Vierfeldertafeln und Doppelbäume

Zu: „Daten und Zufall“, Jahrgangsstufe 9/10

Fachlicher Hintergrund:

Baumdiagramme mit Wahrscheinlichkeiten an den Ästen und (Teil-)Ereignissen an den Knotenpunkten sind im Mathematikunterricht weit verbreitet.

Ergänzend können Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten an den Knotenpunkten (und ggf. Anteilen an den Ästen) das verstehensorientierte Lernen unterstützen. Sie lassen sich auch zu sogenannten Doppelbäumen erweitern, aus denen sich, ähnlich wie Vierfeldertafeln, die Informationen nach verschiedenen Aspekten ablesen lassen.

Absolute Häufigkeiten anstelle von relativen Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten fördern nachweislich das Verständnis für Wahrscheinlichkeiten. Ein Grund könnte sein, dass man stets auf die Grundregel $\frac{günstige}{möglich}$ zurückgreifen kann, was weniger abstrakt ist, als das Verhältnis von zwei Anteilen zu bestimmen. Zudem lässt sich, bezogen auf das nachfolgende Beispiel, die Gruppe von Personen in Teilgruppen (männlich / weiblich, Auto / kein Auto, Kombination dieser Merkmale) aufteilen – eine zugänglichere Vorstellung als „Eine Person wird zufällig ausgewählt; mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}458$ ist sie männlich und mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}542$ weiblich“, was eine höhere Abstraktion erfordert.

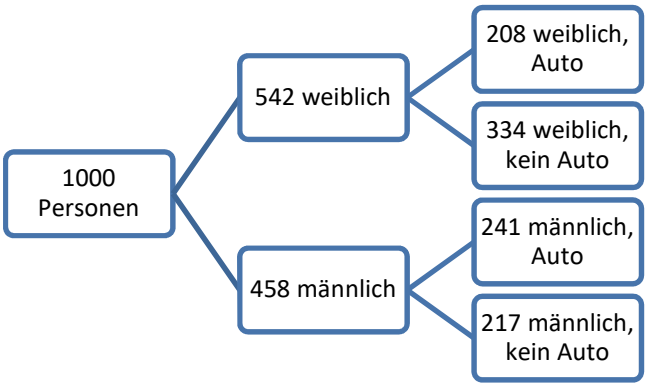
Ein Doppelbaum enthält dieselben Informationen wie die zugehörige Vierfeldertafel, hat ihr gegenüber jedoch folgenden Vorteil: Wenn eine zunächst unvollständige Vierfeldertafel ergänzt werden soll, sind nicht alle leeren Felder zu jedem Zeitpunkt ausfüllbar. Man muss, je nachdem, welche Angaben vorgegeben sind, erst bestimmte Felder ausfüllen, bevor darauf basierend die übrigen Felder gefüllt werden können. Beim Doppelbaum ist die Reihenfolge, in der man die Einträge ergänzt, hingegen vorgegeben, so dass dieses Problem nicht auftaucht.

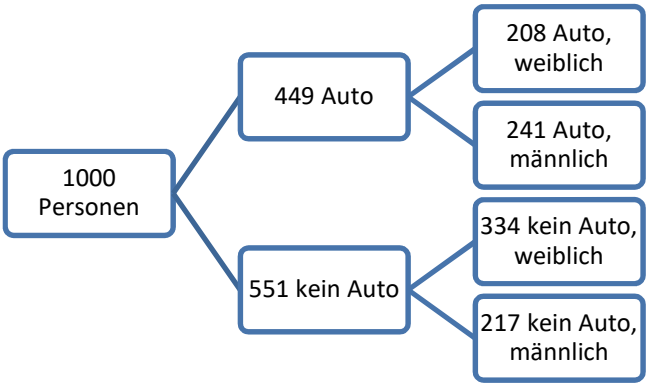
Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Beispiel

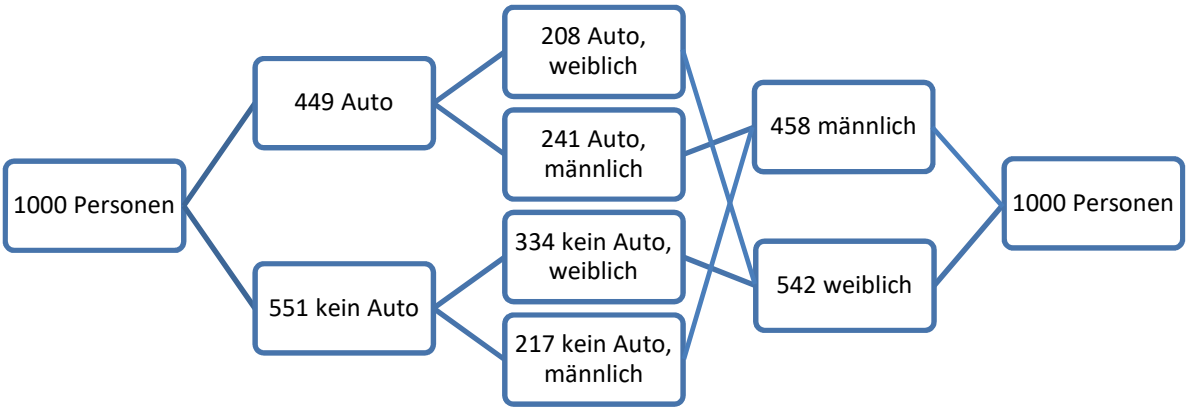
Aus den Daten der rechts dargestellten Vierfeldertafel (mit absoluten Häufigkeiten) können zwei verschiedene Baumdiagramme (ebenfalls mit absoluten Häufigkeiten) erstellt werden, bei denen die erste Verzweigung entweder weiblich / männlich oder Auto / kein Auto ist.

	weiblich	männlich	
Auto	208	241	449
kein Auto	334	217	551
	542	458	1000





Zusammenfassend ist dies auch in einem Doppelbaum möglich:



Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Der Doppelbaum kann, wie die Vierfeldertafel, zur Bestimmung von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten genutzt werden, wenn ein Zufallsexperiment (hier: Eine Person wird zufällig ausgewählt) durchgeführt wird.

