Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

Wie viel Zeit dauert es länger, wenn man 240 km statt mit 120 km/h nur mit 100 km/h fährt?

Es ist kein sehr hoch gestecktes Ziel, wenn man fordert, dass der Mathematikunterricht Schülerinnen und Schüler und später Erwachsene dazu befähigt, die obige Aufgabe zu lösen. Dennoch: In der ZEIT-Studie „Bürgerkompetenz Rechnen“, die 2013 mit einer repräsentativen Stichprobe 18-65-jähriger Bundesbürgerinnen und Bundesbürger durchgeführt wurde, konnten gerade einmal 28% die richtige Lösung angeben. 54% hatten falsche Lösungen, der Rest hat gar nicht geantwortet. Selbst unter den Abiturientinnen und Abiturienten konnten nur 44% die richtige Lösung angeben, 48% lagen falsch. Als falsche Lösungen werden zumeist 40 oder 20 Minuten genannt. Die eigentlichen Rechnungen sind einfach und die Zahlen so gewählt, dass man die Aufgabe problemlos im Kopf lösen kann. Wo liegt hier also das Problem?

Es handelt sich um eine Aufgabe, bei der ein grundlegendes Verständnis von *Größen* notwendig ist: *Zeit*, *Länge* und als zusammengesetzte Größe *Geschwindigkeit*. Obwohl alle Größen ähnliche Eigenschaften im Umgang mit sich haben, so hat auch jede ihre Eigenheiten. Wie kann man innerhalb der Leitidee *Größen und Messen* systematisieren und damit im Unterricht den Spagat zwischen Verallgemeinerung und Spezialisierung schaffen?

Die Diagnose- und Fördermaterialien des LISUM sollen dabei helfen, nicht nur festzustellen, dass Schülerinnen und Schüler irgendetwas nicht können, sondern zeigen, wo die Verständnishürden genau liegen und dann hilfreiche Fördermaßnahmen vorschlagen, die den Kern einer mathematischen Idee treffen. Es hilft nicht, die eingangs genannte Aufgabe oft mit verschiedenen Zahlenwerten zu üben. Vielmehr muss eine verstehensorientierte Herangehensweise den Schülerinnen und Schülern die Erfahrungen bieten, die zum Aufbau von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) zu Größen geeignet sind.

Im Folgenden wird zunächst erläutert, welche Diagnoseformen es gibt, was Diagnostik für den Unterricht bedeutet und wie man zielgerecht fördern kann. Danach wird das Modell zum Kompetenzerwerb im Bereich Größen und Messen vorgestellt, welches den Materialien des LISUM zum Thema „Größen und Messen“ zugrunde liegt, bevor wir noch Einzelhinweise zu den jeweiligen Größen, die laut Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg bearbeitet werden sollen, geben.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose *zielgerichtet* und zum *passenden Zeitpunkt* einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen und Fehlvorstellungen und das Entstehen von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher *produktorientierten* oder eher *prozessorientierten Diagnostik* unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zu produktorientierter Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bzw. „kann“ oder „nicht kann“ bewertet. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Anderseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrunde liegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. *Diagnostische Interviews* stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen im direkten Gespräch in Erfahrung gebracht werden können. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten oder eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „Nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik „Größen und Messen“ entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung aus produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Es empfiehlt sich hier, die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anzuknüpfen. Die Förderaufgaben sind im *Dialog* zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen umsetzbar. Dabei entsteht auch die Möglichkeit einer Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützt. Diese Situationen bieten der Lehrkraft einen erneuten Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse und unterstützen die Schülerinnen und Schüler darin, sich die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst zu machen. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Zahlen im Alltag: Größen

Ein wesentliches Themenfeld im Mathematikunterricht der Primarstufe und der Sekundarstufe wird durch die Leitidee „Größen und Messen“ beschrieben. Neben dem Erwerb der Größenbegriffe und dem Umgang mit Größen in Sachsituationen stellt das Besitzen von tragfähigen Größenvorstellungen die wichtigste Zielsetzung dar (DZLM, o.J. [a, b]; Franke, 2003; MBJS, 2015).

Was versteht man unter dem Begriff „*Größe*“? „Größen – und dies gilt für alle physikalischen Größen gleichermaßen – sind Abstraktionen objektiv messbarer Eigenschaften von Gegenständen oder Vorgängen“ (Franke & Ruwisch, 2010, S. 180). Eine Größe ist in dem Zusammenhang ein Ausdruck zur qualitativen und quantitativen Kennzeichnung einer messbaren Eigenschaft von Körpern, Vorgängen, Zuständen usw. Hierzu kann man zwischen Basisgrößen und abgeleiteten Größen unterscheiden. *Basisgrößen* sind physikalische Größen, die nicht auf andere physikalische Größen zurückführbar und voneinander unabhängig sind (z. B. Länge, Masse, Zeit, Temperatur). *Abgeleitete Größen* sind physikalische Größen, die auf andere Größen zurückgeführt werden können (z. B. Geschwindigkeit, Flächeninhalt, Rauminhalt). Eine Sonderrolle spielt der „Geldwert“ oder „Geld“ als Größe, die keine physikalische Entsprechung hat, sondern sozial definiert ist.

Typisch für Größen ist, dass man sie quantitativ durch die Angabe einer *Maßzahl* und qualitativ in Bezug auf eine *Einheit*, die auch die Größenordnung festlegt, beschreibt. Da die Maßzahl das *Verhältnis* der anzugebenden Größe zur Einheit beschreibt, kann man vereinfacht auch Größen als Produkt der Maßzahl und der Einheit auffassen:

$$\text{Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

Diese Interpretation ist aber nur bedingt tragfähig, zum Beispiel weil nach allgemeinen Konventionen das Kommutativgesetz nicht anwendbar ist und eine rein kalkülhafte Behandlung dem Verständnis vorgezogen würde.

Größen bilden also über den *Maßzahlaspekt* (Freudenthal, 1973, S. 182) eine Brücke zwischen Arithmetik und der Anwendung von Zahlen im Alltag (Lorenz, 2012). Für die unterrichtliche Behandlung von Größen, insbesondere in der Primarstufe, ist der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

(a) sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

(b) den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

(c) die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen. So finden wir zum Beispiel im Fördermaterial zu „Volumen“ eine Übung, bei der Körper gedanklich mit Einheitswürfeln ausgefüllt werden. Dadurch kann eine wichtige Grundvorstellung zum Volumen aufgebaut werden: (a) der Begriff des Volumens wird mit Leben gefüllt, (b) die Schülerinnen und Schüler werden in die Lage versetzt, sich verschiedene Volumina auch quantitativ vorzustellen und zu verändern, indem sie Lagen gedanklich hinzufügen und (c) sie erhalten Zugang zur Quaderformel, die sie nutzen, um konkrete Volumina zu berechnen. Grundvorstellungen vermitteln in beide Richtungen im Modellierungskreislauf (Blum, 1985; Schupp, 1988) zwischen Mathematik und Welt.

