Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

Wie wahrscheinlich ist es, beim Mensch-ärgere-Dich-nicht aus dem Häuschen zu kommen?

Diese einfache Frage ist für viele Menschen gar nicht einfach zu beantworten: In der ZEIT-Studie „Bürgerkompetenz Rechnen“ (Stiftung Rechnen, 2013) waren 34 % der repräsentativ befragten 18-65 Jahre alten Deutschen der Meinung, dass die Wahrscheinlichkeit „gleich 1/2“ ist, 9 % hielten es sogar für wahrscheinlicher aus dem Häuschen zu kommen als es nicht zu schaffen, und 17 % beantworteten die Frage lieber erst gar nicht. Nur 40 % der Befragten gaben in dem Multiple-Choice-Test die richtige Antwort – „kleiner 1/2“ –, und das auch dann, wenn man einzelne Personengruppen nach Altersklassen oder Bildungsabschlüssen aufgeschlüsselt betrachtete. Wie kann es sein, dass so eine einfache Frage auch noch von Universitätsprofessoren falsch beantwortet wird?

Unsere Eingangsfrage ist in der Tat ein besonders ergiebiger Ausgangspunkt für das Thema „Wahrscheinlichkeit“ und die damit in der Leitidee „Daten und Zufall“ verbundenen Themenkomplexe „Daten“ und „Kombinatorik“. Stochastische Problemstellungen, gerade bei (Würfel-)Spielen, begegnen Kindern und Erwachsenen in ihrem alltäglichen Umfeld und entspringen ihrer Lebenswelt (DZLM, o. J. [a]). Im Gegensatz zur Arithmetik fehlt es aber an der Ausbildung von Intuition im Umgang mit ihnen. Daher ist ein gezielter Aufbau von stochastischen Grundvorstellungen notwendig, der in Kombination mit einem grundlegenden Verständnis stochastischer Gesetzmäßigkeiten dazu führen kann, dass Schülerinnen und Schüler ein umfassendes Bild von Wahrscheinlichkeit aufbauen.

An der Frage nach dem Erfolg beim Mensch-ärgere-Dich-nicht kann man zum Beispiel gewisse Grundprinzipien des stochastischen Denkens herauskristallisieren. Neben dem „gefühlten“, intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff, der zum Beispiel beinhalten kann, dass Sechsen schwieriger zu würfeln sind als Einsen, gibt es eine mathematische Wahrscheinlichkeit, die rein aus theoretischen Überlegungen ermöglicht, Vorhersagen zu machen. Da ein (fairer) Würfel symmetrisch ist, gibt es keinen Grund, weshalb eine Zahl wahrscheinlicher als die andere sein sollte. Bis hierhin reicht das stochastische Grundwissen der meisten Menschen. Doch wenn für *einen* Wurf die Wahrscheinlichkeit 1/6 ist, eine 6 zu würfeln, ist dann nicht die Wahrscheinlichkeit, in *drei* Würfen eine Sechs zu würfeln, gleich $3 \cdot 1/6 = 1/2$? Falls ja – wie groß wäre dann die Wahrscheinlichkeit, in sechs Würfen eine Sechs zu würfeln? Und in 12 Würfen? Die Verknüpfung von Modell und Vorstellung, der Weg zu Extremfällen und das bewusste Hervorrufen von kognitiven Dissonanzen bietet Ansatzpunkte für einen verständnisorientieren Unterricht, die auch in den hier vorliegenden Diagnose- und Fördermaterialien verfolgt werden.

Neben den wichtigen, aber schwer zu durchdringenden Begriffen der *Wahrscheinlichkeit* und des *Zufalls* erhält das Thema „Daten“ immer mehr an Bedeutung und auch Raum nicht nur im Mathematikunterricht, sondern in der gesamten schulischen Bildung. Dies hat auch mit den im Rahmen der Digitalisierung möglichen Verarbeitungsmöglichkeiten zu tun. Es ist möglich und immer wichtiger, große Datenmengen zu verarbeiten und zu analysieren, zum Beispiel indem sie auf wenige Kennwerte reduziert werden. Der Umgang mit grundlegenden Kennwerten wie verschiedenen Mittelwerten, Minimum und Maximum, Median und Quartilen muss mit geringen Datenmengen eingeübt, aber mithilfe digitaler Medien auch mit großen Datenmengen nachvollzogen werden. Dabei spielt die Darstellung der Daten in vielfältiger Weise – als Histogramm, Graph, Boxplot, … – eine wichtige Rolle zum Aufbau von Grundvorstellungen der Stochastik. Auch hierauf gehen die Diagnose- und Fördermaterialien ein. Damit helfen die Materialien, die Grundlage für einen kritischen Umgang mit Daten in der Informationsgesellschaft zu legen. *Datenkompetenz* ist ein grundlegendes Ziel mathematischer Bildung, welches auch schon in der Grundschule verfolgt werden muss, wie der Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003) in seinen Empfehlungen schreibt.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose *zielgerichtet* und zum *passenden Zeitpunkt* einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen und Fehlvorstellungen und die Entstehung von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher *produktorientierten* oder eher *prozessorientierten Diagnostik* unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zu produktorientierter Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bzw. „kann“ oder „kann nicht“ bewertet. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Anderseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrundeliegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. *Diagnostische Interviews* stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der im direkten Gespräch Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen in Erfahrung gebracht werden können. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten oder eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „Nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik „Daten und Zufall“ entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung zwischen produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Es empfiehlt sich hier, die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anzuknüpfen. Die Förderaufgaben sind im *Dialog* zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen umsetzbar. Dabei entsteht auch die Möglichkeit einer Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützt. Diese Situationen bieten der Lehrkraft einen erneuten Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse und unterstützen die Schülerinnen und Schüler darin, sich die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst zu machen. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Daten und Zufall – Rechnen mit Ungewissheiten

Das mathematisch noch junge Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet eine Möglichkeit, mit Ungewissheiten umzugehen. Dabei wird ein für viele überraschender Kontrast zwischen der exakten Wissenschaft Mathematik und der „Unberechenbarkeit“ des Zufalls erzeugt. Wie kann man dies erklären?