Beispiele, in Bezug auf die oben angegebenen Daten:

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person männlich ist:
$P(männlich) = \frac{458}{1000} = 0{,}458$

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person kein Auto hat:
$P(kein\ Auto) = \frac{551}{1000} = 0{,}551$

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte weibliche Person kein Auto hat:
$P(kein\ Auto|weiblich)$[1] $= \frac{334}{542} \approx 0{,}6162$ bzw. $P_{weiblich}(kein\ Auto) = \frac{334}{542} \approx 0{,}6162$
(beide Schreibweisen möglich)

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Auto männlich ist:
$P(männlich|Auto) = \frac{241}{449} \approx 0{,}5367$ bzw. $P_{Auto}(männlich) = \frac{241}{449} \approx 0{,}5367$
(beide Schreibweisen möglich)

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte männliche Person ein Auto besitzt:
$P(Auto|männlich) = \frac{241}{458} \approx 0{,}5262$ bzw. $P_{männlich}(Auto) = \frac{241}{458} \approx 0{,}5262$
(beide Schreibweisen möglich)

[1] Lesart: Die Wahrscheinlichkeit (dass eine Person kein Auto hat | unter der Bedingung, dass die Person weiblich ist).

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Vierfeldertafel und Doppelbaum

In einem Dorf wohnen 480 erwachsene Personen. 368 dieser Erwachsenen wohnen schon seit ihrer Kindheit in diesem Dorf, der Rest ist später zugezogen.

Die nebenstehende Vierfeldertafel zeigt die Verteilung. Sie ist noch unvollständig.

	weiblich	männlich	
seit Kindheit im Dorf	185		368
zugezogen			
	268	212	480

1. Vervollständige die Vierfeldertafel.

2. Stell die Daten in einem Doppelbaum dar.
Wenn es dir hilft, kannst du auch erst zwei Baumdiagramme skizzieren.

3. Bearbeite die folgenden Aufgaben.

a) Du triffst eine Person aus diesem Dorf. Berechne die die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist.

b) Du triffst eine Person aus diesem Dorf. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person seit ihrer Kindheit im Dorf wohnt.

c) Du triffst einen Mann aus diesem Dorf. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er seit seiner Kindheit schon dort wohnt.

d) Du triffst eine Person aus diesem Dorf, die dort schon seit ihrer Kindheit wohnt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ein Mann ist.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau aus diesem Dorf eine Zugezogene ist.

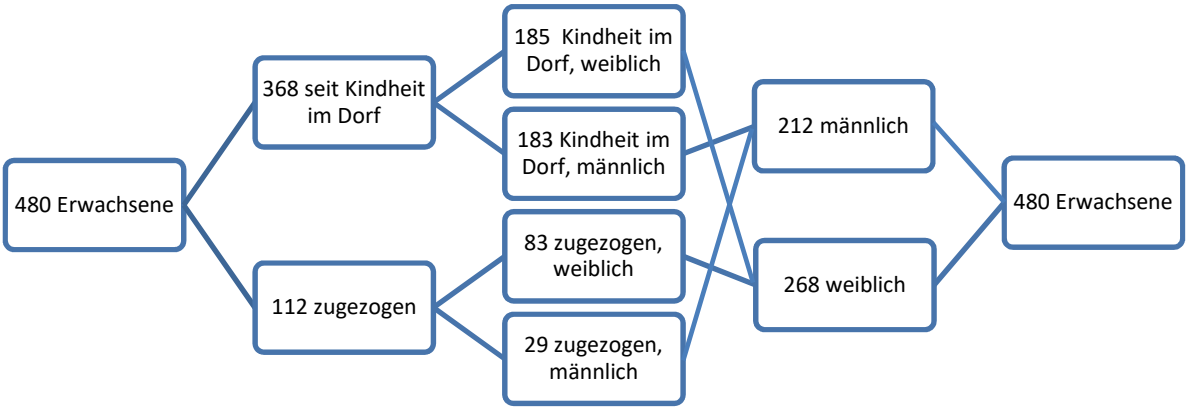
Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Lösungen

zu **1.**

	weiblich	männlich	
seit Kindheit im Dorf	185	183	368
zugezogen	83	29	112
	268	212	480

zu **2.**



zu **3.**

a) Du triffst eine Person aus diesem Dorf. Berechne die die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist.

$P(männlich) = \frac{212}{480} \approx 0{,}442$ (44,2 %)

b) Du triffst eine Person aus diesem Dorf. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person seit ihrer Kindheit im Dorf wohnt.

$P(Kindheit\ im\ Dorf) = \frac{368}{480} \approx 0{,}767$ (76,7 %)

c) Du triffst einen Mann aus diesem Dorf. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er seit seiner Kindheit schon dort wohnt.

$P(Kindheit\ im\ Dorf|männlich) = \frac{183}{212} \approx 0{,}863$ (86,3 %)

d) Du triffst eine Person aus diesem Dorf, die dort schon seit ihrer Kindheit wohnt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ein Mann ist.

$P(männlich|Kindheit\ im\ Dorf) = \frac{183}{368} \approx 0{,}497$ (49,7 %)

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau aus diesem Dorf zugezogen ist.

$P(zugezogen|weiblich) = \frac{83}{268} \approx 0{,}310$ (31 %)

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0