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Im Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg für das Fach Mathematik finden sich die Kernkompetenzen *Aufbau von Größenvorstellungen*, *Bestimmen von Größenangaben durch das Messen*, *Schätzen und Vergleichen* und *Rechnen mit Größen* im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Größen und Messen“ wieder. Das Ziel dieser Leitidee ist es, „im handelnden Umgang tragfähige Größenvorstellungen zu entwickeln und Größen, welche einen Alltagsbezug für die Schülerinnen und Schüler haben, zu messen, zu schätzen und zu vergleichen“ (MBJS, 2015, S. 8).

Basierend auf Piagets Vorstellung der Entwicklung des kindlichen Geistes wird in zahlreichen Lehrwerken das in Tabelle 1 dargestellte Stufenmodell mit fließenden Übergängen für die unterrichtliche Behandlung von Größen empfohlen (vgl. Franke, 2003; Radatz & Schipper, 1983).

1.	Erste Erfahrungen mit den verschiedenen Größen in Sach- und Spielsituationen sammeln
2.	Direkter Vergleich von Repräsentanten einer Größe
3.	Indirekter Vergleich mithilfe selbstgewählter Maßeinheiten
4.	Indirekter Vergleich mithilfe standardisierter Maßeinheiten / Messen mit technischen Hilfsmitteln
5.	Umwandeln: Verfeinern und Vergröbern der Maßeinheiten
6.	Abstrahieren von Größenbegriffen ausgehend von schulischen und außerschulischen Erfahrungen und Ausbildung von Stützpunktvorstellungen
7.	Rechnen mit Größen

Tab. 1: Ein didaktisches Stufenmodell zur Behandlung von Größen

Allerdings wird in der Mathematikdidaktik eine strenge Einhaltung der didaktischen Stufenfolge durchaus kritisch gesehen und tritt hinter einem Lernen in Sinnzusammenhängen unter Berücksichtigung des jeweiligen Vorwissens und der Vorerfahrungen zurück (DZLM, o. J. [b]). Darüber hinaus wird die Kleinschrittigkeit bei der Bearbeitung von Größen negativ gesehen, da dadurch das Lernen in Zusammenhängen, das Verknüpfen und die Parallelisierung grundlegender Vergleichs- und Messaktivitäten verhindert werden (DZLM, o. J. [a]).

Darauf aufbauend hat das LISUM ein Modell (siehe Abb. 1) entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich „Größen und Messen“ zu strukturieren. Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte hinsichtlich individueller Fördermaßnahmen. Anders als beim oben benannten Stufenmodel finden die individuellen Lernwege der Schülerinnen und Schüler Beachtung und die Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler über Messprozesse und Messinstrumente werden berücksichtigt und einbezogen. Ebenso können die spezifischen Besonderheiten der jeweiligen Größen berücksichtigt werden. Im Modell stehen die vier folgenden Aspekte im Vordergrund: *Größe als messbare (physikalische) Eigenschaft*, *Idee der genormten Einheiten*, *Idee des Messens* und *Rechnen mit und Berechnen von Größen*.

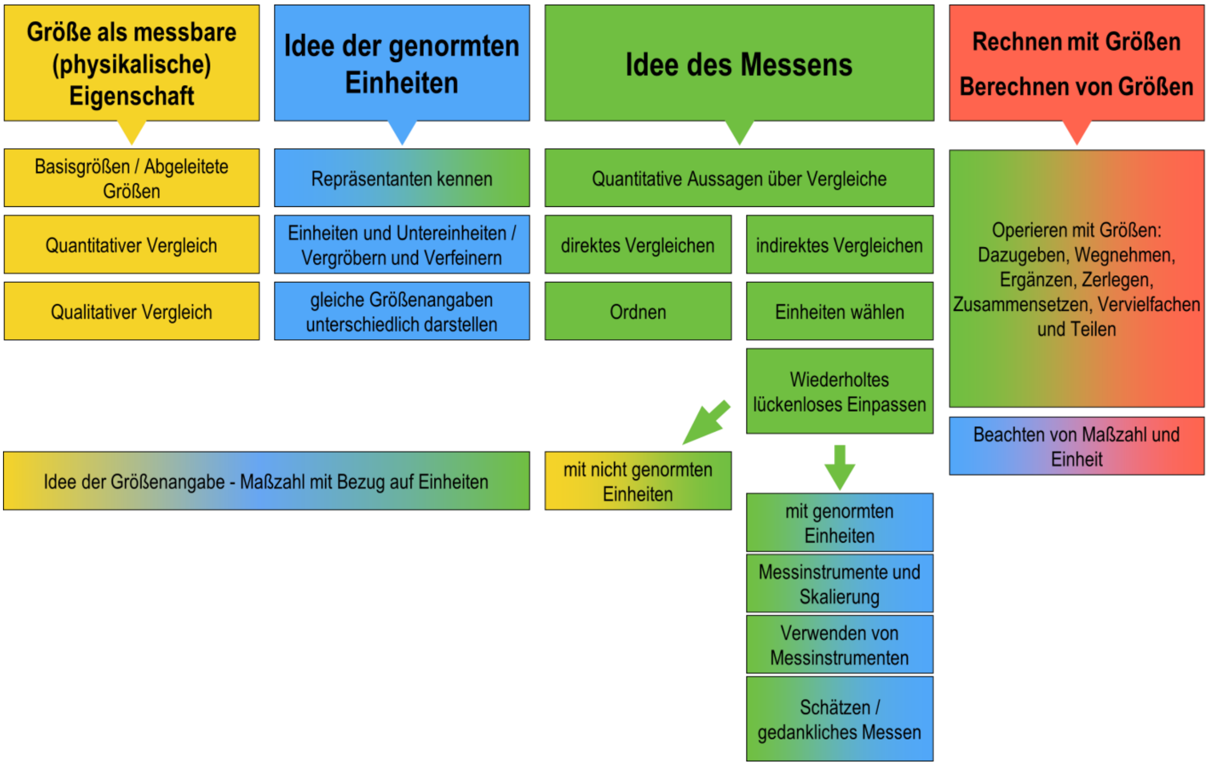

Abb. 1: Unterrichtskonzept zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich „Größen und Messen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

In der ersten Spalte wird der Aspekt von *Größen als messbare Eigenschaften* von physikalischen Objekten oder Vorgängen dargestellt. Die Einführung von Basisgrößen bzw. abgeleiteten Größen und deren quantitativer bzw. qualitativer Vergleich durch Sach-, Spiel- und Alltagssituationen bilden die entscheidenden Inhalte.

