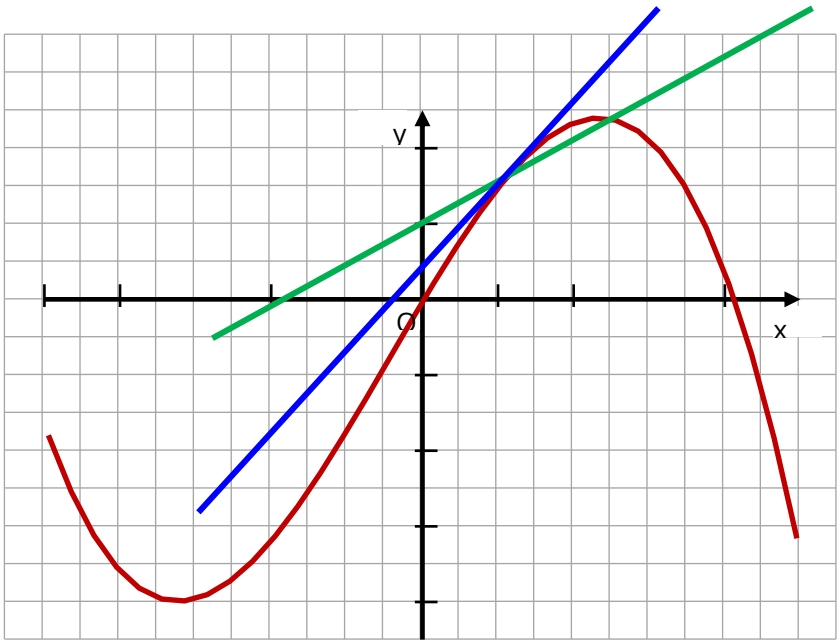
LAND BRANDENBURG

Ganzrationale Funktionen – Veränderungen mit Funktionen beschreiben

Ergänzung zu den Planungshilfen und Material zur Unterrichtsgestaltung im Fach Mathematik in der Jahrgangsstufe 10 an Gymnasien



libra
Landesinstitut Brandenburg
für Schule und Lehrkräftebildung

Ganzrationale Funktionen

– Veränderungen mit Funktionen beschreiben

Ergänzung zu den Planungshilfen und Material zur Unterrichtsgestaltung im Fach Mathematik in der Jahrgangsstufe 10 an Gymnasien

Mike Reblin

Impressum

Herausgeber:
Landesinstitut Brandenburg für Schule und Lehrkräftebildung (LIBRA)
14974 Ludwigsfelde
Tel.: 03378 209 - 0
Fax: 03378 209 - 149
www.libra.brandenburg.de

Zu dieser Handreichung haben mit Tipps und Hinweisen beigetragen: Anne Herenz, Carmen Kück.

Autorinnen und Autoren der Erstfassung (LISUM, Ludwigsfelde, 2009): Viola Adam, Ines Fröhlich, Sabine Jagst, Mike Reblin, Gudrun Riemann

Wir bedanken uns für die engagierte Unterstützung.

Redaktion: Dr. Birgit Griese

Gestaltung: Mike Reblin

Titelbild: Mike Reblin

Bildnachweise: siehe Abbildungsverzeichnis, Seite 71

Landesinstitut Brandenburg für Schule und Lehrkräftebildung (LIBRA), Ludwigsfelde 2025

Genderdisclaimer
Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter: männlich, weiblich und divers (m/w/d).

creative commons Soweit nicht abweichend gekennzeichnet zur Nachnutzung freigegeben unter der Creative Commons Lizenz CC0 zu finden unter:
https://creativecommons.org/public-domain/cc0/

Alle Internetquellen, die in der Handreichung genannt werden, wurden am 22.01.2025 zuletzt geprüft.

Inhaltsverzeichnis

Ganzrationale Funktionen – Veränderungen mit Funktionen beschreiben 1

1 Zielstellung und inhaltsbezogene Standards 3

2 Schulinterne Planung der Unterrichtseinheit 4

3 Kommentierte Unterrichtsmaterialien 6

Material 1a: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen 6

Material 1b: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen (offene Variante) .. 7

Material 1c: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen (mit digitalen Hilfsmitteln) 7

Material 2: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen 9

Material 3: Nullstellenverfahren 11

1 Ausklammern 12
2 Substituieren biquadratischer Gleichungen 13
3 Reduzieren durch Polynomdivision 14

Material 4: Einfache Funktionseigenschaften 23

1 Schnittpunkt mit der y-Achse 23
2 Symmetrie 24
3 Verhalten im Unendlichen 26
4 Hochpunkte und Tiefpunkte 28
Übungen zu Material 4 (Einfache Funktionseigenschaften) 30

Material 5: Zusammenhang zwischen Monotonie und Lage von Extrempunkten 34

Material 6: Veranschaulichung der mittleren und lokalen Änderungsrate an Beispielen 39

Material 7: Näherungsweise Bestimmung von Funktionsanstiegen 43

Material 8: Zusammenhang zwischen Tangenten- und Sekantenanstieg 48

Material 9: Änderungsfunktion (Ableitungsfunktion) näherungsweise mittels Tabellenkalkulation bestimmen 50

Material 10: Graphenpuzzle (Funktionsgraph und Graph der Ableitungsfunktion einander zuordnen) ... 52

