Einsatz von GeoGebra zur Modellierung mit Hilfe quadratischer Funktionen

Zu: „Quadratische Funktionen“, Jahrgangsstufe 9

Kommentar

Das vorliegende Material informiert die Schülerinnen und Schüler zunächst darüber, warum parabelförmigen Brückenverläufe besonders geeignet zum Bau von Brücken sind. Anschließend wird die Lage des Koordinatensystems für Modellierungsaufgaben in den Fokus gerückt. Dazu werden verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des Koordinatensystems vorgegeben, die dazu anregen können, eine recheneffiziente Wahl zu treffen. Die Schülerinnen und Schüler können entdecken, dass die Symmetrie zur y-Achse Rechenvorteile bietet. Nach der Bearbeitung dieses Aufgabenteils bietet es sich an, im Plenum die Vor- und Nachteile der Wahl des Koordinatensystems zu thematisieren.
Anschließend wird das eigenständige Bearbeiten von Aufgaben rund um Brückenkonstruktionen mit steigender Schwierigkeit geübt, zunächst mit, anschließend ohne vorgegebenes Koordinatensystem. Die Aufgabe 2 bietet sich als Übung an oder auch als Alternative zum oben vorgestellten Weg, wenn die Wahl des Koordinatensystems nicht reflektiert werden soll. Im letzten Schritt wird das Bauwerk „Gateway Arch“ (St. Louis, USA) thematisiert, für deren Bogenlinien überraschenderweise keine Parabeln gefunden werden können.
Als Vorbereitung für den Unterricht sollten im Vorfeld Bilder von z. B. der Müngstener Brücke und des Gateway Arch herausgesucht werden.
(Category:Müngstener Brücke – Wikimedia Commons)
(St Louis Gateway Arch - Category:Gateway Arch – Wikimedia Commons)

Lässt man die Schülerinnen und Schüler selbst nach einem Bild recherchieren, thematisiert werden, dass nur eine Frontalansicht zur Modellierung geeignet ist.

Hinweise zur Arbeit mit Bildern in GeoGebra:
- Bild kopieren und einfügen (mit strg + V)
- Bild anklicken, Einstellungen, Reiter „Farbe“ wählen, Deckkraft verringern
- Hochpunkt des Bogens in den Koordinatenursprung schieben
- in der Eingabezeile $y = ax$^2 eingeben
- GeoGebra bietet sofort einen Schieberegler für a an

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Informationen zum Brückenbau: Warum ist die Parabel so besonders?

Um Gewässer und Schluchten überqueren zu können, bauen Menschen schon seit der Urzeit Brücken. Die einfachste Form ist eine Balkenbrücke. Sie hat den Nachteil, dass das Brückenmaterial starken Zugkräften ausgesetzt ist. Die naheliegende Lösung, Zwischenpfeiler zu setzen, ist in der Praxis oftmals nicht möglich (z. B. bei tiefen Schluchten) oder zu materialaufwändig.
Eine neue Idee war der Bogen, der sich selbst trägt, siehe Abbildungen[1]. Baumeister von Tempeln und Gräbern kamen viele Jahrhunderte v. Chr. auf dieses Prinzip.

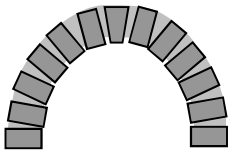

Abb. 1

Die älteste heute bekannte Bogenbrücke wurde 700 Jahre v. Chr. von den Persern in Jerwan (Irak) gebaut.
In einem ideal konstruierten Bogen treten keine Zugkräfte auf, die Belastung wird ins Fundament geleitet. Das Geheimnis des idealen Bogens wurde natürlich von den Baumeistern des Altertums streng gehütet.
Heute lernen es Kinder in der Schule: Es ist die Parabel.