In der zweiten Spalte wird der Aspekt der *Idee der genormten Einheiten* dargestellt. Dem Aufbau von Größenvorstellungen wird in diesem Modell ein wichtiger Stellenwert zuteil. Hierzu ist es grundlegend, den Schülerinnen und Schülern einprägsame und interessante Objekte aus ihrem eigenen Umfeld als Repräsentanten von bestimmten Einheiten verschiedener Größenarten nahezubringen (Grund, 1992). Solche *Stützpunktvorstellungen* sind eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung von Mathematik im Allgemeinen (Grund, 1992) und für alltägliches Schätzen im Besonderen (Peter-Koop, 2001). Verschiedene Repräsentanten können dazu führen, dass die gleiche Größe verschiedene Darstellungen hat. Dies beeinflusst dann auch besonders das Messen von und Rechnen mit Größen.

Durch den Aufbau von tragfähigen Größenvorstellungen wird eine Grundlage für die *Idee des Messens* geschaffen. Wie in der dritten Spalte dargestellt, liegt der Fokus auf dem Bestimmen von Größenangaben durch unterschiedliche Verfahren. Hierzu wird zwischen *direktem* und *indirektem Vergleichen* unterschieden. Insbesondere greift das direkte Vergleichen die Vorerfahrungen zum Ordnen und Vergleichen auf. Das Vergleichen zweier Objekte bezüglich einer gegebenen Relation (z. B. „ist kürzer als“, „ist so lang wie“) unterstützt die Schülerinnen und Schüler beim Verständnis für die Äquivalenz- und die Ordnungsrelation in diesem Bereich. Wenn der direkte Vergleich nicht möglich ist oder nicht mit der gewünschten Genauigkeit durchgeführt werden kann, wird ein indirekter Vergleich notwendig. Hierzu eignen sich insbesondere selbst gewählte Einheiten als Vertiefung von Messerfahrungen durch das wiederholte lückenlose Einpassen sowohl mit nicht genormten als auch mit genormten Einheiten. Das Messen mit nicht genormten Einheiten dient dazu, verfügbare Repräsentanten für Größen (Stützpunktwissen) zu erwerben, die dann zum Schätzen und Vergleichen herangezogen werden können. Anderseits ist das Messen mit standardisierten Einheiten der Kern beim Aufbau des Größenverständnisses überhaupt und unabdingbar für die Entwicklung von Größenvorstellungen (Franke & Ruwisch, 2010). Deshalb ist es wesentlich, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur den angemessenen Umgang mit Messinstrumenten lernen, sondern *Messverständnis* erwerben (u.a. Sinn von Maßeinheiten, Unterteilung, Skalierung).

In der vierten Spalte geht es um den Aspekt *Rechnen mit und Berechnen von Größen*, in dem alle anderen Aspekte eine wichtige Rolle spielen. Dabei steht das Operieren mit Größen (u. a. Ergänzen, Zerlegen, Zusammensetzen) unter Berücksichtigung von Maßzahl und Einheit im Vordergrund. Das Rechnen mit Größen ist letztendlich der letzte Baustein im Aufbau von Grundvorstellungen zu Größen, bei dem (vorgestellte) Handlungen mit ihren Auswirkungen auf Berechnungen verknüpft werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen auf dieser Basis Sach- und Modellierungsaufgaben lösen können.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken ein breites Spektrum von Größenaspekten und Kompetenzen auf verschiedenen Niveaustufen (B-G) und damit die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe ab. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Fördernotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch" bzw. „kann" oder „kann nicht", sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Dazu wurden alle Diagnoseaufgaben in das oben beschriebene vom LISUM entwickelte Modell und in den neuen Rahmenlehrplan eingeordnet. Auch die Förderaufgaben sind entsprechend des Modells geordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den entsprechenden Förderaufgaben verfolgt wird. Zum Beispiel sollen die Schülerinnen und Schüler im Diagnosematerial zum Themenbereich „Länge" (Niveaustufe B/C im Aufgabenteil 1b) einen Gegenstand nennen, der so lang wie ein Meter ist. Hinsichtlich des LISUM-Modells geht es um die Idee der genormten Einheiten. Mit diesem Aufgabenteil können Sie also feststellen, ob die Schülerin oder der Schüler die Idee der Repräsentanten für 1 Meter versteht. Falls die Schülerin oder der Schüler keine sinnvolle Antwort gibt, können Sie die an dieser Stelle passende Förderaufgabe aus dem blauen Teil mit der Schülerin oder mit dem Schüler erarbeiten bzw. bearbeiten, wie etwa das Finden der Gegenstände im Umfeld der Schülerin oder des Schülers, die eine Länge von 1 m haben unter Zuhilfenahme des Metermaßes. Bei der gemeinsamen Bearbeitung der Förderaufgaben kann die Diagnose verfeinert werden.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam zu nutzen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen: Zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler gibt es hier konkrete Anregungen für die unterrichtliche Bearbeitung. Für jede Größe ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

Spezielle Hinweise zu den im Material angesprochenen Größen

Länge

Länge ist eine mathematische Größe, die eine entscheidende Bedeutung für das Leben hat und am besten zugänglich für die Schülerinnen und Schüler ist, da sie direkt über eigene Sinne wahrnehmbar ist (Freudenthal, 1973; Lorenz, 2012). Nichtsdestotrotz sind die außerschulischen Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler zum Umgang und Rechnen mit Längen sehr heterogen (Roos & Ruwisch, 2015). Im Unterricht sollte man die Behandlung von Längen anhand von lebensnahen Anwendungssituationen aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler aufgreifen (Franke, 2003), wie etwa über die Verwendung körpereigener Maße (Lorenz, 2012; Schipper, Dröge & Ebeling, 2000).

