Konfidenz- und Prognoseintervalle

Zu: „Daten und Zufall“, Jahrgangsstufe 9/10

Fachlicher Hintergrund:

Konfidenzintervalle beschreiben Intervalle, mit denen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit gewisser Sicherheit geschätzt werden kann, nachdem man n stochastisch unabhängige Wiederholungen eines Zufallsexperiments beobachtet und die Anzahl der Realisierungen des Ereignisses gezählt hat. („Mit gewisser Sicherheit“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass im nachfolgenden Szenario die Aussage über p in 95% der Fälle korrekt ist, wenn man das Experiment, die Reißzwecke 10 000-mal zu werfen, sehr oft wiederholt.)

Beispiel:
Wir gehen davon aus, dass es beim Werfen einer Reißzwecke für das Ereignis „landet auf der Spitze“ eine Wahrscheinlichkeit p gibt und werfen eine Reißzwecke 10 000-mal. Dabei landet die Reißzwecke 7.853-mal auf der Spitze. Das legt nahe, dass p in der Nähe von $0{,}7853$ liegt, d. h. in einem Intervall um $0{,}7853$. Die Größe des Intervalls lässt sich über das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz bestimmen: $\frac{1}{\sqrt{10\,000}} = 0{,}01$, wobei mithilfe dieses Terms die Intervallgrenzen bestimmt werden. Das Konfidenzintervall für p lautet $[0{,}7853 - 0{,}01; 0{,}7853 + 0{,}01] = [0{,}7753; 0{,}7953]$. Mit gewisser Sicherheit kann man nun behaupten, dass p in diesem Intervall liegt.

Allgemeine Formulierung: Bei n (stochastisch unabhängigen) Wiederholungen eines Zufallsexperimentes mit k Erfolgen liegt die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges in 95 % der Fälle im Intervall $\left[\frac{k}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{k}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Im Physikunterricht werden solche Intervalle als Vertrauensintervalle von Messgrößen genutzt.

Prognoseintervalle: Ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis im Kontext eines Zufallsexperimentes bekannt, so kann man eine Prognose dazu anstellen, in welchem Intervall die relative bzw. die absolute Häufigkeit dieses Ereignisses voraussichtlich fallen wird, wenn man das Zufallsexperiment n-mal stochastisch unabhängig wiederholt. („Voraussichtlich“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass im nachfolgenden Szenario die Aussage über die relative Häufigkeit in 95% der Fälle korrekt ist, wenn man das Experiment, die Münze 100-mal zu werfen, sehr oft wiederholt.)

Beispiel:
Wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ beim Wurf einer Münze $0{,}5$ beträgt. Wenn die Münze nun 100-mal geworfen wird, liegt die relative Häufigkeit für das Ereignis „Kopf“ in der Nähe von $0{,}5$, d. h. in einem Intervall um $0{,}5$. Die Annahme, dass die relative Häufigkeit genau $0{,}5$ sein würde bzw. dass genau 50-mal „Kopf“ erscheint, ist eine gängige Fehlvorstellung. Die Größe des Intervalls lässt sich über das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz bestimmen: $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}1$; das Prognoseintervall für relative Häufigkeiten lautet $[0{,}5 - 0{,}1; 0{,}5 + 0{,}1] = [0{,}4; 0{,}6]$ (übertragen auf absolute Häufigkeiten $[40;\ 60]$). Voraussichtlich wird man also zwischen 40- und 60-mal „Kopf“ erhalten.

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Allgemeine Formulierung: Beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges bei einem Zufallsexperiment p, so liegt die relative Häufigkeit der Erfolge nach n (stochastisch unabhängigen) Wiederholungen des Zufallsexperimentes in 95 % der Fälle im Intervall $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, die absolute Häufigkeit liegt in 95 % der Fälle im Intervall $[pn - \sqrt{n}; pn + \sqrt{n}]$.

Faustregeln:

- Um die Länge des Intervalls zu halbieren, benötigt man die vierfache Anzahl von Wiederholungen.
- Für eine Genauigkeit von $0{,}1$ benötigt man 100 Wiederholungen ($\frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}1$).
- Für eine Genauigkeit von $0{,}01$ benötigt man $10\,000$ Wiederholungen ($\frac{1}{\sqrt{10\,000}} = 0{,}01$).

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

Vorgehen im Unterricht, Variante 1

1. Schritt: Prognoseintervalle an einem Beispiel kennenlernen

Eine (faire) Münze soll 100-mal (zufällig und stochastisch unabhängig) geworfen werden.

- schätzen, wie oft „Kopf“ fällt; experimentell untersuchen, welche Schätzung korrekt war / relativ nahe am Ergebnis / weit entfernt vom Ergebnis lag (SuS werfen in Kleingruppen Münzen) → Viele Ergebnisse für die relative Häufigkeit von „Kopf“ liegen in der Nähe von $0{,}5$. Es kommt sehr selten vor, dass das Ergebnis exakt korrekt vorhergesagt wird; Vorhersage eines Intervalls (symmetrisch um $0{,}5$) naheliegend.
- 100-fachen Münzwurf simulieren (z. B. mit Excel), relative Häufigkeit von „Kopf“ automatisiert bestimmen, Simulation 10 000-mal wiederholen, Frage: In welchem Intervall liegen fast alle (95 %) der relativen Häufigkeiten? (z. B. mithilfe eines Pareto-Diagramms beantwortbar, in Excel Containerbreite $0{,}01$ wählen) → 95% der relativen Häufigkeiten liegen im Intervall $]0{,}4;\ 0{,}6]$.
- Bekanntgeben der (vereinfachten) Faustregeln:
  - Für eine Genauigkeit von $0{,}1$ benötigt man 100 Wiederholungen (wie hier phänomenologisch erarbeitet).
  - Für eine Genauigkeit von $0{,}01$ benötigt man $10\,000$ Wiederholungen (als Ausblick).