Es ist kein Zufall, dass Daten und Zufall in einer Leitidee miteinander behandelt werden. Es geht in diesen beiden Teilbereichen der Stochastik um den Umgang damit, strukturelle Aussagen zu machen, die das Nicht-Wissen mit berücksichtigen.

Beginnen wir mit Daten: Diese werden erst dann wirklich interessant, wenn wir mit Datenmengen umgehen, die wir nicht vollständig überblicken können. Untersucht man zum Beispiel die Schuhgröße von Kindern, so arbeitet man mit Daten, die einzelnen Individuen zugeordnet werden können. Misst man diese nur bei einem Kind, so haben wir nur eine Maßzahl bestimmt. Misst man sie aber bei vielen Kindern – einer Klasse, der ganzen Schule, in ganz Deutschland oder in Japan – dann bedarf es Techniken, mit diesen Daten umzugehen. Die Reduktion der Urdaten auf einen oder wenige Kennwerte wie Minimum/Maximum, Median oder arithmetisches Mittel, versetzt uns in die Lage, mehrere Gruppen miteinander zu vergleichen. Üblicherweise müssen diese Werte gar nicht selbst bestimmt werden, sondern es bilden von dritten berechnete Kennwerte den Ausgangspunkt des Vergleichs von Populationen. Auch aus diesem Grund ist der Aufbau von Grundvorstellungen zu statistischen Kennwerten unerlässlich. Die Vermittlung des Begriffs des Minimums umfasst sowohl die Berechnung des Minimums, die vielfältige Darstellung und die Identifizierung des Minimums in verschiedenen Darstellungen. Der Aufbau solcher Grundvorstellungen wird durch das Fördermaterial zu verschiedenen Kennwerten mit verschiedenen Darstellungsformen, wie zum Beispiel dem Boxplot, der durch die Darstellung von Streuungsmaßen das Vergleichen von Verteilungen ermöglicht, unterstützt.

So wie im Themenbereich *Daten* der Zusammenhang zwischen Mengen von Messwerten und ihren Kennwerten hergestellt wird, wird im Bereich *Zufall* der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimenten geknüpft. Dabei ist eine besondere Herausforderung, dass die Begriffe „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit" schon alltagssprachlich belegt und mit Vorstellungen verknüpft sind, die nicht immer mit den mathematischen Begriffen übereinstimmen. Anstatt dies als „falsch" abzutun, muss an den Begriff der intuitiven Wahrscheinlichkeit angeknüpft werden, der mit der berechenbaren, mathematischen Wahrscheinlichkeit kontrastiert werden kann. Dabei ist der Fall *gleichwahrscheinlicher* Ergebnisse von Zufallsexperimenten als Grundvorstellung geeignet. Diese Gleichwahrscheinlichkeit – als Basis von Laplace-Experimenten – ist oft gegeben, zumeist aus Symmetriegründen. Bei einer geschickten Beschreibung von Experimenten kann sie zudem oft mit Mitteln der Kombinatorik – dem dritten Teilgebiet der Stochastik in der Schule, welches Daten und Zufall ergänzt (AK Stochastik, 2003) – dafür genutzt werden, auch kompliziertere Zufallsexperimente zu modellieren und Wahrscheinlichkeiten mathematisch über das Verhältnis von *günstigen* zu *allen möglichen* Ergebnissen des Zufallsexperiments zu berechnen.

So wie die Kombinatorik als Theorie des systematischen Zählens von Möglichkeiten die Grundlage für die Berechnung von mathematischen Wahrscheinlichkeiten ist, so ist die Auswertung von relativen Häufigkeiten, also einer weiteren Kennzahl von Daten, der Schlüssel zur Ermittlung von *statistischen Wahrscheinlichkeiten*. Hier ist es wiederum essentiell, aus der Kenntnis weniger Daten (zum Beispiel dem Ausgang von 1000 Würfelwürfen) auf die große Grundgesamtheit zu schließen: Die (statistische) Wahrscheinlichkeit kann als das relative Vorkommen eines bestimmten Ereignisses bei unendlich vielen Durchführungen des Experiments angesehen werden.

Für die unterrichtliche Behandlung von Daten und Zufall, insbesondere in der Primarstufe, ist der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

(a) sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

(b) den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

(c) die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen. So finden wir zum Beispiel im Fördermaterial zu „Daten und Zufall" eine Übung, bei der mit einem Zehnerwürfel gewürfelt wird. Dadurch kann eine wichtige Grundvorstellung zu Ergebnissen und Ereignissen von Zufallsexperimenten aufgebaut werden: (a) der Begriff des Ergebnisses wird mit Leben gefüllt (das, was beim Würfeln herauskommt), (b) die Schülerinnen und Schüler werden in die Lage versetzt, sich verschiedene Ergebnisse (eine 5 gewürfelt) vorzustellen und zu verändern, indem sie das Würfeln nur noch gedanklich, auch mit anderen Würfeln, ausführen, und (c) sie erhalten Zugang zum Begriff des Ereignisses und der Laplace-Formel, die sie nutzen, um konkrete Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Grundvorstellungen vermitteln in beide Richtungen im Modellierungskreislauf (Blum, 1985; Schupp, 1988) zwischen Mathematik und Welt.

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Im Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg für das Fach Mathematik finden sich die Kernkompetenzen *Daten erheben und Daten darstellen, statistische Erhebungen auswerten, Zählstrategien anwenden und Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen* im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Daten und Zufall" wieder. Das Ziel dieser Leitidee ist es, dass die Schülerinnen und Schüler Daten sammeln, dokumentieren, grafisch darstellen und mithilfe statistischer Kennwerte numerisch zusammenfassen, beschreiben und interpretieren (MBJS, 2015). Darüber hinaus sollen Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen ausgehend von Wahrscheinlichkeitsschätzungen und experimentellen Untersuchungen beschrieben werden. Dabei bilden kombinatorische Überlegungen sowie Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Grundlage für die Zufallserscheinungen, welche entscheidend für „ein grundlegendes Verständnis für Simulationen und Prognosen" sind (MBJS, 2015, S. 8).