Was versteht man unter einer Länge? Eine *Länge* ist die Entfernung von einem Punkt zu einem anderen, z. B. als Ausdehnung physikalischer Objekte, als Abstand zweier Objekte voneinander oder als Länge eines zurückgelegten Weges. Dabei werden Längen dargestellt, indem man ihre Ausdehnung vom Anfangs- bis zum Endpunkt oder entlang eines Weges zeigt, sie als Strecke einzeichnet oder als Längenangabe mit Maßzahl und Einheit angibt. Sowohl umgangssprachlich als auch fachsprachlich werden für die Beschreibung von Längen verschiedene Begriffe benutzt, wie etwa breit, lang, tief, hoch, kurz, weit, groß, klein. Für die unterschiedlichen Bedeutungen dieser Begriffe müssen die Schülerinnen und Schüler sensibilisiert werden und zunehmend den Umgang mit diesen lernen.

Da allen Größen eine Ordnungsrelation zugrunde liegt (Freudenthal, 1973), kann man auch verschiedenartige Objekte nach Länge sortieren, in Äquivalenzklassen zusammenfassen und objektive und nachvollziehbare qualitative Vergleiche zwischen Objekten („länger als“, „kürzer als“, „ist genauso lang wie“) anstellen (Franke, 2003). Durch den direkten Vergleich (nebeneinanderstellen, legen, zeichnen der Objekte) gewinnen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen zur Länge als messbare Eigenschaft (siehe Spalte 1 in Abb. 1).

Durch den Begriff der Länge können erste Konzepte von Größenvorstellungen entwickelt werden (Freudenthal, 1973) (siehe Spalte 2 in Abb. 1). Dabei unterscheidet man zwischen unmittelbaren Längenvorstellungen und mittelbaren Längenvorstellungen (Krauthausen & Scherer, 2007). *Unmittelbare Längenvorstellungen* sind durch situative materielle Handlungen beschreibbar. Anderseits müssen sehr große oder sehr kleine Längen (*mittelbare Längenvorstellungen*) auf der sprachlich-symbolischen Ebene beschrieben werden (Nührenbörger, 2002). So können 0,1 mm oder 8000 km nicht mehr durch eine Handlung wiedergegeben werden, sondern man muss dafür einen verbalen Ausdruck finden. Das Bilden von mittelbaren Längenvorstellungen stellt für die Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung dar, soll aber im Mathematikunterricht berücksichtigt und thematisiert werden (DZLM, [o.J. b]). Grundlegend dabei ist Stützpunktwissen aus den Anforderungen des täglichen Lebens zu erwerben, mit dem später die geschätzten und gemessenen Größen sowie Sachaufgabenergebnisse überprüft und verglichen werden können (Grassmann, 2007).

Das Messen von Längen ist nicht allein das Anlegen und Ablesen von Linealen. Es beinhaltet auch, die Idee des Messens als das Aneinanderlegen von gleich langen Strecken als Einheiten zu begreifen, den Sinn und Nutzen einer Skala zu verstehen und Stützpunktvorstellungen zum Schätzen von Längen zu entwickeln (Franke, 2003), indem wiederholt Repräsentanten für Maßeinheiten der Länge (z. B. cm, m, Fingerbreite, Handspanne) ohne Lücken oder Überlappung aneinandergelegt werden, bis das Ende des Objekts erreicht ist (siehe Spalte 3 in Abb. 1) und diese gezählt werden. Dadurch werden mit standardisierten Einheiten auch indirekte Vergleiche ermöglicht. Beide Zugänge − mit nicht standardisierten und mit standardisierten Einheiten − unterstützen die Schülerinnen und Schüler darin, adäquate Abbilder der Repräsentanten von Größen zu entwickeln (siehe Spalte 2 in Abb. 1). Durch indirektes Messen mit standardisierten Maßeinheiten ergibt sich ein weiterer wesentlicher Aspekt des Messens – die *Skalierung*. So steht z. B. 0,005 km = 5 m = 50 dm = 500 cm = 5000 mm für dieselbe Länge. Durch die Umwandlung zwischen verschiedenen Einheiten ändern sich jeweils Maßzahl und Maßeinheit. Durch die Verfeinerung und Vergröberung von Maßeinheiten können die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen Maßeinheiten entwickeln. Längen sind auch Grundlage für die Skalierung von Messgeräten in anderen Größenbereichen.

Zeit

Unterschiedliche Lebens- und Alltagserfahrungen bedingen das Wissen der Schülerinnen und Schüler um Uhren, Uhrendarstellungen, Zeitdauern und das Rechnen mit Uhrzeiten (Becker, 2010). Zum Beispiel lernen die Schülerinnen und Schüler schon im Vorschulalter die Stunden, Wochentage, Monate und Jahreszeiten. Nichtsdestotrotz ist die Zeit eine für die Schülerinnen und Schüler schwierige Größe. Zum einen sind Zeitdauern schwer fassbar und subjektiv, zum anderen besteht mathematisch ein großer Unterschied durch den nicht-dekadischen Aufbau. Je nach Situation werden sogar unterschiedliche Zusammenfassungen verwendet: die 7-er Systematik für die Wochentage, die 12-er Systematik für die Stunden und Monate und die 60-er Systematik für die Sekunden und Minuten (Lorenz, 2012). Als Konsequenz verändern sich die Maßzahlen bei Umwandlungen nicht nur im Stellenwert, sondern auch im Zahlenwert (z. B. 1 h = 60 min). Darüber hinaus müssen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit unterschiedlichen Geräten zur Zeitmessung lernen.

Was versteht man unter Zeit? Die *Zeit* beschreibt die Abfolge und Dauer von Ereignissen und hat eine eindeutige, unumkehrbare Richtung. Die Basiseinheit der Zeit ist eine Sekunde, die aber nicht unbedingt Ausgangspunkt unterrichtlicher Arbeit sein soll (Franke & Ruwisch, 2010). Man unterscheidet zwischen einem *Zeitpunkt* (z. B. um 8 Uhr startet der Ausflug) und einer *Zeitdauer* (z. B. der Ausflug dauert 5 Stunden). Eine *Zeitspanne* wird durch zwei Zeitpunkte, den Anfang und das Ende bestimmt (z. B. von 8 Uhr bis 13 Uhr). Somit lässt sich die Zeitdauer als zeitlicher Abstand zwischen zwei Zeitpunkten auffassen (z. B. von 8 Uhr bis 13 Uhr sind es 5 h). Zeitdauern müssen immer mit einer Maßzahl und einer Einheit angegeben werden (z. B. 3 h, 4 Monate, 3 Jahre). Ein Zeitpunkt (z. B. 8 Uhr) ist keine Angabe der Zeit im Sinne einer Größenangabe, es sei denn, 8 Uhr wird als die Zeitdauer in Stunden nach Mitternacht interpretiert; Ähnliches gilt auch für die Datumsangabe. Für die Bestimmung und Angabe von Zeitpunkten werden Uhren und Kalender benutzt.