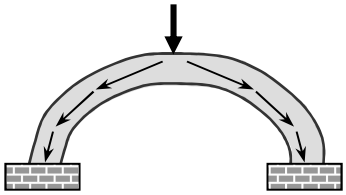

Abb. 2

Nun wäre solch ein Bogen mit modernen Verkehrsmitteln nur schlecht zu befahren. Deshalb wird er nicht direkt als Brücke benutzt, sondern als tragendes Element für eine waagerechte Straße. Derartige Brücken finden sich heute überall auf der Welt. Ein Beispiel ist die Müngstener Talbrücke (Müngsten, bei Solingen), die 1897 fertiggestellt wurde.

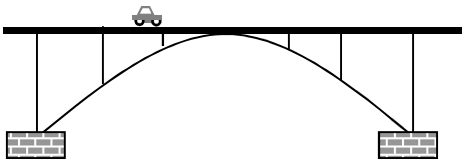

Abb. 3

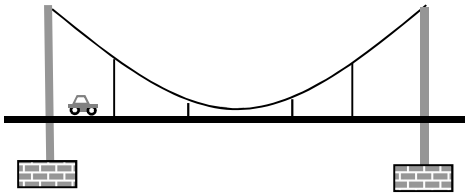

Abb. 4

[1] Abb. 1 – 4: Reblin für LISUM, 2024

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Aufgabe 1: Brückenkonstruktion (I) a

Als Tragegerüst für eine Straßenbrücke soll eine Parabelkonstruktion genutzt werden. Die Punkte, in denen die Parabel im Fundament verankert ist, liegen $40\ m$ auseinander. Der Bogen ist $30\ m$ hoch. Auf halber Höhe befindet sich die Straße. Sie trifft an zwei Punkten A und B mit dem Parabelbogen zusammen. Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie die Parabel in das Koordinatensystem gelegt werden könnte. Hier sind drei Möglichkeiten zu sehen:

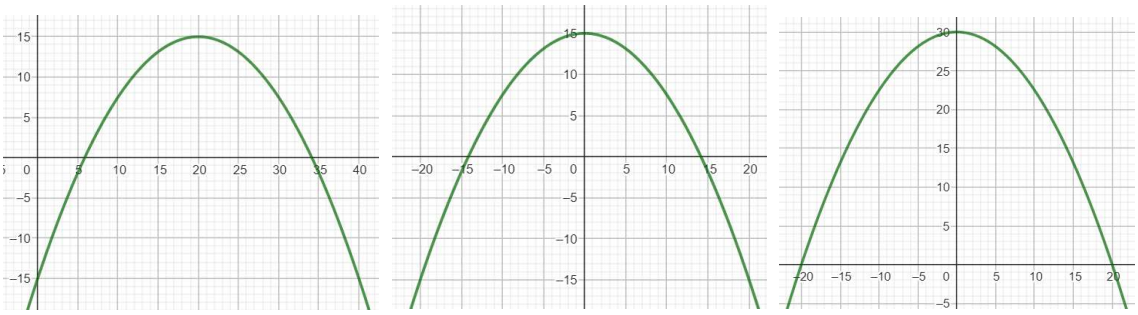

Abb 5[2]. $a)$ $b)$ $c)$:

- Zeichne die Bogenhöhe von $30\ m$, den horizontalen Abstand von $40\ m$ sowie die Punkte A und B in jede der Darstellungen ein.
- Wähle eines der Koordinatensysteme aus. Bestimme die Parabelgleichung und berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.
- In Abständen von $5\ m$ von der Mitte aus sollen senkrechte Streben der Konstruktion Halt geben. Berechne, wie lang diese Streben sein müssen.

Aufgabe 2: Parabelkonstruktion (I) b

Als Tragegerüst für eine Straßenbrücke soll eine Parabelkonstruktion genutzt werden. Die Punkte, in denen die Parabel im Fundament verankert ist, liegen $50\ m$ auseinander. Der Bogen ist $40\ m$ hoch. Auf halber Höhe befindet sich die Straße. Sie trifft an zwei Punkten A und B mit dem Parabelbogen zusammen.

- Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.
- In Abständen von $5\ m$ von der Mitte aus sollen senkrechte Streben der Konstruktion Halt geben. Berechne, wie lang diese Streben sein müssen.