Die Inhalte der Stochastik gliedern sich in drei Teilbereiche: Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, die auch oft in eigenen Unterrichtseinheiten thematisiert werden. Diese Teilbereiche sind allerdings nicht streng voneinander getrennt, sondern eng miteinander verbunden, wie in der Einführung schon verdeutlicht.

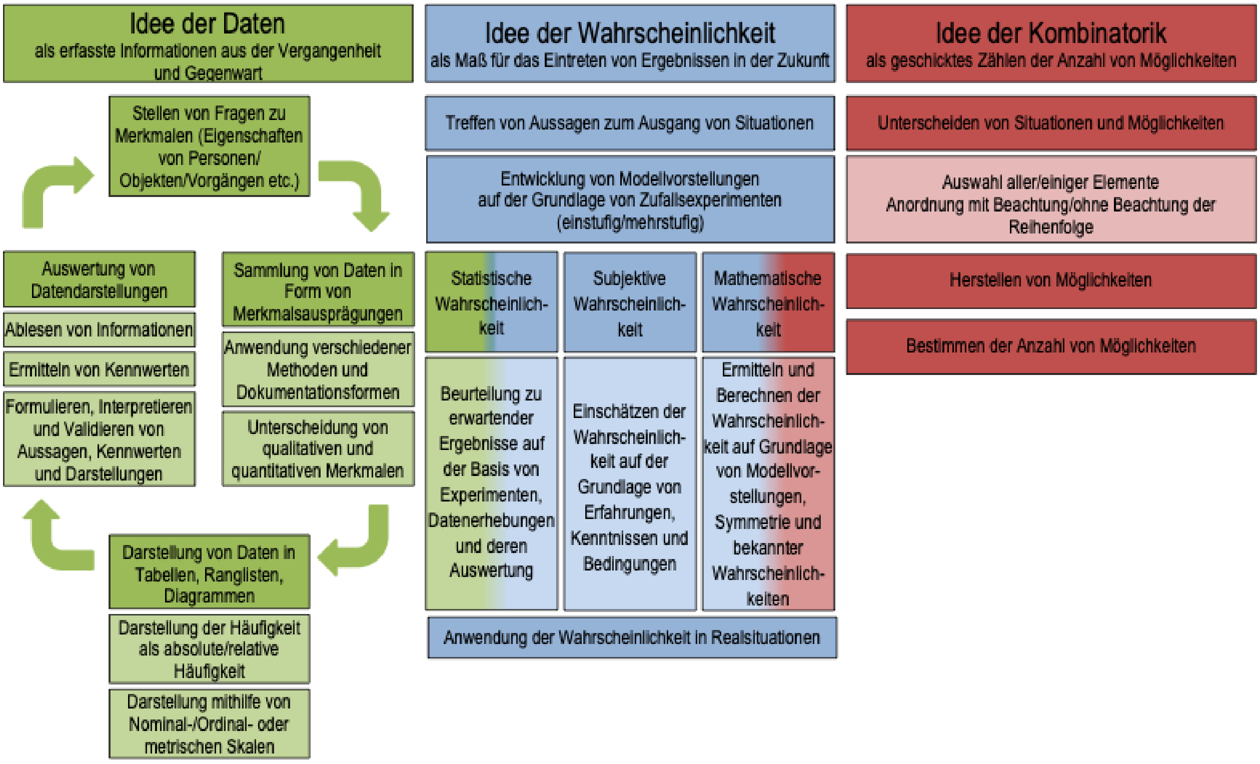

Abb. 1: Unterrichtskonzept zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich „Daten und Zufall“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Auf diesen Überlegungen aufbauend hat das LISUM ein Modell entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich „Daten und Zufall“ zu strukturieren (siehe Abb. 1). Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge oder die strikte Trennung von Unterrichtsinhalten, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte für individuelle Fördermaßnahmen. Es werden Querbezüge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten hergestellt. Im Modell stehen die drei folgenden Aspekte im Vordergrund: *Idee der Daten als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart, Idee der Wahrscheinlichkeit als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft* und *Idee der Kombinatorik als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten.*

In der ersten Spalte wird die *Idee der Daten als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart* anhand eines Zyklus dargestellt. Dieser Zyklus umfasst vier Phasen: (1) Stellen von Fragen zu Merkmalen, (2) Sammeln von Daten in Form von Merkmalsausprägungen, (3) Darstellen von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen und (4) Auswerten von Darstellungen. Die erste Phase steht am Anfang und umfasst die Motivation für die Durchführung einer statistischen Datenanalyse. Hierzu sollen interessante Fragen und Problemen aus der Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler als Ausgangssituation benutzt werden. Die zweite Phase sieht die Sammlung von Daten in Form von Merkmalsausprägungen vor. Ebenfalls soll bereits in dieser Phase der Plan der Datenerhebung (u. a. das Design der Untersuchung, das Unterscheiden von qualitativen und quantitativen Merkmalen, das Aufstellen und Konstruieren der Messinstrumente) bedacht werden. In der dritten Phase folgt die Darstellung der Daten in z. B. Tabellen, Ranglisten, Diagrammen. Diese umfasst die Auswahl der passenden Skalen (Nominalskala, Ordinalskala, metrische Skala) und Darstellung von Daten als absolute bzw. relative Häufigkeit. Im vierten Schritt folgt die Auswertung der Daten. Dabei werden geplante und evtl. ungeplante Analysen durchgeführt, wie etwa das Ablesen von Informationen und das Ermitteln von Kennwerten, die dazu dienen, Hypothesen zu generieren. Am Ende des ersten Zyklus stehen Schlussfolgerungen, die die Interpretation der Ergebnisse sowie die Kommunikation weiterer neuer Ideen vorsehen. Diese Ideen können den Zyklus dann erneut starten. Wie bei den meisten Kreisläufen ist auch hier ein Einstieg in jeder der vier Phasen möglich – beginnt man zum Beispiel mit der Analyse von Grafiken aus der Zeitung, so beginnt man in der vierten Phase.