Nicht alle Schülerinnen und Schüler besitzen realistische Vorstellungen zu Zeitangaben, obwohl die zeitliche Orientierung zu den grundlegenden Strukturierungen ihres Lebens gehört. Das Finden von Repräsentanten bei der Größe Zeit ist schwieriger als bei anderen Größen, da das Zeitempfinden und die Zeitvorstellungen sehr subjektiv, kontextabhängig und nicht visuell wahrnehmbar sind (siehe Spalte 2 in Abb. 1). Eine Minute kann als sehr lang (z. B. still sitzen) oder als sehr kurz (z. B. ein Spiel spielen) empfunden werden. Auch deshalb müssen die Repräsentanten von der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler ausgehen (siehe dazu die blauen Förderkarten, z. B. Karte 2).

Zur Größe Zeit gibt es zwei Vorstellungen: Die *zyklische Vorstellung* (z. B. Jahreszyklus, wiederholter Tagesablauf), die oft kreisförmig dargestellt wird (siehe dazu die grüne 0.-Seite), und die *lineare Vorstellung* (z. B. eigene Lebenszeit, Geschichtliches), die oft als Zeitstrahl oder auch als Zeitleiste dargestellt wird.

Der Unterschied zwischen Zeitpunkt und Zeitdauer ist bei der unterrichtlichen Behandlung des Themas dringend zu thematisieren. Da Zeitdauerberechnungen (siehe Spalte 4 in Abb. 1) den Schülerinnen und Schülern häufig große Schwierigkeiten bereiten, sollte die Lehrkraft gezielte Übungen einsetzen, um Lernfortschritte zu erreichen (Becker, 2010). Hierzu eignen sich zahlreiche Alltagssituationen, wie etwa die Dauer einer Kindersendung oder eines schulischen Ausflugs. Wegen des Unterschieds von Zeitpunkt und Zeitdauer lassen sich solche Zeitberechnungen nicht in der beim Rechnen sonst üblichen Form der Gleichung aufschreiben. In dieser Situation ist die Darstellung der Sachsituation anhand eines *Zeitstrahls* hilfreich. Beim *direkten Vergleich* der Zeitdauer zu verschiedenen Handlungen sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Handlungen zur gleichen Zeit beginnen müssen. Bei gleichzeitigem Beginn der Handlung ist die Handlung kürzer, die eher aufhört. Der direkte Vergleich führt ausschließlich zu den Relationen „dauert nicht so lange wie" und „dauert genauso lange wie" (siehe Spalten 1 und 2 in Abb. 3).

Masse

Jeder kennt den altbekannten Witz: „Was ist schwerer: ein Kilo Federn oder ein Kilo Blei?" Ähnlich wie die Größe Zeit ist die Größe Masse nicht visuell wahrnehmbar und bereitet dadurch vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten. Der oben genannte Witz zielt auf eine typische Fehlvorstellung: Die Schülerinnen und Schüler – und auch die Erwachsenen – versuchen, vom visuellen Eindruck auf die Masse zu schließen. Sähe man das Volumen, dann müsste man denken, dass Federn schwerer sind. Allerdings entsteht hier eine Vorstellung vom Volumen, die nicht direkt im Verhältnis zu Masse steht. Die Schülerinnen und Schüler bringen schon aus dem Vorschulalter die Erfahrungen zu dieser Größe mit; sie haben häufig alltägliche Gegenstände angehoben und getragen, allerdings wurden diese Gewichtserfahrungen kaum bewusst wahrgenommen (Franke & Ruwisch, 2010). Die wichtige unterrichtliche Aktivität wäre, dass sich die Schülerinnen und Schüler diese Grunderfahrung bewusst machen und erlernen, dass gleich große Gegenstände verschieden schwer sein können (siehe Spalte 1 in Abb. 1).

Was versteht man unter Masse und gibt es einen Unterschied zum Gewicht? Umgangssprachlich wird zwischen *Masse* und *Gewicht* nicht unterschieden, auch wenn diese beiden Begriffe in der Physik komplett andere Bedeutungen haben. Die *Masse* ist eine feste Eigenschaft eines Körpers, die sich nicht ortsabhängig ändert. Das Kilogramm ist die Basiseinheit der Masse. Auf der anderen Seite stellt das *Gewicht* die Kraft auf einen Körper in einem Schwerefeld dar. Umgangssprachlich werden die Formulierungen „schwerer als" bzw. „leichter als" zum Vergleich von Massen verwendet. Häufig wird auch gefragt: „Wie schwer bist du?" Fachsprachlich lauten diese Formulierungen „wiegt mehr" bzw. „wiegt weniger", „wiegt genauso viel wie" und „Wie viel wiegst du?" Die Aussage „Ich wiege 35 kg" bedeutet also, dass die durch den eigenen Körper erzeugte Gewichtskraft der Kraft entspricht, die ein Körper mit der Masse 35 kg erzeugen würde, da die Einheit 1 kg die Masseneinheit und nicht die Einheit der ortsabhängigen Gewichtskraft ist. Dieser Vergleich mutet akademisch an. Der Unterschied zwischen Masse und Gewicht spielt allerdings eine entscheidende Rolle für den Aufbau von physikalischen Grundvorstellungen. Würden wir zum Beispiel zum Mond fliegen und uns dort auf eine Waage stellen, würden wir nur noch 1/6 unseres Gewichtes wiegen, da die Gravitationsbeschleunigung auf dem Mond geringer als auf der Erde ist. Im Mathematikunterricht der Grundschule werden die Begriffe „Masse" und „Gewicht" entsprechend den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler aber noch nicht voneinander abgegrenzt. Es ist die Aufgabe der Lehrkräfte im Physikunterricht, die vorhandenen Grundvorstellungen zu erweitern und abzugrenzen.

