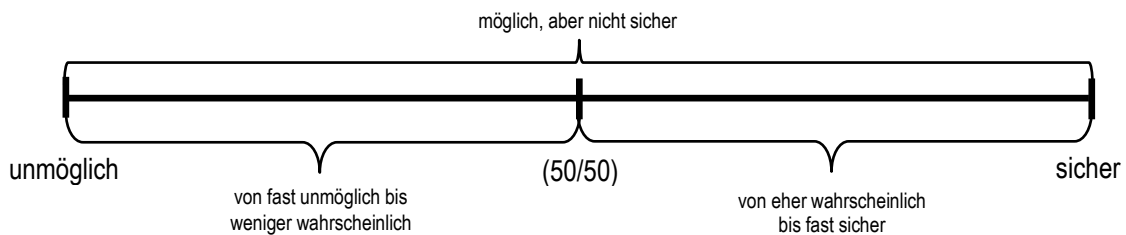




Darum geht es:

Die Idee der Wahrscheinlichkeit spielt in vielen Bereichen der Natur oder der Gesellschaft eine große Rolle. Beispiele sind Glücksspiele, Wettervorhersagen oder Risikoeinschätzungen für Versicherungen. Aussagen zur Wahrscheinlichkeit sind Ausdruck des Erwartungsgefühls für das mögliche Eintreffen eines Ergebnisses zu einem Vorgang in der Zukunft.

Das subjektive Erwartungsgefühl (**subjektive Wahrscheinlichkeit**) beschreibt den „Grad der Sicherheit“, mit dem man das Eintreffen des Ergebnisses erwartet. In diesem Sinne hat der Begriff „wahrscheinlich“ meist die Bedeutung, dass das Eintreten eines Ergebnisses eher erwartet wird. Bei der Verwendung des Begriffs „unwahrscheinlich“ wird das Eintreten eines Ergebnisses eher nicht erwartet. Die subjektive Wahrscheinlichkeit entzieht sich der Berechnung mit mathematischen Methoden. Dennoch lässt sie sich auf folgender Skala darstellen:



Bei der Angabe des subjektiven Erwartungsgefühls kann auf der Skala kein bestimmter Punkt zugeordnet werden, sondern immer nur ein bestimmter Bereich. Die qualitative Bestimmung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten bildet den Beginn der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten im Mathematikunterricht. Sie dient dem Aufbau von Grundvorstellungen noch vor dem formalen Rechnen.

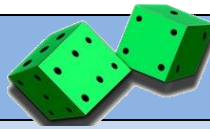
Zu einer begründeten Erwartung kommt man, indem man alle möglichen Ergebnisse und die zugehörigen Einflussfaktoren für das Eintreffen der Ergebnisse betrachtet. Diese begründete Erwartung kann als „Chance“ (Grundschule) sowie auch als „Wahrscheinlichkeit“ (Sekundarstufe I) beschrieben werden. Im Alltag verwenden die Schülerinnen und Schüler schon Formulierungen wie „große Chance“, „kleine Chance“ bzw. „50/50-Chance“. Zu Beginn der mathematischen Bildung werden Chancen als Verhältnisse zweier Zahlen angegeben. Sie beschreiben das Verhältnis „Anzahl günstiger Ergebnisse : Anzahl ungünstiger Ergebnisse“. Beispielsweise ist die Chance, mit einem Spielwürfel die Augenzahl „3“ zu würfeln, 1 : 5 (lies: 1 zu 5).

Im Rahmen der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (**mathematische Wahrscheinlichkeit**) wird die Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis „Anzahl der günstigen Ergebnisse“ : „Anzahl der möglichen Ergebnisse“ eines Zufallsexperiments angegeben. Damit wird in Abgrenzung zur Chance eine andere Bezugsgröße genutzt. Die Verhältnisse werden als gemeine Brüche, Dezimalbrüche oder durch Prozentangaben dargestellt. Im Würfelbeispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine „3“ zu würfeln, somit $\frac{1}{6}$. Dieser Angabe liegt die Regel von Laplace zugrunde, welche voraussetzt, dass alle Augenzahlen des Würfels mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Im Rahmenlehrplan wird der Planung, Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten eine besondere Bedeutung beigemessen. Alle möglichen Ergebnisse eines zufälligen Vorgangs (auch Zufallsexperiments) bilden die Ergebnismenge Ω . Ein Ereignis A ist eine Menge von möglichen Ergebnissen. Jedes Ereignis ist somit Teilmenge der Ergebnismenge.