In der zweiten Spalte wird die *Idee der Wahrscheinlichkeit als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft* dargestellt. Mit der Angabe der *Wahrscheinlichkeit* versucht man die Unsicherheit von Ereignissen zu beschreiben und zu erklären. Als ein quantitatives Maß gibt sie an, wie gewiss oder ungewiss es ist, dass ein bestimmtes Ereignis eintreten wird. Statistiken helfen dabei, das Phänomen „Zufall“ zu erforschen. So entstehen Verbindungen zwischen den Bereichen Statistik und Wahrscheinlichkeit. Als wichtige praktische Tätigkeit gilt in diesem Kontext das Experimentieren. Durch ein Zufallsexperiment kann ein zufälliger Vorgang untersucht werden. Dabei kann man verschiedene Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff unterscheiden. Die Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, die sich auf statistische Häufigkeiten zurückführen lassen, basieren auf Zufallsexperimenten, die unter den gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden können. Angenommen die Zufallsversuche werden unter gleichen Bedingungen oft genug wiederholt, dann kann die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses verwendet werden. Anderseits ist die *„subjektive*“ oder *„intuitive“ Wahrscheinlichkeit* von der statistischen Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden, welche die Überzeugung einer einzelnen Person von dem Eintreten oder Nicht-Eintreten eines Ereignisses ausdrückt, die auf individuelle Erfahrungen mit der eigenen Person oder bestimmten Situationen (der sogenannten inneren statistischen Datenbank) basieren. Zuletzt redet man über die *mathematische Wahrscheinlichkeit* beim Ermitteln und Berechnen der Wahrscheinlichkeiten auf Grundlage von Modellvorstellungen. Hierbei werden zum Beispiel Symmetrie-Eigenschaften des Modells herangezogen, um die Gleichwahrscheinlichkeit zweier Ereignisse zu begründen, sowie letztlich die erst 1930 formulierten Kolmogorov-Axiome verwendet, um weitere Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

In der dritten Spalte wird die *Idee der Kombinatorik als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten* dargestellt. Hierzu ist festzustellen, (1) welche Möglichkeiten es gibt, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzuordnen und (2) wie viele Möglichkeiten es dafür insgesamt gibt. Bei der Klassifizierung von kombinatorischen Aufgaben sind folgende Fragen zu klären:

- *Werden alle gegebenen Elemente benötigt oder nur eine Auswahl?*
- *Werden die Elemente nur einmal verwendet oder dürfen sie mehrfach verwendet werden?*
- *Ist die Reihenfolge unerheblich oder muss die Reihenfolge beachtet werden?* (DZLM, o. J. [b])

Aus diesen Unterscheidungen ergeben sich verschiedene Zählstrategien: *Permutation*, *Variation* und *Kombination*. Bei der Idee der Kombinatorik geht es also maßgeblich um das systematische Abzählen von Möglichkeiten, das gerade bei Laplace-Wahrscheinlichkeiten die Grundlage zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bildet.

Aus dem LISUM-Modell ist erkennbar, wie und an welchen Stellen die Verbindungen zwischen den drei Ideen im Mathematikunterricht hergestellt werden sollen. Da aber Stochastik kein eigenständiges Stoffgebiet ist – „Stochastische Inhalte sollen nicht unverbunden neben den gängigen Inhalten des Mathematikunterrichts stehen, sondern mit diesen vernetzt werden“ (AK Stochastik, 2003, S. 21) – kann die Arbeit mit Daten und auf Daten aufbauenden Modellbildungen als Unterrichtsprinzip in verschiedenste Gebiete des Mathematikunterrichts integriert werden.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken die genannten Bereiche und Kompetenzen auf verschiedenen Niveaustufen (B-G) und damit die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe ab. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Förderbedarfnotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch“ bzw. „kann“ oder „kann nicht“, sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Dazu wurden alle Diagnoseaufgaben in das oben beschriebene vom LISUM entwickelte Modell und in den neuen Rahmenlehrplan eingeordnet.

Auch die Förderaufgaben sind entsprechend des Modells geordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den entsprechenden Förderaufgaben verfolgt wird.

Zum Beispiel sollen die Schülerinnen und Schüler im Diagnosematerial zum Themenbereich „Daten“ (Niveaustufe B im Aufgabenteil 2) die Anzahl der gegebenen Gegenstände in die Tabelle eintragen und schließlich ins Diagramm übertragen. Hinsichtlich des LISUM-Modells geht es um die grüne Spalte zur Idee der Daten und das Feld „Darstellung von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen“. Mit dieser Aufgabe können Sie also feststellen, ob die Schülerin oder der Schüler die vorgegebenen Daten aus einem Text in unterschiedliche Darstellungen – hier Tabelle, Diagramm – übertragen kann. Falls die Schülerin oder der Schüler keine sinnvolle Antwort in der Tabelle oder in dem Diagramm gibt (z. B. die Darstellung der Häufigkeit der Schülerin oder des Schülers beginnt nicht bei der Null, die Achse mit der Darstellung der Ergebnisse ist nicht gleichmäßig eingeteilt oder enthält nicht alle Ergebnisse), können Sie die an dieser Stelle passende Förderaufgabe aus dem grünen Teil mit der Schülerin oder mit dem Schüler erarbeiten bzw. bearbeiten, wie etwa das Ordnen von bunten Zetteln in einem Diagramm (Aufgabe 20 im Fördermaterial). Dabei soll die Schülerin oder der Schüler alle Zettel in der gleichen Farbe aneinander ohne Lücken an der Tafel anheften. Durch die enaktive Tätigkeit des Ordnens der Zettel gleicher Farben übereinander entstehen Säulen und somit ein Säulendiagramm. Bei der gemeinsamen Bearbeitung der Förderaufgaben kann die Diagnose verfeinert werden.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam werden zu lassen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen, indem zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler konkrete Anregungen zur unterrichtlichen Bearbeitung gegeben werden. Für jede Idee aus dem LISUM-Modell ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

