Einsatz von GeoGebra zur Entdeckung von Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck

Zu: „Trigonometrie“, Jahrgangsstufe 9/10

Kommentar

Die GeoGebra-Dateien „Seitenverhaeltnis_1.ggb“ und „Seitenverhaeltnis_2.ggb“ (zu finden unter https://www.geogebra.org/m/tax5ccm9) dienen zur Einführung von Sinus und Kosinus als Beziehungen zwischen Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck. Mit den zugehörigen Arbeitsaufträgen können die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen einem Winkel und den Seitenverhältnissen zwischen Gegenkathete / Hypotenuse bzw. Ankathete / Hypotenuse selbst entdecken.
Inhaltlicher Ansatz ist die Zuordnung zwischen Winkel und Länge seiner Gegenkathete bzw. Ankathete im Einheitskreis. Dabei wird auf die Thematik *Einheitskreis* nicht explizit eingegangen.
Die Begriffsbildung „Sinus“ und „Kosinus“ sollte dann im darauffolgenden Unterricht stattfinden, ebenso die Darstellung der Zusammenhänge mit den entsprechenden Gleichungen.

Vorschlag für eine zeitliche Reihenfolge und inhaltliche Einbettung:

(1) Vorbereitend:
- Wiederholung einfacher Beziehungen im Dreieck (Innenwinkelsumme, Dreiecksungleichung, Seite-Winkel-Relation) und Satz des Pythagoras
- Wiederholung ausgewählter Dreieckskonstruktionen, z. B. nach den Kongruenzsätzen sws und wsw

(2) Problemstellung formulieren: „Wenn sich mit zwei Winkeln und einer Seite ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt, kann man dann die konstruierten Seiten auch berechnen?“

(3) Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_1.ggb“ von den Schülerinnen und Schülern bearbeiten lassen. Falls notwendige Medien (Tablet o.ä.) nicht verfügbar sind, kann die Bearbeitung auch im Unterrichtgespräch erfolgen.

(4) Auswertung, Definition des Sinus (am Einheitskreis), Beschreibung mit Gleichung

(5) Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_2.ggb“ von den Schülerinnen und Schülern bearbeiten lassen, analog zum obigen Vorgehen.

(6) Auswertung, Definition des Kosinus (am Einheitskreis), Beschreibung mit Gleichung

(7) Möglich: Darstellung der Zuordnungen $\alpha \to \sin(\alpha)$ und $\alpha \to \cos(\alpha)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem im Bereich $0 \leq \alpha \leq 90°$

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_1.ggb“

Öffne die Datei „Seitenverhaeltnis_1.ggb“.

(1) Dargestellt ist ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse hat die Länge $c = 1$. Die Größe des Winkels α und die Länge der gegenüberliegenden Kathete a_1 (Gegenkathete) werden angezeigt.
Mit dem Schieberegler „Winkel verändern“ kannst du die Größe des Winkels α und somit die Lage des Punktes P ändern.

- Verändere den Winkel α und beobachte die Werte für α und a_1.
- Beschreibe deine Beobachtung (z. B. mit einer „Je-desto-Beziehung“).
  In welchem Intervall liegen die Werte für a_1?
- Beobachte die Spur des Punktes P: Punkt P mit Mauszeiger und linker Maustaste anwählen, rechte Maustaste, „⋰ Spur anzeigen“. Ändere den Winkel.
  Beschreibe die Bahn des Punktes P.

(2) Mit dem Button [↩] kannst du die Spur des Punktes wieder löschen. Beende anschließend den Spuranzeigemodus (rechte Maustaste).
Als nächstes werden rechtwinklige Dreiecke betrachtet, deren Hypotenuse $c \neq 1$ ist.
Aktiviere dazu das Kontrollkästchen.
Es erscheint ein Punkt „B“, dessen Lage mit dem Mauszeiger verändert werden kann.
Angezeigt werden die Länge der Gegenkathete a_i und die Länge der Hypotenuse c.