Passende Repräsentanten für Massenangaben und umgekehrt zu finden, ist notwendig, um für einen Messvorgang sinnvolle Einheiten auszuwählen und um Messinstrumente mit passenden Skalen zu finden (siehe Spalte 2 in Abb. 1). Hier sind Handlungserfahrungen zum Wiegen entscheidend, um realistische Vorstellungen von

Massen aufbauen zu können (z. B. 1 kg kann durch Anheben direkt wahrgenommen werden). Im Unterricht ist es sinnvoll 1 kg als erste Einheit einzuführen, da die Schülerinnen und Schüler leichter Repräsentanten für diese Einheit in ihrer Umgebung finden können. Objekte, die 1 kg, 2 kg, … wiegen, lassen sich mit Händen deutlich voneinander unterscheiden und das Thema des Skalierens kann so auch besser erarbeitet werden. Direktes Vergleichen ist insbesondere dann schwierig, wenn die Einheiten sehr groß oder sehr klein sind (z. B. 1 mg, 1 t). Dennoch muss im Mathematikunterricht auch eine Vorstellung zu nicht direkt wahrnehmbaren Massenangaben (z. B. 1 t) vermittelt werden, z. B. über das Modell des Meter-Würfels, denn 1 m^3 Wasser wiegt 1 Tonne (Schipper et al., 2000). Anderseits sind kleine Massen von 1 g mit der Hand zu heben, jedoch nicht mehr differenziert wahrnehmbar (Franke & Ruwisch, 2010).

Erste Erfahrungen zum Messen sammeln die Kinder durch Abwiegen mit den Händen (siehe Spalte 3 in Abb. 1). Darauf aufbauend kann man Wippen, wie sie auf Kinderspielplätzen vorhanden sind, zum Aufbau von Grundvorstellungen benutzen; die Kinder wissen, dass sie bei gleichem Abstand zur Mitte der Wippe ungefähr gleich schwer sein müssen, um gut wippen zu können. Um festzustellen, welche Objekte gleich schwer sind bzw. welche leichter/schwerer als ein Vergleichsobjekt sind, wird der Messprozess mittels einer Waage vollzogen. Auf diesem vergleichenden Messprinzip basieren die im Unterricht eingesetzten Messgeräte Kleiderbügelwaage und Tafelwaage. Es werden so lange Wägestücke hinzugefügt, bis sich die Waage im Gleichgewicht befindet bzw. bis sich das Verhältnis umkehrt. Dadurch können u.a. die Schülerinnen und Schüler mithilfe einer Tafelwaage selbst feststellen, wie viele Gramm ein Kilogramm ergeben. Darüber hinaus werden auch die ersten präalgebraischen Ideen zu Gleichungen gewonnen. Neben diesen Messgeräten muss auch mit skalenbasierten Messgeräten wie der Babywaage und der Federwaage gearbeitet werden, bei denen die Messungen von Massen auf die Messungen von Längen zurückgeführt werden.

Flächeninhalt

Eine grundlegende abgeleitete Größe ist der Flächeninhalt – eine Größe, die zwar im unmittelbaren Erfahrungshorizont der Schülerinnen und Schüler liegt, aber auch Schwierigkeiten und Lerngelegenheiten birgt. Der *Flächeninhalt* beschreibt die Größe einer Fläche quantitativ. Hier sollte von Anfang an auf die fachsprachliche Unterscheidung zwischen „Fläche“ und „Flächeninhalt“ geachtet werden, auch wenn dies selbst in der fachdidaktischen Literatur nicht immer eingehalten wird. Gerade der Vergleich verschiedener Flächen und Figuren bezüglich ihrer Größe bedingt, dass geklärt wird, was tatsächlich gemessen wird. Hierzu müssen Flächen im Raum und in Figuren identifiziert und eingezeichnet werden können. Dabei muss auf den Unterschied zwischen Längen (zum Beispiel dem Umfang von Flächen) und Flächen hingewiesen werden.

Die Basiseinheit des Flächeninhalts ist, basierend auf der Basiseinheit der Länge, der Quadratmeter, also ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m. Das (Ab-)Messen durch das Zerlegen einer Fläche in solche Quadrate ist nicht immer möglich, selbst wenn die Fläche größer als ein Quadratmeter ist. Ein 25 m langes, aber nur 4 cm hohes Rechteck hat also den gleichen Flächeninhalt wie die Basiseinheit. So wird deutlich, dass der Aufbau entsprechender Grundvorstellungen (siehe Spalte 1 in Abb. 1) von Anfang an auch Operationen wie Zerlegen, Zusammenfügen und Zerschneiden mit einbeziehen muss (siehe Spalte 4 in Abb. 1).

Für das Messen von Flächen stehen in der Schule üblicherweise keine technischen Messgeräte (z. B. Planimeter) zur Verfügung. Nicht nur deshalb müssen die Grundprinzipien des Messens, wie in Abb. 1. Dargestellt, durch den Vergleich mit Einheitsflächen thematisiert werden und die dazugehörigen Grundvorstellungen aufgebaut werden. Den direkten Vergleich von Flächen, z. B. durch Aufeinanderlegen, kennen Schülerinnen und Schüler schon aus dem Kindergarten, ebenso wie die für den Vergleich verschieden geformter Flächen notwendigen Tätigkeiten des Zerlegens und Zusammenfügens (Eichler & Lafrenz, 2004; Lorenz, 2012; Steinweg, 2009). Das Auslegen mit Einheitsquadraten, deren Seitenlängen die genormten Einheiten der Länge sind, ist nicht nur die Grundlage für das Schätzen von Flächeninhalten, sondern liefert auch die Grundvorstellung für die Berechnung einfacher Flächeninhalte. Hier ergibt sich über das Rechteckmodell eine wichtige Querbeziehung zur Arithmetik und Algebra. Die Aufteilung einer Fläche in (immer feinere) Streifen liefert hingegen die Basis für die Integralrechnung in der Analysis.