Spezielle Hinweise zu den im Material angesprochenen Teilbereichen

Kombinatorik

Die Kombinatorik wird oft als Kunst des Zählens oder geschickten Zählens betrachtet, die sich mit den Fragen nach zulässigen kombinatorischen Möglichkeiten (*Welche gibt es?)* und deren Anzahl (*Wie viele Möglichkeiten gibt es?)* befasst. Der Begriff „geschicktes Zählen" verdeutlicht, wie dabei vorgegangen werden soll: möglichst geschickt bzw. möglichst einfach (DZLM, o.J. [c]). Es geht somit darum, möglichst einfache Wege zur Anzahlbestimmung zu finden, was schon im Niveau A thematisiert wird (RLP, 2015). Es geht also maßgeblich um das systematische Abzählen von Möglichkeiten, das eine Grundlage zur Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten (Herbart, 1841) und zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bildet (AK Stochastik, 2003). Somit sind die elementaren kombinatorischen Inhalte in allen Zweigen der Schulmathematik bedeutsam und sollen in angemessener Weise in den Stochastikunterricht der Primar- und Sekundarstufe integriert werden.

Bei kombinatorischen Aufgabenstellungen stehen vor allem die Lösungsprozesse im Vordergrund. Ziel ist es, ausgehend vom Probieren und dem ersten noch sehr unsystematischen Finden einzelner Anordnungen, die Schülerinnen und Schüler an systematische Vorgehensweisen heranzuführen. Dabei können sie Strategien entwickeln, um damit alle Anordnungen sicher zu finden.

Für die Entwicklung dieser Strategien ist es hilfreich, die Situationen handelnd zu begreifen sowie zeichnerisch und symbolisch darzustellen. Dabei ist es wichtig, Situationen und Anordnungen immer wieder miteinander zu vergleichen. Durch die Bearbeitung von Situationen der gleichen Art erlangen die Schülerinnen und Schüler ein tiefgreifendes Verständnis für die gemeinsamen mathematischen Strukturen der Situationen.

Das allgemeine Zählprinzip der Kombinatorik stellt eine wichtige Grundvorstellung für das Abzählen von Möglichkeiten dar. Werden Elemente aus zwei oder mehr unterschiedlichen Mengen auf jede mögliche Art und Weise einander zugeordnet, so kann die Gesamtzahl der Möglichkeiten als Produkt der Kardinalität der Mengen berechnet werden. Eine klassische Aufgabenstellung zu dieser Grundvorstellung ist zum Beispiel: *Es gibt vier T-Shirts, zwei Hosen und drei Paar Schuhe zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich verschieden anzuziehen?* Die Situation kann unterschiedlich dargestellt werden, zum Beispiel durch das Legen der Objekte, bildlich, symbolisch mit Buchstaben oder mit einem Baumdiagramm. Das Auflisten und Abzählen ist der elementarste Lösungsweg, der den Lernenden zur Verfügung steht. Eine systematische Auflistung (mit Material oder schriftlich) stellt sicher, dass Figuren nicht doppelt gezählt oder vergessen werden. Zudem ergibt sich durch die Art der Darstellung auch die Verknüpfung zum Rechteckmodell der Multiplikation als zentraler Grundvorstellung aus der Arithmetik. Die zum Beispiel gehörende Multiplikation würde 4 · 2 · 3 = 24 lauten. Sie ergibt sich letztendlich aus der Kardinalität des Kreuzproduktes der drei Mengen (T-Shirts, Hosen, Schuhe).

Für die geschickte Bestimmung aller Möglichkeiten für das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen ist eine Vielfalt an Grundsituationen (Variation, Permutation, Kombination) charakteristisch. Bei einer Anordnung (*Permutation*) werden alle Elemente der Grundmenge betrachtet, wohingegen bei Auswahlen (Variationen oder Kombinationen) nur eine Stichprobe der Grundmenge im Fokus des Interesses liegt. Je nachdem, ob die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird (Variation) oder nicht (Kombination), gibt es geordnete und ungeordnete Stichproben. Bei Anordnungen (Permutationen) wird dagegen immer die Reihenfolge berücksichtigt. Dabei müssen bei Permutationen, Variationen und Kombinationen jeweils zwei Fälle unterschieden werden:

- Permutation/Variation/Kombination *ohne Wiederholung*, wenn die Objekte untereinander unterscheidbar sind und
- Permutation/Variation/Kombination *mit Wiederholung*, wenn die Objekte (teilweise) nicht unterscheidbar sind.

Diese Anzahlen können für übersichtliche Situationen noch naiv bestimmt werden, spätestens bei großen oder gar unbestimmten Anzahlen von zu kombinierenden Objekten werden aber Formeln verwendet, deren Entstehung in einfachen Fällen nachvollzogen werden sollte.

1. Fall: Es wird keine Auswahl getroffen

Wenn keine Auswahl an Objekten getroffen wird, so berechnet man die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten der Objekte mithilfe der *Permutation*. Ein passendes Beispiel für eine Permutation ohne Wiederholung wäre: „In einer Urne befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?“ Um die Anzahl verschiedener Kombinationsmöglichkeiten von *n* unterscheidbaren Objekten zu berechnen, ergibt sich induktiv die Formel $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$, die mit $n!$ („n Fakultät“) abgekürzt wird: Zuerst wird aus n Elementen eines ausgewählt, aus den verbleibenden (n-1) Elementen ein weiteres, und so fort, bis nur noch ein Element übrig bleibt.

Sind nicht alle Objekte unterscheidbar, so muss die Anzahl der Permutationen korrigiert werden, indem durch die nicht unterscheidbaren Permutationen dividiert wird. Ein passendes Beispiel wäre: „In einer Urne befinden sich drei grüne und zwei gelbe Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe zu ordnen?“ Wären alle Kugeln unterscheidbar, so ergäben sich 5! Möglichkeiten, die durch die Permutationen der drei und zwei Objekte dividiert werden, wodurch sich $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$ Möglichkeiten ergeben. Allgemein gilt für n Objekte, bei denen Gruppen von $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_i$ Objekten ununterscheidbar sind, dass die Anzahl der Möglichkeiten $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!}$ beträgt.