- Verändere die Lage des Punktes B. Beobachte die Werte für a_i und „Länge der Hypotenuse“. Verändere auch den Winkel.
  (Tipp: $\alpha = 30°$ einstellen, Länge der Hypotenuse ganzzahlig wählen, a_1 und a_i vergleichen)
- Beschreibe deine Beobachtung.

(3) Betrachte in der Tabellenansicht die Werte für die Länge der Gegenkathete eines Winkels bei verschiedenen Hypotenusenlängen $(1;\ 2;\ 3;\ 4)$.

- Beschreibe den Zusammenhang.
- Gib die Werte für Hypotenusenlänge 10 an.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_2.ggb“

Öffne die Datei „Seitenverhaeltnis_1.ggb“.

(1) Dargestellt ist ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse hat die Länge $c = 1$. Die Größe des Winkels α und die Länge der anliegenden Kathete b_1 (Ankathete) werden angezeigt. Mit dem Schieberegler „Winkel verändern“ kannst du die Größe des Winkels α und somit die Lage des Punktes P ändern.

- Verändere den Winkel α und beobachte die Werte für α und b_1.
- Beschreibe deine Beobachtung (z. B. mit einer „Je-desto-Beziehung“).
  In welchem Intervall liegen die Werte für b_1?

(2) Als nächstes werden rechtwinklige Dreiecke betrachtet, deren Hypotenuse $c \neq 1$ ist. Aktiviere dazu das Kontrollkästchen.
Es erscheint ein Punkt „B“, dessen Lage mit dem Mauszeiger verändert werden kann. Angezeigt werden die Länge der Ankathete b_i und die Länge der Hypotenuse c.

- Verändere die Lage des Punktes B. Beobachte die Werte für b_i und „Länge der Hypotenuse“. Verändere auch den Winkel.

  (Tipp: $\alpha = 60°$ einstellen, Länge der Hypotenuse ganzzahlig wählen, b_1 und b_i vergleichen)
- Beschreibe deine Beobachtung.

(3) Betrachte in der Tabellenansicht die Werte für die Länge der Ankathete eines Winkels bei verschiedenen Hypotenusenlängen $(1;\ 2;\ 3;\ 4)$.

- Beschreibe den Zusammenhang.
- Gib die Werte für Hypotenusenlänge 10 an.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Erwartungsbild für „Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_1.ggb“

(1) Je größer der Winkel α, desto länger die Gegenkathete a_1.
Die Werte für a_1 liegen zwischen 0 und 1.
Der Punkt P bewegt sich auf einem Kreis/Viertelkreis (mit dem Radius $r = c = 1$).

(2) Bei jedem Winkel gilt: Je länger die Hypotenuse, desto länger ist auch die Gegenkathete a_i.
oder sogar: Die Gegenkathete a_i vergrößert sich um denselben Faktor, um den die Hypotenuse vergrößert wird.

(3) Die Werte von a_1, multipliziert mit der Länge der Hypotenuse, ergeben zu jedem Winkel die Längen der Gegenkatheten.

Hypotenuse \ α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$
1	$0{,}174$	$0{,}342$	$0{,}5$	$0{,}643$
10	$1{,}74$	$3{,}42$	5	$6{,}43$

Erwartungsbild für „Arbeitsaufträge zu „Seitenverhaeltnis_2.ggb“

(1) Je größer der Winkel α, desto kürzer die Ankathete b_1.
Die Werte für b_1 liegen zwischen 0 und 1.

(2) Bei jedem Winkel gilt: Je länger die Hypotenuse, desto länger ist auch die Ankathete b_i.
oder sogar: Die Ankathete b_i vergrößert sich um denselben Faktor, um den die Hypotenuse vergrößert wird.

(3) Die Werte von b_1 multipliziert mit der Länge der Hypotenuse ergeben zu jedem Winkel die Längen der Ankatheten.

Hypotenuse \ α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$60°$
1	$0{,}985$	$0{,}940$	$0{,}866$	$0{,}766$	$0{,}5$
10	$9{,}85$	$9{,}40$	$8{,}66$	$7{,}66$	5

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0