Einsatz von GeoGebra zur Abwicklung des Einheitskreises (Spurfunktion)

Zu: „Trigonometrie“, Jahrgangsstufe 9/10

Kommentar

Das Hilfsmittel *Einheitskreis* soll die geometrischen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu Sinus und Kosinus erweitern und anschließend zu den trigonometrischen Funktionen führen. Dazu wird der Zusammenhang zwischen x- bzw. y-Koordinate eines beliebigen Punktes auf dem Einheitskreis und den Sinus- bzw. Kosinus-Werten des zugehörigen Winkels betrachtet. Anfangs werden rechtwinklige Dreiecke betrachtet, deren spitze Winkel $90°$ nicht überschreiten. Dabei ist ein Bezug zur Geometrie noch vorhanden. Mit Hilfe des Einheitskreises können die Überlegungen nun auf Winkel größer als $90°$ übertragen werden. Mit der GeoGebra-Datei „Abwicklung Einheitskreis“, siehe https://www.geogebra.org/m/tax5ccm9, kann diese Erweiterung von den Seitenverhältnissen zur Zuordnung veranschaulicht werden.

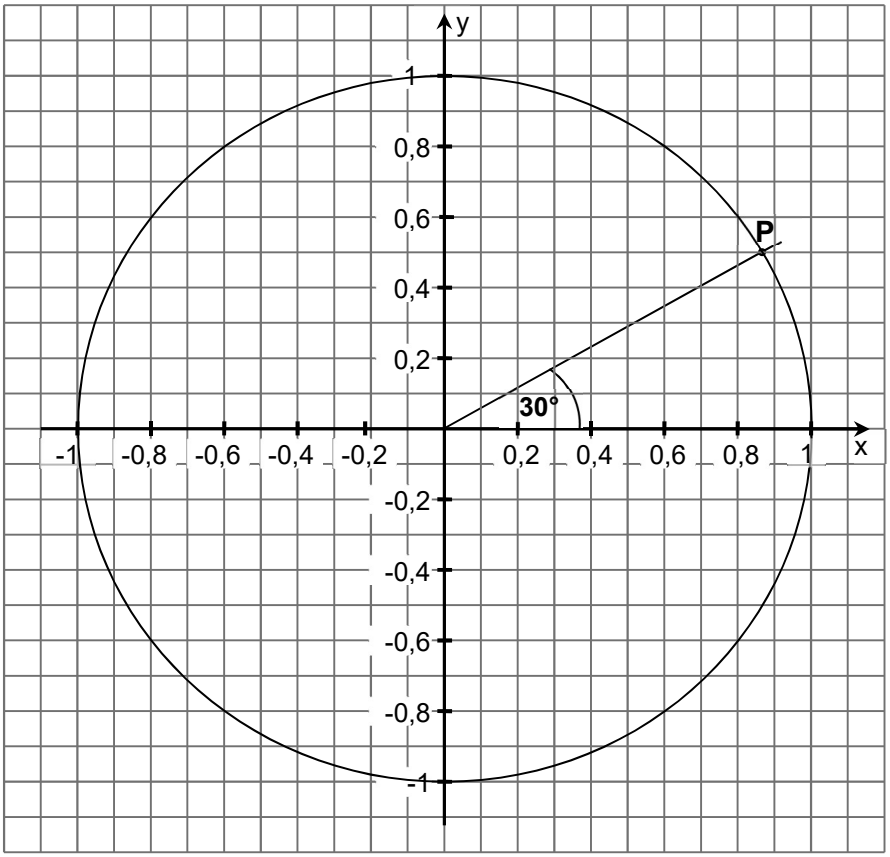
Die nachfolgenden Aufgaben sind dafür geeignet, sich mit dem Einheitskreis und der Zuordnung zwischen Winkelgröße und y-Koordinate (bzw. x-Koordinate) vertraut zu machen. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zunächst mit Winkeln bis $90°$ und gehen innerhalb der Aufgaben schrittweise über $90°$ hinaus. Sie entwickeln im letzten Aufgabenteil eine Vorstellung, wie sich die y-Koordinate verhält, wenn der Punkt P auf dem Kreis weiterläuft. Indem Punkt P einmal vollständig auf dem Kreis entlang läuft, ergibt sich durch die Betrachtung der y-Koordinate der Graph der Sinusfunktion bzw. durch Betrachtung der x-Koordinate der Graph der Kosinusfunktion. Hierfür kann die o. g. GeoGebra-Datei eingesetzt werden, sie zeigt die Abtragung der Koordinaten mit Hilfe des Spurmodus. Vor Bearbeitung der Aufgaben sollten ggf. Begriffe wie z. B. „trigonometrische Beziehungen“ oder „Einheitskreis“ geklärt werden.

Die Untersuchung der trigonometrischen Funktionen als eigene Funktionenklasse schließt sich daran an. Die trigonometrischen Funktionen sind insbesondere in der Physik ein notwendiges Instrument um Schwingungen und Wellen beschreiben zu können.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Arbeitsaufträge zu trigonometrischen Beziehungen im Einheitskreis

Im nebenstehenden Koordinatensystem ist ein Einheitskreis $(M(0|0), r = 1)$ dargestellt. Der Punkt P liegt auf diesem Kreis, wobei die Strecke $\overline{OP}$ mit der x-Achse einen Winkel von $30°$ einschließt.

