Einsatz von GeoGebra zur Untersuchung der Linearfaktordarstellung für quadratische Funktionen

Zu: „Quadratische Funktionen“, Jahrgangsstufe 9

Kommentar

Das nachfolgende Arbeitsblatt dient zur Erforschung einer weiteren Darstellungsweise für quadratische Funktionen, die neben der Scheitelpunktform und der Normalform Vorteile bietet - die Linearfaktordarstellung.

Das Material richtet sich grundsätzlich an Gymnasien. Der Rahmenlehrplan Mathematik, 2023, fordert in Stufe H: „… bei quadratischen Funktionen auch Darstellung als Produkt von Linearfaktoren“. Als Selbstlernmaterial ist es insbesondere für starke Lerngruppen gedacht, die damit selbstständig den Zusammenhang zwischen den Linearfaktoren und den Nullstellen der Graphen quadratischer Funktionen finden können.

Weiterführende Fragen vertiefen das Thema und öffnen den Blick für andere Funktionen, wenn nicht zwei, sondern drei oder mehr Linearfaktoren miteinander kombiniert werden.

Bei der Besprechung mit der Lerngruppe sollte der Satz vom Nullprodukt als Begründung für die gefundenen Lösungen betrachtet werden.

Dieses Material ist Teil der Unterrichtsmaterialien zu den Planungshilfen für einen kompetenzorientierten Unterricht.
Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Linearfaktordarstellung

Du kennst schon die *Scheitelpunktform* und die *Normalform* einer quadratischen Funktion. Eine weitere Möglichkeit, eine quadratische Funktion anzugeben, ist die Darstellung mit Hilfe von *Linearfaktoren*, z. B. $f(x) = (x-2)(x+3)$. Dabei heißen die einzelnen Klammerterme $(x-2)$ bzw. $(x+3)$ *Linearfaktoren*. Du sollst nun untersuchen, welchen Vorteil diese Darstellung hat.

- Öffne eine leere GeoGebra-Datei.
- Stelle die Graphen folgender Funktionen dar und untersuche, wie die Zahlen im Funktionsterm mit den Nullstellen der Parabel zusammenhängen:

  a) $y = (x-2)(x+3)$ → Nullstellen der Parabel bei $x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____
  b) $y = (x+2)(x-4)$ →
  c) $y = (x-1)(x+1)$ →

Allgemein: Eine Funktion der Form $y = (x+a)(x+b)$ hat ihre Nullstellen bei $x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____.

- Probiere den Zusammenhang für andere Zahlen aus. Du kannst statt einfacher Linearfaktoren der Form $(x \pm Zahl)$ auch andere lineare Terme, z. B. $(2x+3)$ betrachten.

Zum Weiterarbeiten:

- Eine verschobene Normalparabel hat ihre Nullstellen bei $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$. Gib die Funktionsgleichung an.
- Eine Parabel hat ihre Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ und ist mit dem Faktor 4 gestreckt. Gib die Funktionsgleichung an.
- Untersuche den Verlauf der Graphen der quadratischen Funktionen, wenn du gleiche Linearfaktoren wählst, z. B. $y = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$.
- Untersuche den Verlauf der Graphen von Funktionen der Form $y = (x \pm Zahl)^n$, mit natürlichen Zahlen n.
  Welchen Unterschied stellst du bei geraden bzw. ungeraden Exponenten n fest?
- Untersuche die Graphen von Funktionen, wenn du nicht zwei, sondern drei oder mehr Linearfaktoren miteinander multiplizierst, z. B. $y = (x-2)(x+3)(x-4)$.
- Begründe, warum sich für die Funktion f_1: $y = x^2 + 4x + 3$ eine Linearfaktordarstellung angeben lässt und für die Funktion f_2: $y = x^2 + 4x + 5$ nicht.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Lösungen

a) $y = (x-2)(x+3)$ → Nullstellen der Parabel bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$
b) $y = (x+2)(x-4)$ → Nullstellen der Parabel bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$
c) $y = (x-1)(x+1)$ → Nullstellen der Parabel bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Allgemein:
Eine Funktion der Form $y = (x+a)(x+b)$ hat ihre Nullstellen bei $x_1 = -a$ und $x_2 = -b$.

Zum Weiterarbeiten:

- Eine Normalparabel hat ihre Nullstellen bei $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$. Gib die Funktionsgleichung an.
  $y = (x-4)(x+3)$
- Eine Parabel hat ihre Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ und soll mit dem Faktor 4 gestreckt werden. Gib die Funktionsgleichung an.
  $y = 4(x-2)(x-6)$
- Untersuche das Verhalten der Graphen der quadratischen Funktionen, wenn du gleiche Linearfaktoren wählst, z. B. $y = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$.
  Es handelt sich um eine doppelte Nullstelle, der Graph schmiegt sich bei der Nullstelle der x-Achse an und berührt sie an einem Punkt, dem Scheitelpunkt der Parabel.
- Untersuche den Verlauf der Graphen von Funktionen der Form $y = (x \pm Zahl)^n$, mit natürlichen Zahlen n.
  Welchen Unterschied stellst du bei geraden bzw. ungeraden Exponenten n fest?
  Es handelt sich um mehrfache Nullstellen.
  Bei ungeraden Exponenten verläuft der Graph ober- und unterhalb der x-Achse.
  Bei geraden Exponenten berührt der Graph die x-Achse und verläuft (bis auf den Berührpunkt) komplett nur oberhalb oder nur unterhalb der x-Achse.
- Untersuche die Graphen von Funktionen, wenn du nicht zwei, sondern drei oder mehr Linearfaktoren miteinander multiplizierst, z. B. $y = (x-2)(x+3)(x-4)$.

  Die Nullstellen können analog des Falls mit zwei Linearfaktoren auch bei mehr als zwei Linearfaktoren direkt abgelesen werden (ggf. doppelte / mehrfache Nullstellen möglich). Die Untersuchung öffnet schon einmal den Blick auf die ganzrationalen Funktionen, die in der Sek II untersucht werden.
- Begründe, warum sich für die Funktion f_1: $y = x^2 + 4x + 3$ eine Linearfaktordarstellung angeben lässt und für die Funktion f_2: $y = x^2 + 4x + 5$ nicht.

  f_1 hat zwei Nullstellen (-3 und -1), f_2 hat keine Nullstellen

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0