Beispiel:

Zufallsexperiment	Ergebnismenge	Ereignis
Werfen eines Spielwürfels	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$	„gerade Augenzahl“ $A = \{2,4,6\}$



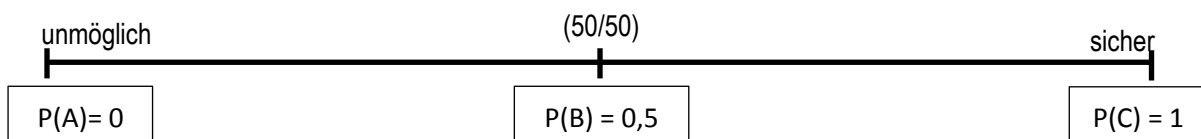
Didaktische Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A wird mit $P(A)$ bezeichnet (P steht für „probability“). Sie nimmt immer einen Wert von 0 bis 1 bzw. von 0 % bis 100 % an.

Sofern eine Ereignismenge A alle Elemente der Ergebnismenge Ω enthält, spricht man vom sicheren Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis beträgt 1. Ein Ereignis ist unmöglich, wenn kein Ergebnis des zufälligen Vorgangs für dieses Ereignis günstig ist. Die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis beträgt 0. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen nutzt man die elementare Additionsregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der dafür günstigen Ergebnisse.

Die obige Skala für die subjektive Wahrscheinlichkeit kann mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit in Einklang gebracht werden:



Damit sind auch andere Wahrscheinlichkeiten zwischen „unmöglich“ und „sicher“ über ihren Wert auf der Skala lokalisierbar.

Das Ereignis, welches genau dann eintritt, wenn das Ereignis A nicht eintritt, heißt Gegenereignis \bar{A} . Die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis ist 1, da sich die Ereignismengen genau zur Ergebnismenge ergänzen.

Haben alle Ergebnisse eines zufälligen Vorgangs die gleiche Wahrscheinlichkeit, zum Beispiel aus Symmetriegründen (wie bei einem Spielwürfel), kann mit der Laplace-Formel gerechnet werden.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Man unterscheidet einstufige von mehrstufigen Zufallsexperimenten. Zufallsexperimente werden mehrstufig genannt, wenn sie mit mehreren Teilvorgängen modelliert werden können, die gleichzeitig oder nacheinander ablaufen. Mithilfe eines Baumdiagramms kann man den Ablauf der nacheinander ausgeführten Teilexperimente eines mehrstufigen Zufallsexperimentes und dessen Ergebnismenge darstellen. Für Baumdiagramme ergeben sich aus den elementaren Regeln für das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten die beiden folgenden Regeln:

- 1. Pfadregel (Produktregel):
Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses, das durch diesen Pfad dargestellt wird.
- 2. Pfadregel (Summenregel):
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der für ein Ereignis günstigen Pfade ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. (Die 2. Pfadregel entspricht bei einstufigen Zufallsexperimenten der elementaren Additionsregel.)

In Abgrenzung zu Laplace-Experimenten werden auch Experimente, wie z. B. das Werfen einer Streichholzschachtel oder das Werfen einer Reißzwecke untersucht. Hier ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten selten möglich, da die Einflussfaktoren zu komplex sind.

Um Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen zu können, nutzt man auch das empirische Gesetz der großen Zahlen. Nach möglichst häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments wird die relative Häufigkeit eines Ergebnisses bestimmt. Mit zunehmender Anzahl von Wiederholungen stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses und strebt gegen einen festen Wert. Dieser feste Wert wird als Wahrscheinlichkeit angenommen (**statistische Wahrscheinlichkeit**).

Das kann in der Realität stattfinden oder mithilfe digitaler Medien durch Simulationen. Unter einer Simulation versteht man das wiederholte Nachahmen eines zufälligen Vorganges durch ein geeignetes Zufallsexperiment. Mithilfe von Simulationen können sehr große Versuchsanzahlen simuliert werden, mit deren Hilfe die damit ermittelten relativen Häufigkeiten der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit angenähert werden können.