2. Fall: Es wird eine Auswahl getroffen

Werden nicht alle Elemente einer Gesamtmenge berücksichtigt, so berechnet man die *Kombination* oder die *Variation*.

Die Kombination gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, eine bestimmte Menge von unterscheidbaren Objekten aus einer größeren Gesamtmenge auszuwählen. Ein passende Fragestellung ist: „*In einer Urne befinden sich 16 verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?“* Da es für die erste Kugel 16 Möglichkeiten, für die zweite nur noch 15, für die dritte nur noch 14 gibt – dies kann handlungsorientiert nachvollzogen werden – erhält man zunächst 16·15·14 Möglichkeiten, oder, anders geschrieben, $\frac{16!}{13!} = \frac{16!}{(16-3)!}$, oder allgemein für die Auswahl von k aus n Elementen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Zu beachten ist aber, dass für die ausgewählten Elemente die Reihenfolge der Auswahl irrelevant ist, was schließlich zur Formel $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ führt, die mit dem Binomialkoeffizienten „n über k“ oder „k aus n“ in Zeichen $\binom{n}{k}$ abgekürzt wird. Ist die Reihenfolge hingegen nicht irrelevant, so erhält man $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten für die sogenannte Variation.

Erlaubt man, dass Objekte mehrfach ausgewählt werden dürfen, so erhält man die Kombination bzw. Variation *mit Wiederholung*. Für die Variation mit Wiederholung, also die k-fache Auswahl aus n Elementen ergibt sich aus dem allgemeinen Zählprinzip der Kombinatorik die einfache Formel n^k. Für die Kombination mit Wiederholung, also für eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge können wiederum Binomialkoeffizienten verwendet werden. Eine entsprechende Fragestellung wäre: „*In einer Urne befinden sich sieben verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurückgelegt wird*." Um zu berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte aus einer Gesamtmenge von n Objekten auszuwählen, wobei die Objekte mehrmals ausgewählt werden dürfen, kann man den Binomialkoeffizienten $\binom{n+k-1}{k}$ nutzen. Diese Formel lässt sich zum Beispiel über eine geeignete Umformulierung der Fragestellung auf Differenzen zeigen.

Für das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen stehen Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Strategien zur Verfügung:

- Das (systematische) Auflisten und Abzählen,
- die geschickte Darstellung in Tabellen- oder Matrixform oder als Baumdiagramm,
- das Verwenden kombinatorischer Zählstrategien oder
- das Nutzen der kombinatorischen Formeln.

Im Unterricht der Grundschule und Sekundarstufe I spielt die mathematische Bezeichnung dieser Grundsituationen keine wichtige Rolle. Vielmehr müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, diese zu unterscheiden und für verschiedene Situationen die richtige Interpretation zu finden, nötigenfalls über den Rückbezug auf das allgemeine Zählprinzip. Somit bieten kombinatorische Kontexte ein gutes Übungsfeld für das Problemlösen und Modellieren, vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung und die Möglichkeit, das Interesse an Mathematik durch die Möglichkeit zum spielerisch-experimentellen Vorgehen zu wecken. Es eignen sich zum Beispiel einfache Spielmaterialien wie Bausteine oder Anziehpuppen.

Wahrscheinlichkeit

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehört nicht nur in der Schule zu den sehr schwer zu fassenden mathematischen Konstrukten. Dies resultiert zum einen daraus, dass „Wahrscheinlichkeit" umgangssprachlich und im Alltag für alle Menschen schon bekannt und mit gewissen Erwartungen belegt ist, zum anderen aber die mathematisch korrekte Beschreibung der Phänomene eine sehr präzise Sprache und Formalisierung benötigt. Gleichzeitig birgt die Alltagsnähe und hohe Anwendbarkeit der mathematischen Begriffe viele Chancen für einen reichhaltigen und interessanten Unterricht, bei dem die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen sammeln können und diese mit den formalen Werkzeugen, die sie im Laufe der Zeit erwerben, immer sicherer mathematisieren können.

Der Begriffsaufbau beginnt bereits in den ersten Klassen der Grundschule. Hier werden die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler zunächst im Rahmen der *subjektiven Wahrscheinlichkeit,* einer Einschätzung des Grads der Sicherheit, mit dem man das Eintreffen eines Ergebnisses erwartet, beschrieben. Eine Besonderheit ist dabei, dass – im Gegensatz zum sonstigen Eindruck der Schülerinnen und Schüler von Mathematik – es nicht eine feste, richtige Lösung für den Ausgang eines Experiments gibt, sondern gerade *die Möglichkeit verschiedener Ergebnisse* den Begriff der Wahrscheinlichkeit ausmacht. Dies muss im Unterricht in allen Jahrgangsstufen immer wieder neu erfahren und gefestigt werden. Dazu werden Situationen diskutiert, in denen nur eines oder mehrere Ergebnisse möglich sind, und Experimente durchgeführt und ihre Ergebnisse protokolliert, um zu explorieren, wie man die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Experimente fassen kann. Als Grundfrage kann hier dienen, welche Ergebnisse nie, selten, häufig oder immer auftreten.

Neben der Bedeutung der Begriffe „Ergebnis" und den daraus entstehenden „Ereignissen" geht es auch darum, den Gebrauch des Wortes „wahrscheinlich" zu präzisieren, welches üblicherweise für „sehr wahrscheinlich" verwendet wird (s. a. Krüger, Sill & Sikora, S. 69). Die subjektive Wahrscheinlichkeit, die die Skala von „unmöglich" über „fast unmöglich", „weniger wahrscheinlich", „50:50", „eher wahrscheinlich", „fast sicher" bis „sicher" abdeckt, kann und soll an verschiedenen Alltagssituationen und in speziellen Experimenten, wie Münzwurf, Würfeln mit verschiedenen Gegenständen und dem Drehen am Glücksrad, diskutiert werden und somit das Phänomen „möglicher, aber nicht sicherer" Ereignisse ausgeleuchtet werden. Der spezielle Charakter dieser Experimente – insbesondere die Wiederholbarkeit und die Möglichkeit, verschiedenen Ergebnissen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen – sollte dabei mit Situationen im Alltag verglichen werden. Es lohnt sich weiterhin, dies mit Unsicherheiten durch mangelnde Information zu vergleichen: Ist der Geburtstag der Mutter zufällig, bloß weil man ihn nicht kennt?