2. Schritt: Übertragung der Faustregeln auf Konfidenzintervalle mithilfe eines Beispiels

- umgekehrtes Szenario: Wahrscheinlichkeit unbekannt, Experiment möglich: 10 000-faches Werfen einer Reißzwecke, die 7853-mal auf der Spitze landet (oder Zahl aus eigenem Experiment nutzen, dann nur 100 Wiederholungen) → liefert relative Häufigkeit, von der auf die Wahrscheinlichkeit geschlossen werden soll
- Analog zu Prognoseintervallen kann so das Konfidenzintervall $[0{,}7753; 0{,}7953]$ aufgestellt werden.

Vorgehen im Unterricht, Variante 2

1. Schritt: Prognoseintervalle kennenlernen

Eine (faire) Münze soll 100-mal (zufällig und stochastisch unabhängig) geworfen werden.

- schätzen, wie oft „Kopf“ fällt; experimentell untersuchen, welche Schätzung korrekt war / relativ nahe am Ergebnis / weit entfernt vom Ergebnis lag (SuS werfen in Kleingruppen Münzen) → Viele Ergebnisse für die relative Häufigkeit von „Kopf“ liegen in der Nähe von $0{,}5$. Es kommt sehr selten vor, dass das Ergebnis exakt korrekt vorhergesagt wird; Vorhersage eines Intervalls (symmetrisch um $0{,}5$) naheliegend.
- 100-fachen Münzwurf simulieren (z. B. mit Excel), relative Häufigkeit von „Kopf“ automatisiert bestimmen, Simulation 10 000-mal wiederholen, Frage: In welchem Intervall liegen fast alle (95 %) der relativen Häufigkeiten? (z. B. mithilfe eines Pareto-Diagramms beantwortbar, in Excel Containerbreite $0{,}01$ wählen) → 95% der relativen Häufigkeiten liegen im Intervall $]0{,}4;\ 0{,}6]$.
- 400-fachen Münzwurf simulieren (z. B. mit Excel), relative Häufigkeit von „Kopf“ automatisiert bestimmen, Simulation 10.000-mal wiederholen, Frage: In welchem Intervall liegen fast alle (95 %) der relativen Häufigkeiten? (z. B. mithilfe eines Pareto-Diagramms

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0

beantwortbar, in Excel Containerbreite $0{,}01$ wählen) → 95% der relativen Häufigkeiten liegen im Intervall $]0{,}45;\ 0{,}55]$.
- Übertragen der Prognoseintervalle auf absolute Häufigkeiten, in den obigen Beispielen $]40; 60]$ beim 100-fachen Münzwurf und $]450; 550]$ beim 10 000-fachen Münzwurf.
- Thematisieren, dass es irrelevant ist, ob man die Intervallgrenzen zum Intervall dazunimmt oder nicht
- Bekanntgeben der (vereinfachten) Faustregeln:
  - Für eine Genauigkeit von $0{,}1$ benötigt man 100 Wiederholungen (wie hier phänomenologisch erarbeitet).
  - Um die Länge des Intervalls zu halbieren, benötigt man die vierfache Anzahl von Wiederholungen (Bezug zu den Experimenten mit 100 bzw. 400 Wiederholungen).
  - ggf.: Die Abweichung von der Mitte des Intervalls beträgt jeweils $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (auf Beispiele beziehen).
  - Für eine Genauigkeit von $0{,}01$ benötigt man $10\ 000$ Wiederholungen (als Anwendung der $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Regel).
- Übungsaufgaben: Intervalle berechnen und mithilfe von Simulationen prüfen

2. Schritt: Übertragung der Faustregeln auf Konfidenzintervalle

- umgekehrtes Szenario: Wahrscheinlichkeit unbekannt, Experiment möglich: 10 000-faches Werfen einer Reißzwecke, die 7853-mal auf der Spitze landet (oder Zahl aus eigenem Experiment nutzen, dann nur 100 Wiederholungen) → liefert relative Häufigkeit, von der auf die Wahrscheinlichkeit geschlossen werden soll
- Analog zu Prognoseintervallen kann so das Konfidenzintervall $[0{,}7753; 0{,}7953]$ für relative Häufigkeiten aufgestellt werden.
- Übertragen auf absolute Häufigkeiten

Vorgehen im Unterricht, Variante 3

siehe MatheWelt „Zufällige Schwankungen untersuchen“ zu „mathematik lehren“, Heft 232, Juni 2022, https://www.friedrich-verlag.de/shop/mathe-welt-ml-232-1849063

Die Inhalte sind, sofern nicht abweichend gekennzeichnet, veröffentlicht unter: LISUM 2024, CC BY-SA 4.0