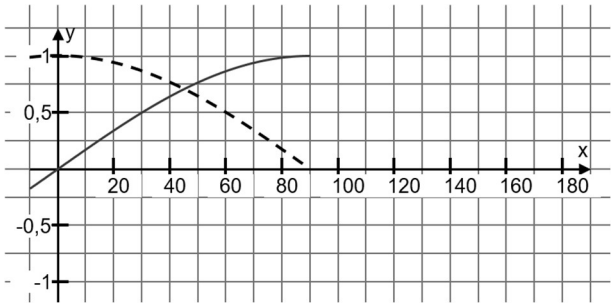


Grundaufgaben a) – e)

a) Lies die ungefähren Koordinaten von P ab.
b) Gib die Koordinaten von P mittels trigonometrischer Beziehungen an.
c) Prüfe, ob für die Koordinaten gilt: $x^2 + y^2 = 1$.
d) Punkt $Q1(0{,}8|0{,}6)$ liegt auf dem Einheitskreis, denn es gilt: $0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$.
Berechne den zugehörigen Steigungswinkel γ (zwischen $\overline{OQ1}$ und der x-Achse).
e) Punkt $Q2(x|0{,}891)$ liegt ebenfalls auf dem Kreis.
Bestimme die x-Koordinate und den zugehörigen Winkel.

Erweiterungsaufgaben f) – h)

f) Zeichne einen Punkt $Q3$ ein, so dass der Winkel zwischen x-Achse und $\overline{OQ1}$ $150°$ beträgt.
Bestimme die Koordinaten dieses Punktes $Q3$.
g) Wie entwickeln sich die Sinuswerte für Winkel von $90°$ bis $180°$?
Wie entwickeln sich die Kosinuswerte in diesem Bereich?
h) Dargestellt sind die Graphen von $y = sin(x)$ und $y = cos(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 90°$.
Beschrifte die Graphen. Setze sie fort bis $x = 180°$. Bestimme dazu mit dem Taschenrechner die Koordinaten einer angemessenen Anzahl von Punkten in diesem Bereich.
Öffne anschließend die GeoGebra-Datei „Abwicklung Einheitskreis“, siehe https://www.geogebra.org/m/tax5ccm9 und überprüfe deine Darstellung.



Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Lösungen

Grundaufgaben a) – e)

a) $P(0{,}87|0{,}5)$

b) $P(sin(30°)|cos(30°))$

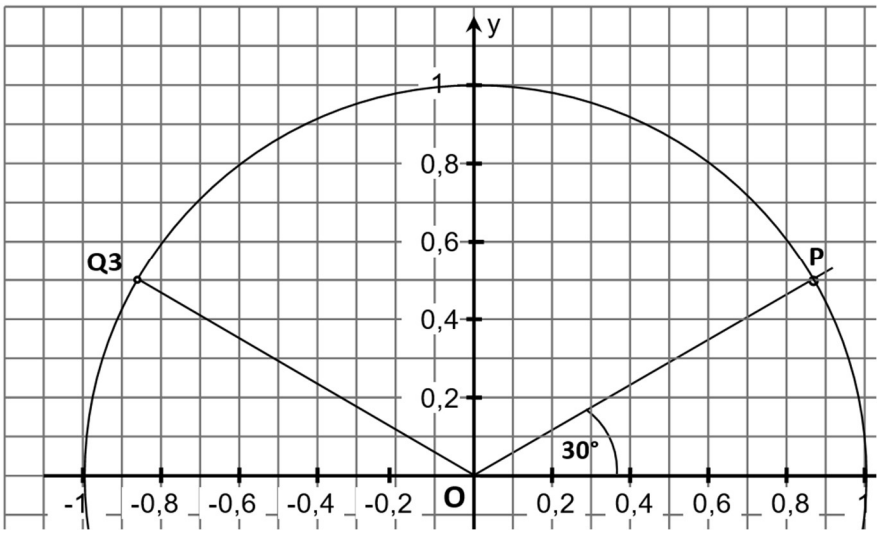
c) Für die Koordinaten gilt: $0{,}87^2 + 0{,}5^2 \approx 1$.

d) $\gamma = \sin^{-1}(0{,}8) \approx 53°$

e) Es gibt zwei mögliche Lagen (Symmetrie): Für einen Winkel von ca. $63°$ ist $Q2(0{,}45|0{,}891)$ und für einen Winkel von ca. $117°$ $(180° - 63°)$ ist $Q2'(-0{,}45|0{,}891)$.

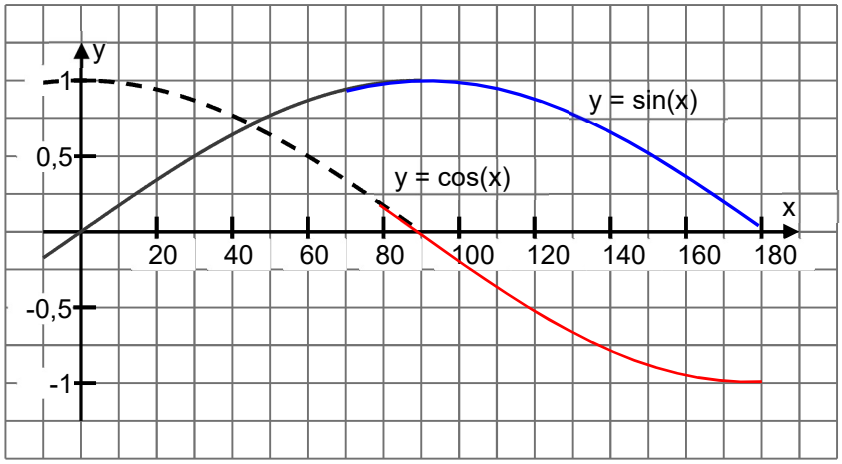
Erweiterungsaufgaben f) – h)

f) $Q3(-0{,}87|0{,}5)$



g) Im Bereich von $90°$ bis $180°$ nehmen die Werte für den Sinus (Gegenkatheten-Länge) von 1 beginnend ab bis 0. Die Kosinuswerte nehmen von 0 beginnend ab bis -1.

h)



Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0