Diese Tätigkeit des Experimentierens setzt sich über alle Jahrgangsstufen hinweg fort, wobei die Komplexität der Zufallsexperimente steigt und diese später auch in mehrstufigen Experimenten zusammengefügt werden. Für die darauf aufbauende Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten im Rahmen der *mathematischen Wahrscheinlichkeit* steht in der Schule hauptsächlich die Regel von Laplace zur Verfügung. Hierfür wird der Begriff des *Zufallsexperiments* benötigt. Idealerweise sind dies Experimente, deren Ergebnisse nur vom Zufall gesteuert werden, und die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind (Fischer, Lehner & Puchert S. 78) – doch diese Definition ist nicht die zentrale Anforderung. Entscheidend ist hingegen, dass zu einem Zufallsexperiment immer eine Menge von möglichen Ergebnissen, die Ergebnismenge, gehört. In der Sekundarstufe I wird üblicherweise nur mit endlichen Ergebnismengen gearbeitet. Für die klassischen Zufallsexperimente sind die Ergebnismengen zum Beispiel $\Omega_M = \{K, Z\}$ für den Münzwurf, bei dem „Kopf“ oder „Zahl“ mögliche Ergebnisse sind, oder $\Omega_W = \{1,2,3,4,5,6\}$ für den Wurf eines Würfels. Rein formal kann nun jedem Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit, also eine Zahl im Intervall [0,1], zugeordnet werden, mit der Bedingung, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss – denn es ist „sicher“, dass eines der Elemente der Ergebnismenge als Ergebnis des Zufallsexperiments herauskommt. Die weitere Grundzutat der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Additivität von Wahrscheinlichkeiten – die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ergebnisse $\{E_1, E_2, E_3\}$ herauskommt, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten: $P(\{E_1, E_2, E_3\}) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$. Hierbei werden Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge beschrieben und es werden ihnen über die Summenregel Wahrscheinlichkeiten zugewiesen. Diese mathematische Beschreibung ist die Essenz der Kolmogorov-Axiomatisierung (Krüger, Sill & Sikora, S. 239, Fischer, Lehner & Pucher, S. 81, Büchter & Henn S.183), die in der Schule nicht formal behandelt wird, aber leicht erschlossen werden kann und über eine Grundvorstellung zur Verfügung stehen muss.

Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff erlaubt eine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten als Maß für die Sicherheit des Eintretens eines Ereignisses, wenn die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Ergebnis bekannt ist. Im einfachsten Fall ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis – zum Beispiel aus Symmetriegründen, wie beim Münzwurf, beim Würfeln, beim Ziehen aus einer Urne – die gleiche. Aus den Kolmogorov-Axiomen folgt dann, dass diese Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ beträgt, wenn *n* die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist. Auch Zufallsgeräte, die auf Verhältnissen basieren (zum Beispiel das Glücksrad), können durch eine hinreichend feine Unterteilung letztendlich auf Laplace-Wahrscheinlichkeiten zurückgeführt werden.

Aus dieser Basisüberlegung ergeben sich zusammen mit den kombinatorischen Werkzeugen (siehe vorhergehender Absatz) vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. Die Laplace-Formel, bei der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Quotient der Anzahl der Elemente der Ereignismenge und der Anzahl der Elemente der Ergebnismenge berechnet wird, entsteht unmittelbar aus der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten. Geht man dann zu mehrstufigen Zufallsexperimenten über, so ergeben sich wiederum aus den kombinatorischen Eigenschaften die erste und zweite Pfadregel. Dies kann zum Beispiel bei der Modellierung der Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln mit zwei Würfeln nachvollzogen werden. Das eigentliche Zufallsexperiment hat die Ergebnismenge {2,3,…,12}. Betrachtet man aber die zugrundeliegende Tätigkeit, so erkennt man, dass es sich im Grunde um ein Laplace-Experiment mit der Ergebnismenge $\{(1,1), (1,2), \dots (6,5), (6,6)\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ handelt, bei dem Paare mit gleicher Summe zu einem Ereignis zusammengefasst werden. Weiterhin legt die zweite Darstellung als kartesisches Produkt nahe, dass dasselbe Experiment auch als zweistufiges Experiment, bei dem jeweils mit einem Würfel gewürfelt wird, angesehen werden kann. Es lohnt sich, bei übersichtlichen Beispielen wie diesem auch in der Schule die vollständigen Ergebnisräume aufzuschreiben und ihre Entstehung im Unterricht zu thematisieren und zu diskutieren. Ebenso ist es hilfreich, die Parallelen zwischen Baumdiagrammen in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung explizit anzusprechen.

In Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeit einzelner Ergebnisse nicht a priori bekannt ist, kann diese über das empirische Gesetz der Großen Zahlen (Büchter/Henn, S. 174) bestimmt werden. Dieses besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses eines oft wiederholten Zufallsexperiments (daher der Wunsch nach Wiederholbarkeit!) bei der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses stabilisiert. Dieses Gesetz ist so nicht beweisbar, aber empirisch erfahrbar. Aus diesem Grund gehört es mit zu den Grunderfahrungen im Unterricht, Zufallsexperimente zu wiederholen und ihren Ausgang zu protokollieren, um über die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse einen Zugang zur *statistischen* oder *frequentistischen* Wahrscheinlichkeit zu erhalten. Damit wird wieder an die Grunderfahrungen angeknüpft, wie überhaupt stets das fragegeleitete Experimentieren, Modellieren, Protokollieren und Auswerten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung besonderen Raum im Unterricht einnimmt.

