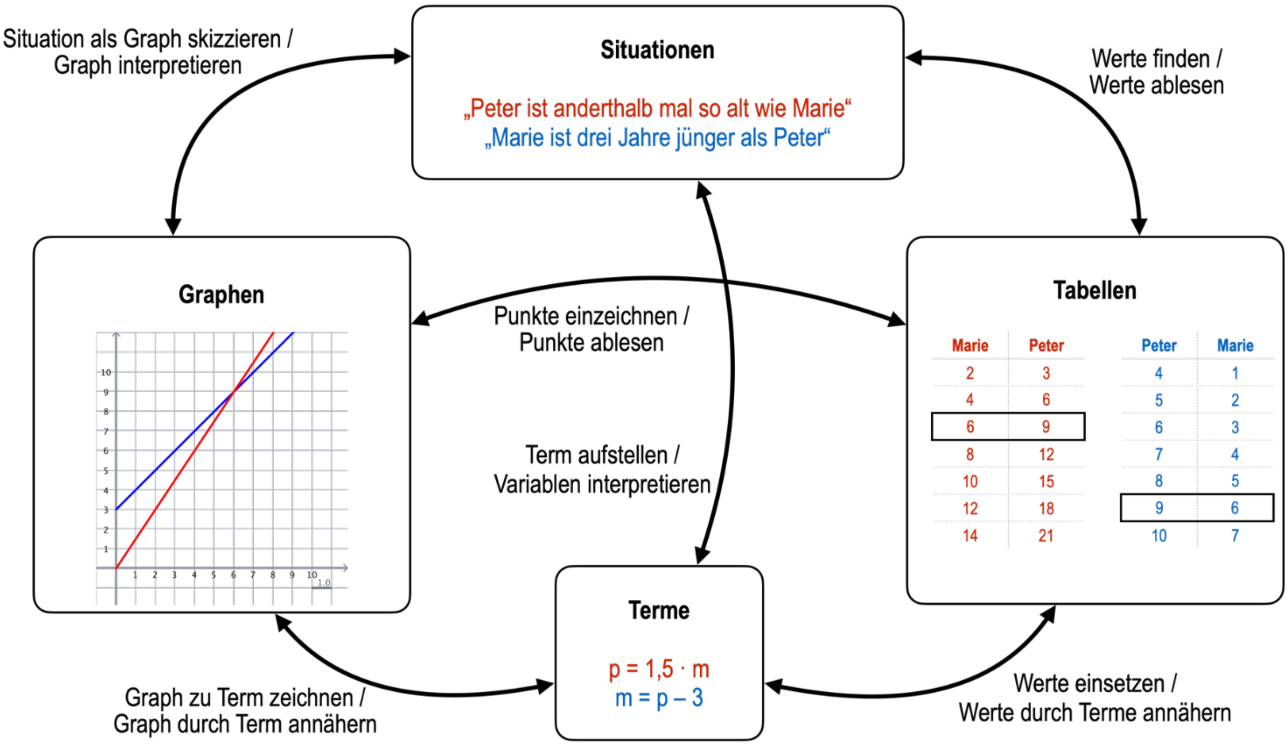


Abbildung 7: Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (eigene Darstellung)

Potenzielle Schwierigkeiten mit dem funktionalen Denken

Auch wenn funktionale Zusammenhänge ein wesentlicher Bestandteil vieler Fächer (u. a. Mathematik, Naturwissenschaften, Politik) und Teil unseres Alltags sind, zeigen Studien immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit dieser Thematik haben (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Schwierigkeiten treten unter anderem auf,

- wenn Funktionen rein abstrakte Objekte bleiben und keine Vorstellungen entwickelt werden,
- wenn Schülerinnen und Schüler nur Formeln und Gleichungen nutzen, um Dinge nach einem Algorithmus zu berechnen, den sie im Kern nicht verstanden haben,
- wenn Ergebnisse und Darstellungen nicht auf ihre Plausibilität geprüft werden können.

Um ein tieferes Verständnis von funktionalen Zusammenhängen zu entwickeln, ist es sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler dabei handelnd tätig werden (z. B. durch Messprozesse).

Zum Beispiel kann man nach einem Lauf auf dem Schulhof in 30-Sekunden-Abständen den Puls messen.
Zuordnung: In einer Tabelle werden die Zeitpunkte und der gemessene Puls eingetragen.
Veränderung: Beantwortung von Fragen, z. B. „Wie verändert sich der Puls in gleichen Zeitabschnitten?“
Sicht als Ganzes: Betrachtung der Menge aller Wertepaare und Vergleich zu anderen Messungen.
Auch bei der grafischen Darstellung von Funktionen treten oft typische Fehler auf, z. B. bei der Beschriftung und Skalierung der Achsen, Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten, Probleme beim Herstellen eines Bezuges zur Sachsituation, Verwechslung des Graphen mit einem Bild (z. B. Beschreibung einer monoton steigenden Funktion mit dem Satz „Ich gehe einen Berg hinauf.“) oder Verwechslung von Bestand und Veränderung (siehe dazu auch Roth, o.J.).

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe erfolgt zunehmend eine Formalisierung des Funktionsbegriffs. Die Zuordnungen von konkreten Größen aus dem Alltag (z. B. Massen, Preise) werden durch abstraktere Zuordnungen abgelöst. Um die Grundvorstellungen zu festigen, ist es notwendig, die abstrakten Zuordnungen immer wieder auf konkrete Sachzusammenhänge zurückzuführen.

Literatur und weiterführende Literatur

Barzel, B. & Herget, W. (2006). Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. Ein Plädoyer für einen lebendigen Umgang mit Termen. mathematik lehren, 136, 4–9.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. mathematik lehren, 169, 2–7.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. mathematik lehren, 148, 4–10.

Büchter, A., Glade, M., Herold-Blasius, R., Klinger, M., Schacht, F. & Scherer, P. (Hrsg.). (2019). Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis. Berlin, Heidelberg, Deutschland: Springer Spektrum.

Embacher, F. (o.J.). Grundsätzliches zu Termen und Variablen. Skripten für einen schnellen Einstieg. mathe-online.at. URL: https://www.mathe-online.at/skripten/var/variable_grundsaetzliches.pdf (9.12.2020)

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. Praxis der Mathematik in der Schule, 38(53), 2–13.

Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Bonn: KMK.

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. mathematik lehren, 150, 4–12.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1–64.

Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert‘s? – Denken in Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule, 2(47), 1–7.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden, Deutschland: Vieweg.

Malle, G. & Bürger, H. (2000). Funktionen untersuchen. mathematik lehren, 103, 1–24

Roth, J. (o.J.). Didaktik der Algebra. Kapitel 3: Funktionen. Vorlesungsfolien. Abgerufen von https://dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_algebra/did_algebra_3_funktionen.pdf (10.12.2020)

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). (Hrsg.). Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik. Berlin, Potsdam, Deutschland: LISUM.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. Praxis der Mathematik in der Schule, 58(70), 2–8.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10(1), 3–37. https://doi.org/10.1007/BF03338719

Vollrath, H.-J. (1994). Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim, Leipzig, Wien, Zurich, Deutschland: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe. München, Deutschland: Springer Spektrum.

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford, Deutschland: Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. mathematica didactica, 5(4), 185–211.