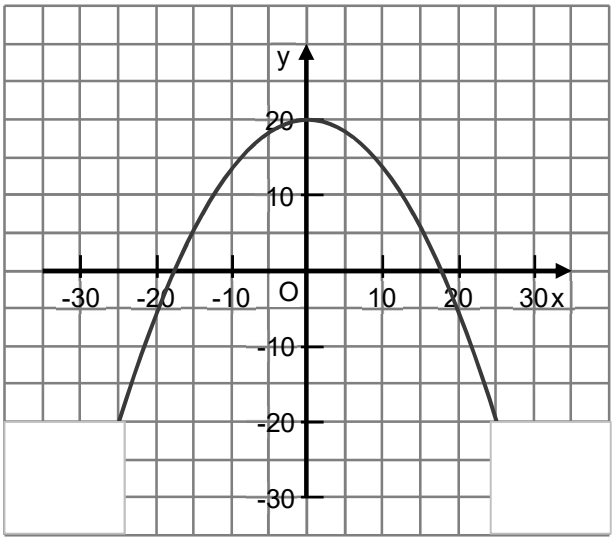

Abb. 6[3]

[2] Abb. 5 mit GeoGebra erstellt
[3] Abb. 6: Kück für LISUM, 2024

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Aufgabe 3: Brückenkonstruktion (II)

Eine $200\,m$ lange Brücke wird von einer parabelförmigen Konstruktion gestützt (siehe Abbildung[4]). Außer dem Auflagepunkt in der Mitte gibt es noch acht senkrechte Stützen auf denen die Brücke aufliegt. Alle Auflagepunkte sind gleich weit voneinander entfernt. Die Höhe der Brücke über dem Grund beträgt $80\,m$.

- Lege ein geeignetes Koordinatensystem fest.
- Berechne, wie lang die einzelnen senkrechten Stützen sein müssen.

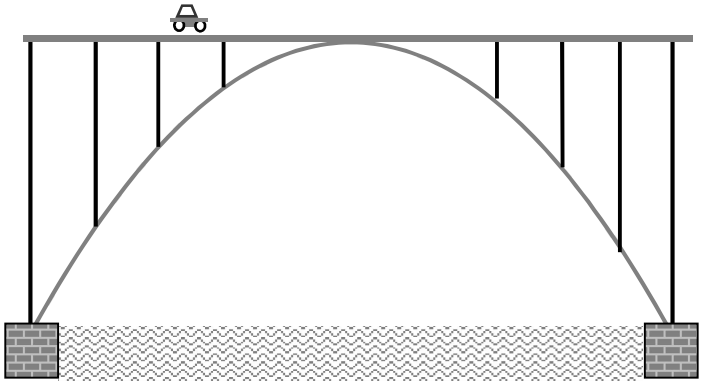

Abb. 7

Aufgabe 4: Gateway Arch – Parabeln überall?

In nebenstehender Abbildung ist ein symmetrischer Graph dargestellt. Die drei Punkte A, B und S lassen sich gut ablesen.

- Weise nach, dass es sich bei dem Graphen *nicht* um eine Parabel handelt. Bestimme dazu die Gleichung der Parabel durch A, B und S und zeichne sie ein.
- Prüfe, ob es sich bei einer der Bogenlinien des Bauwerks „Gateway Arch“, das in St. Louis, Missouri, USA steht, um eine Parabel handelt. Suche dazu ein geeignetes Bild im Internet, lade es herunter und füge es in GeoGebra ein (Download, z. B. als .jpg-Datei, öffnen, kopieren → GeoGebra öffnen, Bild mit strg + V einfügen).