Die Idee der genormten Einheiten (siehe Spalte 2 in Abb. 1) wird primär über geeignete Repräsentanten eingeführt. Manche Stützpunktvorstellungen können aus den mittelbaren Stützpunktvorstellungen für Längen abgeleitet werden (z. B. die kleine Klapptafel der Schultafel als Quadratmeter), andere basieren auf bekannten Flächen (Sportplatz). Die Stützpunktvorstellungen sind notwendig, um Flächeninhalte in einer sinnvollen Einheit anzugeben. Der Aufbau dieser Vorstellungen sollte damit verbunden sein, verschiedene Stützpunktvorstellungen miteinander zu vergleichen und die Umrechnungsfaktoren zu quantifizieren. Hierfür bieten sich besonders Dezimeter-Quadrate, Rechenkästchen und Millimeterpapier als vollständig zu überblickende Flächen an. Neben (fast) quadratischen oder rechteckigen Flächen können und sollten auch anders geformte Flächen thematisiert werden, um eine Abgrenzung zu den stets gleich „geformten" Längen zu bieten: Längen können immer nur aneinandergelegt werden, Flächen bieten Anbaumöglichkeiten in zwei Dimensionen. Eine Länge ist über ihr Maß vollständig beschrieben, eine Fläche nicht!

Der Unterschied zwischen Umfang und Flächeninhalt ist im Unterricht zu betonen. Hierzu gehört, dass auch die Veränderung des Umfangs und des Flächeninhalts im Zusammenhang mit Operationen an Flächen beobachtet wird (siehe Spalte 4 in Abb. 1): Legt man zwei Flächen aneinander, so addieren sich die Flächeninhalte, doch die Summe der Umfänge kann größer als der Gesamtumfang sein. Dies kann und soll über mehrere Zugänge erfahren werden – über handelndes Aneinanderlegen und Folgen von Figuren (s.g. figurierte Zahlen), später auch über die rein quantitative Betrachtung an bekannten Flächen, deren Inhalt berechnet werden kann. Ein zu früher Übergang auf rechnerische Zugänge durch die reine Anwendung der Formeln für Umfang und Flächeninhalt nimmt den Schülerinnen und Schülern die Chance, die notwendige Grundvorstellung zu den beiden „Größenangaben" für Flächen, dem Umfang und dem Flächeninhalt, aufzubauen.

Schließlich sollte auch – gerade im Zusammenhang der Messung von Rauminhalten – auf die Thematik der „Illusion of linearity" (siehe hierzu auch De Bock et al., 2007) eingegangen werden: Verdoppelt man die Seitenlänge einer Figur oder ihre Höhe, so wird ihre Fläche nicht nur verdoppelt, sondern vervierfacht. Aus der Behandlung des Flächeninhalts wird die Untersuchung quadratischer Funktionen und der Wurzel begründet. So werden im Umgang mit Flächen schon Grundvorstellungen aufgebaut, die später in algebraischen Kontexten genutzt werden können. Noch spannender ist das Verständnis von Dimension anhand der Stärke der Änderung einer geometrischen Figur bei ihrer Vergrößerung und Verkleinerung: Zweidimensionale Flächen ändern ihre Größe doppelt so stark wie eindimensionale Längen!

Volumen

Als weitere abgeleitete Größe tritt das *Volumen als Hohlmaß* auf, mit dem die Größe des Inhaltes dreidimensionaler Körper beschrieben wird. Im Gegensatz zum Flächeninhalt existieren für Hohlmaße eigene Einheiten mit der Basiseinheit Liter, die primär für Flüssigkeiten und Gase, aber auch für Sand und Blumenerde, verwendet werden. Volumina werden aber auch als Rauminhalte bezeichnet und können als zusammengesetzte Größe von Fläche und Höhe oder auch von Breite, Tiefe und Höhe beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen der Beschreibung als Produkt dreier Längen mit der Basiseinheit „Kubikmeter" (m^3) und der Basiseinheit „Liter", die aus Alltagszusammenhängen bekannt ist, muss im Unterricht vermittelt werden.

Aus der Doppelrolle ergeben sich auch verschiedene Messmethoden (siehe Spalte 3 in Abb. 1): Das (gedankliche) Auslegen von Volumina mit Einheitswürfeln kann über die Arbeit mit Holz- oder Steckwürfeln vorbereitet werden. Hier ergibt sich eine ähnliche Problematik wie schon bei Flächen – nicht jeder Körper kann über Würfel zusammengebaut werden, auch wenn er ein größeres Volumen hat. Im Gegensatz dazu kann der Umgang mit Messbechern und Hohlfiguren helfen, von der Form eines Volumens zu abstrahieren und verschiedene, aber gleich große Körper ineinander über das Umschütten von Flüssigkeiten oder Sand zu verwandeln. Eine Mischform ist der Zugang über knetbare Materialien – diese erlauben es, verschiedene Figuren mit konstantem Volumen herzustellen.

Die „Umformung" von Körpern in andere wird ebenfalls über den Vergleich verschieden geformter Messbecher thematisiert. Die dabei entstehenden Grundvorstellungen werden dann schlussendlich im Cavalieri-Prinzip festgehalten, welches die Grundlage für die spätere Berechnung von Pyramiden-, Kugel- und Kegelvolumina ist und zudem auf weiterführende Themen in der Analysis vorbereitet.

Als schwierig für den handelnden Umgang mit Volumeneinheiten stellt sich das kubische Verhalten dieser Größe dar: Verfeinert man die zugrundeliegende Längeneinheit um eine Stufe (Faktor 10), so muss die Volumeneinheit schon um einen Faktor 103 = 1000 verfeinert werden. Dieses extrem starke Wachstum von Volumina bei der Vergrößerung von Körpern kann also und soll auch besonders im Zusammenhang mit „großen Zahlen" thematisiert werden. Das Operieren mit diesen Umrechnungen kann realistischerweise nur mental erfolgen, sodass das gedankliche Auslegen von Volumina einen hohen Stellenwert hat. Die Frage, um welchen Faktor sich das Volumen ändert, wenn man die Seitenlänge eines Würfels verdoppelt, kann nur von ca. einem Drittel der Bevölkerung richtig beantwortet werden (ZEIT-Studie „Bürgerkompetenz Rechnen", 2013).

Es sei noch erwähnt, dass über den Vergleich von Masse und Volumen eine weitere Einheit, die Dichte, eingeführt wird. Da das Verhältnis von Masse und Volumen für homogene Stoffe (also zum Beispiel Wasser oder auch Sand) konstant ist, können die oben beschriebenen Tätigkeiten des Umfüllens und Umformens auch im Zusammenhang mit der Erhaltung der Masse eines Körpers genutzt werden. Dadurch ergibt sich auch ein Bezug zum naturwissenschaftlichen Unterricht.

