Einsatz von GeoGebra zur Untersuchung der Sinus- und Kosinusfunktion

Zu: „Trigonometrie“, Jahrgangsstufe 9/10

Kommentar

Die nachfolgenden Arbeitsaufträge führen die Überlegungen zu den Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck fort und beleuchten den funktionalen Zusammenhang zwischen einem spitzen Winkel und der Gegenkathete (Sinusfunktion) bzw. Ankathete (Kosinusfunktion) im Einheitsdreieck.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

$y = a \cdot \sin(b \cdot x)$ und $y = a \cdot \cos(b \cdot x)$ mit GeoGebra untersuchen

- Untersuche mit GeoGebra verschiedene Funktionen der Form $y = a \cdot \sin(x)$, $y = \sin(b \cdot x)$, mit reellen Zahlen a, b. Diese Zahlen nennt man Parameter.
- Gibt man eine Funktion mit Parameter in GeoGebra ein, so wird automatisch ein Schieberegler für diesen Parameter erstellt.
- Nutze den Schieberegler, um den jeweiligen Parameter zu verändern.

Hinweise:
- Wähle für das Intervall $-\pi \leq x \leq 4\pi$.
- Teile die Achsen über den Menüpunkt „Gestaltung“ →„Einstellungen“ sinnvoll ein, z. B.: Beschriftung der x-Achse in der Einheit π, Abstand $\pi/2$.
- Es gibt eine Zoomfunktion (Lupe, unten rechts). Das Koordinatengitter lässt sich durch Ziehen mit dem Mauszeiger verschieben.
- Durch Anklicken des farbigen Punktes (Kreises) vor der Funktionsgleichung kann man den Graphen ausblenden und wieder einblenden.

Fragen:
1. Beschreibe, welchen Einfluss der Parameter a auf den Verlauf der Funktionen $y = a \cdot \sin(x)$ bzw. $y = a \cdot \cos(x)$ hat (Wertebereich, Nullstellen, Extrempunkte, Periode).
2. Beschreibe, welchen Einfluss der Parameter b auf den Verlauf der Funktionen $y = \sin(b \cdot x)$ bzw. $y = \cos(b \cdot x)$ hat (Wertebereich, Nullstellen, Extrempunkte, Periode).
3. Betrachte auch Funktionen der Form $y = a \cdot \sin(b \cdot x)$ bzw. $y = a \cdot \cos(b \cdot x)$. Entscheide, ob die in 1. und 2. gefundenen Zusammenhänge auch hier gültig sind.

Zusatz:
4. Untersuche, wie sich die Parameter c und d in den folgenden Funktionsgleichungen auswirken: $y = \sin(x + c)$, $y = \sin(x) + d$, $y = \cos(x + c)$, $y = \cos(x) + d$.
   Für welches c gilt: $y = \sin(x + c) = \cos(x)$?

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Lösungen

1. Der Parameter a bewirkt eine Streckung / Stauchung des Graphen in y-Richtung (Veränderung der Amplitude).

	$y = a \cdot \sin(x)$	$y = a \cdot \cos(x)$
Wertebereich	$[-a, a]$	$[-a, a]$
Nullstellen	$k{\cdot}\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{2} \cdot \pi + k{\cdot}\pi, k \in \mathbb{Z}$
Extrempunkte	lok. Max. $\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, a\right)$, lok. Min $\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, -a\right)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$	lok. Max. $(k \cdot 2\pi, a)$, lok. Min $(\pi + k \cdot 2\pi, -a)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$
Periode	2π	2π

2. Der Parameter b bewirkt eine Streckung / Stauchung des Graphen in x-Richtung (Veränderung der Periode / Frequenz).

	$y = \sin(b \cdot x)$	$y = \cos(b \cdot x)$
Wertebereich	$[-1,1]$	$[-1,1]$
Nullstellen	$\frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{2b}\pi + \frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$
Extrempunkte	lok. Max. $\left(\frac{1}{2b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, 1\right)$, lok. Min. $\left(\frac{3}{2b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, -1\right)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$	lok. Max. $\left(\frac{2k\pi}{b}, 1\right)$, lok. Min. $\left(\frac{1}{b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, -1\right)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$
Periode	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$

3. Ja, sie werden miteinander kombiniert:

	$y = a \cdot \sin(b \cdot x)$	$y = a \cdot \cos(b \cdot x)$
Wertebereich	$[-a, a]$	$[-a, a]$
Nullstellen	$\frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{2b}\pi + \frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$
Extrempunkte	lok. Max. $\left(\frac{1}{2b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, a\right)$, lok. Min. $\left(\frac{3}{2b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, -a\right)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$	lok. Max. $\left(\frac{2k\pi}{b}, a\right)$, lok. Min. $\left(\frac{1}{b}\pi + \frac{2k\pi}{b}, -a\right)$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$
Periode	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$

Zusatz:
- Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung (Phase)
- Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung (Mittellage)
- $y = \sin(x + c) = \cos(x)$ gilt für $c = \frac{1}{2}\pi$.

Dieses Material ist Teil der Unterrichtsmaterialien zu den Planungshilfen für einen kompetenzorientierten Unterricht.
Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0