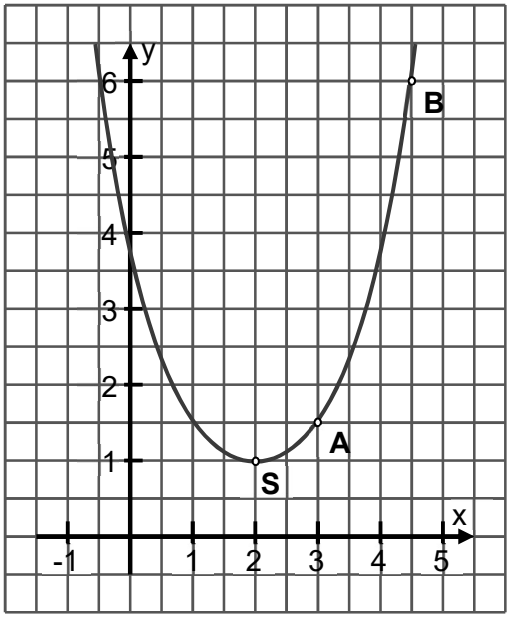

Abb. 8

[4] Abb. 7 und 8: Reblin für LISUM, 2024

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Lösungen

Aufgabe 1:
Die Darstellung $b)$ bietet sich für diese Aufgabe besonders an, da sich der Abstand der Punkte A und B aus den Nullstellen der Funktion ergibt. Auch in Darstellung $a)$ wäre der Abstand über die Nullstellen berechenbar, allerdings ermöglicht die Symmetrie der mittleren Parabel eine einfachere Berechnung. Das Koordinatensystem $c)$ nutzt ebenfalls die Symmetrie aus, jedoch kann hier der Abstand von A und B erst über einen zusätzlichen Schritt berechnet werden, indem die x-Werte zu $y = 15$ berechnet werden, da die Parabel um weitere 15 Einheiten nach oben verschoben wurde.

- $f(x) = ax^2 + 15$ → Koordinaten von $P(20|-15)$ einsetzen → $f(x) = -\frac{3}{40}x^2 + 15$
- Nullstellen berechnen: $x_1 \approx -14{,}14$; $x_2 \approx 14{,}14$; $\overline{AB} \approx 28{,}3\ m$
- Längen der Streben: $f(5) \approx 13{,}1\ m$; $f(10) = 7{,}5\ m$

Aufgabe 2:

- $f(x) = ax^2 + 20$ → Koordinaten von $P(25|-20)$ einsetzen → $f(x) = -\frac{8}{125}x^2 + 20$
- Nullstellen berechnen: $x_1 \approx -17{,}7$; $x_2 \approx 17{,}7$; $\overline{AB} \approx 35{,}4\ m$
- Längen der Streben: $f(5) = 18{,}4\ m$; $f(10) = 13{,}6\ m$

Aufgabe 3:
Individuelle Funktionsgleichungen möglich, z. B. bei Auflagepunkt (0|0): $y = -\frac{8}{1000}x^2$
Brückenpfeiler im Abstand von jeweils $25m$ → Längen: $5\ m$; $20\ m$; $45\ m$; $80\ m$

Aufgabe 4:

- Parabel mit Scheitelpunkt $S(2|1)$: $y = a \cdot (x-2)^2 + 1$
  durch $A(3|1{,}5)$: $1{,}5 = a \cdot (3-2)^2 + 1$ → a = 0,5 → $y = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 1$
  Einsetzen der x-Koordinate von $B(4{,}5|6)$:
  $y = 0{,}5 \cdot (4{,}5-2)^2 + 1 = 4{,}125 \neq 6$ → B liegt nicht auf dem Graphen

oder: $y = ax^2 + bx + c$

$S(2\|1)$:	I	$1 = 4a + 2b + c$
$A(3\|1{,}5)$:	II	$1{,}5 = 9a + 3b + c$
$B(4{,}5\|6)$:	III	$6 = 20{,}25a + 4{,}5b + c$

Lösung des GS: $a = 1$; $b = -4{,}5$; $c = 6$

→ Die Parabel $f: y = x^2 - 4{,}5x + 6$ würde durch die Punkte S, A und B verlaufen, jedoch wäre $S(2|1)$ nicht deren Scheitelpunkt und der Graph würde $P(0|6)$ die y-Achse schneiden.

- Die Bögen (außen und innen) des „Gateway Arch“ lassen sich nicht durch Parabeln modellieren. (Es handelt sich stattdessen um eine umgekehrte abgeflachte Kettenlinie, zu deren Beschreibung der *Cosinus Hyperbolicus* notwendig wäre.)

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0