Geschwindigkeit

Geschwindigkeit ist relativ – sie muss streng genommen immer in Bezug auf ein Referenzsystem angegeben werden. Als abgeleitete Größe setzt sie eine zurückgelegte Strecke zu der dafür benötigten Zeit in ein Verhältnis. Im Mathematikunterricht der Klassen 1–10 beschränkt sich die Behandlung zumeist auf diesen *Geschwindigkeitsbegriff* und die Behandlung von *Durchschnittsgeschwindigkeiten*. Dennoch verfügen auch schon Kinder über eine Vorstellung einer *Momentangeschwindigkeit*. Da diese Vorstellung spätestens im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II wieder aktiviert werden muss, wenn Steigungen von Funktionen untersucht werden, sollte der Zusammenhang zwischen der wahrnehmbaren Geschwindigkeit und der berechenbaren Geschwindigkeit bewusst gemacht werden (siehe Spalte 1 in Abb. 1). Daher sollte sich eine Förderung auch nicht auf das reine Erkennen eines Verhältnisses von Länge und Zeitdauer beschränken.

Die Darstellung bzw. Berechnung als Verhältnis von Länge (Zähler) und Zeitdauer (Nenner) ist wichtig und greift die übliche Messung von Geschwindigkeiten in Verkehrsmitteln als *Kilometer pro Stunde* (km/h) oder in der Basiseinheit *Meter pro Sekunde* (m/s) auf. Sie birgt aber auch Schwierigkeiten – zum Beispiel können Durchschnittsgeschwindigkeiten von Geschwindigkeiten über Streckenabschnitten nicht einfach über das arithmetische Mittel berechnet werden. Fährt man eine Stunde lang 50 km/h und eine weitere Stunde mit 100 km/h, so funktioniert dies aber doch. Da aber eine Veränderung der Geschwindigkeit dann auch eine Veränderung der Gesamtstrecke bedeuten würde, ist dieser Zugang nicht für den Aufbau von Grundvorstellungen geeignet. Wechselt man hingegen auf das – äquivalente – Verhältnis von Zeitdauer zu Länge und gibt somit den Kehrwert an (statt „60 km/h heißt, in einer Stunde schaffe ich 60 km‘“ lieber „60 km/h heißt ‚für 60 km brauche ich eine Stunde‘ oder ‚1 Stunde pro 60 km‘“), dann bietet man eine tragfähige Vorstellung an.

Ebenso kann und soll der Vergleich von Geschwindigkeiten direkt oder über den Vergleich der zurückgelegten Strecke (bei gleicher Dauer) oder der Dauer (bei gleicher Strecke) durchgeführt werden. Weg-Zeit-Diagramme, wie sie in Physik und Mathematik in der Sekundarstufe I und II verwendet werden, erlauben einen verstehensorientierten propädeutischen Zugang zur Analysis. So kann man die Interpretation von Diagrammen und das Ablesen von Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeiten vorbereiten, später auch mit dem Einsatz simultaner Darstellungen mit digitalen Werkzeugen (Hoffkamp, 2011).

Weitere Größen

In den vorhandenen Materialien wurden nicht alle für die Primarstufe und Sekundarstufe I relevanten Größen behandelt, wie z. B. Geld(-werte), Winkelgrößen oder weitere abgeleitete physikalische Größen wie Dichte, Druck, Temperatur. Sie können ähnlich wie in Abb. 1 strukturiert werden.

Wir empfehlen daher zusätzlich die folgende Literatur zu diesen Größen:

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 62–76). Wiesbaden: Springer Verlag.

Henn, H.-W. (Hrsg.). (2006). Rund ums Geld. *mathematik lehren, 134*.

Leuders, J., & Philipp, K. (Hrsg.). (2015). *Didaktik für die Grundschule: Mathematik – Didaktik für die Grundschule* (2. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2011). Größen und Sachrechnen: Geld. *Grundschule Mathematik, 28*(1).

Literatur

Becker, N. (2010). „Es ist genau zehn Sekunden vor zwölf“! *Grundschulunterricht Mathematik, 4,* 32–36.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, *32*(2), 195–232.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity. From analysis to improvement.* Boston, MA: Springer Verlag.

Eichler, K. P., & Lafrenz H. (2004). Vorerfahrungen von Schulanfängern zum Vergleichen von Längen und Flächen. *Grundschulunterricht, 51*(7/8), 42–47. Erweiterte Version online unter http://www.mathematikus.de/fileadmin/mathematikus_content/Dokumente/3_KIGA_Messen_2004.pdf [12.10.2018]

Franke, M. (2003). *Mathematik Primar- und Sekundarstufe: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Heidelberg: Spektrum.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Auflage). Heidelberg: Springer Spektrum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Grassmann, M. (2007). Überall sind Zahlen – regieren sie uns. *Sache Wort Zahl, 85*, 14–20.

Grund, K.-H. (1992). Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung. *Grundschule, 12*, 42–44.

Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und Empirische Ergebnisse*. Dissertation. TU Berlin.

Jordan, A., & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. *mathematik lehren, 150*, 4–12.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (3. Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen. Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres*. Hildesheim: Franzbecker.

Peter-Koop, A. (2001). Authentische Zugänge zum Umgang mit Größen. *Die Grundschulzeitschrift*, *14*, 6–11.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

Roos, S., & Ruwisch, S. (2015). "Mit einem Lineal kann man messen": Lernvoraussetzungen mit dem weißen Blatt und Mini-Tests erheben. *Grundschule Mathematik, 47*, 4–5.

Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (2000). *Handbuch für den Mathematikunterricht 4. Schuljahr*. Hannover: Schroeder Verlag.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht, 34*(6), 5–16.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). (Hrsg.). *Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik*. Berlin, Potsdam.

Steinweg, A. S. (2009). Handreichung Mathematik in der Schulanfangsphase. TransKiGS. Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung Berlin.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Webseiten

https://kira.dzlm.de/weitere-inhaltsbereiche/größen-und-messe/stützpunktvorstellungen [22.01.2018]

https://pikas-mi.dzlm.de/inhalte/gr%C3%B6%C3%9Fenvorstellungen-geldbetr%C3%A4ge-vergleichen-und-darstellen/einstieg [12.10.2018]

Weiterführende Literatur

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2005). Größen: Längen. *Grundschule Mathematik, 5*.

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2007). Größen: Zeit. *Grundschule Mathematik, 13*.

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2008). Größen und Sachrechnen: Gewichte. *Grundschule Mathematik, 19*.

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2011). Größen und Sachrechnen: Geld. *Grundschule Mathematik, 28*.

Häring, G., Pöhls, A., Reinhold, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2012). Größen: Volumina. *Grundschule Mathematik, 34*.