Daten

So wie die Kombinatorik die Entwicklung des Themas mathematische Wahrscheinlichkeit unterstützt, so ist der Umgang mit Daten Grundlage für die statistische Wahrscheinlichkeit, so wie auch im LISUM-Modell dargestellt. Das Thema „Daten" umfasst aber weit mehr als nur die quantitative Behandlung von relativen Häufigkeiten. Ausgehend von (für die Schülerinnen und Schüler relevanten) *Fragen* kann das Sammeln von Daten als das *Erfassen* von Merkmalsausprägungen zu verschiedenen Merkmalen als Schüleraktivität gestaltet werden. Dabei werden verschiedene Methoden der Erfassung und Dokumentation eingeübt. Weiterhin kann und soll dabei auf die unterschiedliche Natur von Merkmalen eingegangen werden. Neben *nominalen* Merkmalen, die eine Merkmalsausprägung in Worten beschreibbar machen (z. B. Farben), gibt es *ordinale* Merkmale, die über eine Reihenfolge verfügen (z. B. Schulnoten). Ist es sinnvoll, mit einem ordinalen Merkmal auch noch zu rechnen, dann spricht man von einem *metrischen* oder *kardinalen* Merkmal (z. B. Körpergrößen, aber nicht Schulnoten!). Auch metrische Merkmale werden in der Fachliteratur weiter unterschieden, je nachdem ob man nur Abstände vergleichen kann (intervallskaliert, z. B. Zeitangaben im Kalender), auch Verhältnisse vergleichen kann (verhältnisskaliert, zum Beispiel Preise, Längen, Gewichte) oder sogar eine natürlich gegebene Einheit hat (absolut skaliert, zum Beispiel Anzahlen) (vgl. Krüger, Sill & Sikora, S. 226f.). Obgleich die Art der Merkmale im Unterricht thematisiert wird, sind die Bezeichnungen für die dazugehörigen Skalen nicht zwangsläufig Unterrichtsinhalt (Krüger, Sill & Sikora, S. 228).

Liegen solcherart erfasste Daten vor, die entweder selbst gewonnen wurden oder aus fremden Quellen wie dem Internet stammen, so ist normalerweise mindestens eine *Darstellung* der Daten, üblicherweise aber auch eine *Reduktion* der Daten auf gewisse Kennwerte notwendig. Abhängig von den verwendeten Skalen können verschiedene Darstellungen verwendet und Kennwerte bestimmt werden:

- Für Nominalskalen sind Strichlisten und Häufigkeitstabellen sowie Säulen-, Balken- und Kreisdiagramme geeignet. Aus diesen lassen sich der am häufigsten vorkommende Wert (Modus) und relative Häufigkeiten gewinnen.

- Für Ordinalskalen sind zusätzlich Minimum, Maximum, Median und Quartile bestimmbar, die besonders gut in einem Boxplot dargestellt werden können. Dazu empfiehlt es sich von der unsortierten Urliste von Merkmalsausprägungen auf eine Rangliste überzugehen, aus der sich die o. g. Kennwerte leicht ablesen lassen.

- Auf metrischen Skalen ist zusätzlich die Berechnung von Spannweite (Differenz von Minimum und Maximum) und Quartilsabstand möglich, ebenso die Berechnung des arithmetischen Mittels (vorzugsweise auf verhältnisskalierten Merkmalen). Das arithmetische Mittel kann hierbei gut mit dem Median kontrastiert werden.

Die Berechnung von Kennwerten ermöglicht den Vergleich und die *Auswertung* von verschiedenen Datenerhebungen, die zur Beantwortung der zu Beginn gestellten Fragen führen sollen. Dabei sollte immer wieder der unvermeidbare Informationsverlust auf dem Weg von der Datenerhebung über die Datendarstellung und Datenreduktion auf die Datenauswertung thematisiert werden, auch zum Beispiel über operationalisierte Übungen, bei denen nach der Auswirkung von Datenänderungen auf die Kennwerte gefragt wird. Damit wird auch die Grundlage für das Erkennen von Manipulationen von und mit Daten gelegt, welches im Unterricht ebenfalls zu diskutieren ist.

Literatur und weiterführende Literatur

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule, 23*(3), 21–26. http://stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang23-2003/heft3/Langfassungen/2003-3_ak-empfehl.pdf [19.7.2018]

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). Elementare Stochastik. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? – Stochastische Vorstellungen fördern. *Praxis der Mathematik in der Schule, 4*, 1–7.

Fischer, G., Lehner, M. & Puchert, A. (2015). Einführung in die Stochastik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Herbart: Umriss pädagogischer Vorlesungen. Zweite vermehrte Ausgabe. Göttingen: Druck und Verlag der Dieterichschen Buchhandlung, 1841

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. *mathematik lehren, 150*, 4–12.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, Chr. (2015). Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). (Hrsg.). *Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik.* Berlin, Potsdam.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Braunschweig: Schroedel.

Ulm, V. (2010). Stochastik in der Grundschule. Dokumentation der Tagung der Regionalkoordinatoren von „SINUS an Grundschulen“. http://www.sinus-an-grundschulen.de/uploads/media/Workshop_Ulm_Stochastik.pdf [19.7.2018]

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Webseiten

https://primakom.dzlm.de/inhalte/daten-häufigkeit-wahrscheinlichkeit [12.10.2018]

https://primakom.dzlm.de/inhalte/daten-h%C3%A4ufigkeit-wahrscheinlichkeit/kombinatorik/hintergrund [12.10.2018]

https://kira.dzlm.de/mathe-mehr-als-ausrechnen/prozessbezogene-kompetenzen-f%C3%B6rdern-beispielaufgaben/prozessbezogene-1 [12.10.2018]

Stiftung Rechnen (2013). http://stiftungrechnen.de/mehr-erleben/projektarchiv/studie-buergerkompetenz-rechnen/ [12.10.2018]