Material 11: Gewinnfunktionen 57

Arbeitsblatt Gewinnfunktionen 58

Material 12: Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten 64

4 Anhang 69

Sprachspeicher zum Thema Quadratische Funktionen 69

Abbildungsverzeichnis 71

1 Zielstellung und inhaltsbezogene Standards

Seit der Schulzeitverkürzung für Abiturientinnen und Abiturienten an Gymnasien (2012) ist es notwendig, die Jahrgangstufe 10 auch als Einführungsphase zum Übergang in die zweijährige Qualifikationsphase zu nutzen. Im Rahmenlehrplan für das Fach Mathematik (RLP 1–10, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin und Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, Hrsg., 2015. Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1 bis 10 in Berlin und Brandenburg. Berlin, Potsdam, Teil C. Verfügbar unter: https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_10_13_Ma_14.08.2023_Berlin_23_11.pdf) ist in diesem Sinne u. a. das Thema „Ganzrationale Funktionen" beschrieben. Zum inhaltsbezogenen Standard „Die Schülerinnen und Schüler können Eigenschaften von Funktionen beschreiben (auch Potenz-, Exponential- und ausgewählte ganzrationale Funktionen)"[1] gehören folgende konkreten inhaltlichen Vorgaben[2]:

- Lösen ausgewählter Gleichungen mit höheren Potenzen (z. B. durch Faktorisieren, Substituieren oder Polynomdivision) und mit Wurzeln
- Beschreiben des Änderungsverhaltens ausgewählter ganzrationaler Funktionen durch eine Skizze der Ableitungsfunktion und Angeben markanter Punkte (z. B. Hoch-, Tief-, Wendepunkte)
- Bestimmen von Steigungen ganzrationaler Funktionen näherungsweise zeichnerisch
- Zuordnen von Bildern von Funktionsgraphen und Graphen der Änderungsfunktion
- Nutzen der mittleren und Deuten der lokalen Änderungsrate bei ganzrationalen Funktionen in Anwendungskontexten

Um erfolgreich in die zweijährige gymnasiale Oberstufe zu starten, müssen die Schülerinnen und Schüler grundlegende Verfahren zur Nullstellenbestimmung beherrschen. Erwartet wird auch, dass sie verschiedene Grundbegriffe kennen und sich begrifflich-anschauliche Grundvorstellungen der Änderungsrate aneignen, die später in der Differenzial- und Integralrechnung der Qualifikationsphase aufgegriffen werden. Inhaltsbezogene Kompetenzen zu vertiefen, die bereits zuvor in Themenfeldern zu anderen Funktionsklassen (lineare, quadratische, ...) erworben wurden, ist am Ende der Jahrgangsstufe 10 ebenfalls von Bedeutung.
Wie in jedem anderen Themengebiet ist auch auf diverse prozessbezogene Kompetenzen hinzuarbeiten, hier insbesondere[3]:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- führen komplexere Lösungs- und Kontrollverfahren aus,
- nutzen analoge und digitale mathematikspezifische Werkzeuge (z. B. zum räumlichen Vorstellungsvermögen, zur Darstellung von Daten), um mathematische Sachverhalte zu veranschaulichen.

Vor allem der Einsatz von Funktionsplottern erhöht die Anschaulichkeit und erlaubt es, zeitsparend zu arbeiten.

[1] vgl. RLP 1–10, Teil C, Mathematik, S.. 33
[2] vgl. RLP 1–10, Teil C, Mathematik, S.. 60/61
[3] vgl. RLP 1–10, Teil C, Mathematik, S.. 23/24

2 Schulinterne Planung der Unterrichtseinheit

Die folgenden Angaben sind als mögliche Planungsvariante zu verstehen. Diese ist unvollständig in Bezug auf die Wiederholung von Grundwissen aus verwandten vorhergehenden Themengebieten (lineare, quadratische und Potenzfunktionen) sowie in der Planung des Übungsbedarfes, da diese Komponenten der Planung schul- und lerngruppenspezifisch sind.

Für die zeitliche Umsetzung ist es notwendig, schon in den Schuljahren zuvor zeiteffizient und vorbereitend gearbeitet zu haben. Dazu gehört z. B.:

- Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck oder die Darstellung und Berechnung von Körpern schon in Jahrgangsstufe 9 thematisieren
- im Themenbereich „Quadratische Gleichungen und Funktionen“ Begriffe wie Hochpunkt/Tiefpunkt verwenden und einen Einblick in Lösungsverfahren wie z. B. „Faktorisieren“ und „Substitution biquadratischer Gleichungen geben“.

Der zeitliche Umfang für dieses Themenfeld beträgt ca. 24 Unterrichtsstunden. Es ist nicht möglich, innerhalb dieses Zeitrahmens alle hier angebotenen Materialien zu nutzen, so dass eine an die Unterrichtssituation angepasste Auswahl notwendig ist. Insbesondere Material 12 ist nur unter besonders günstigen Bedingungen nutzbar.

Gliederungsvorschlag

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Bemerkungen, Materialien, Methoden, Medien**
Einführung – Sachsituation mit quadratischer oder ganzrationaler Funktion modellieren, Funktionsverlauf zur Lösung eines Sachproblems nutzen	– siehe Material 1 und 2 – Einsatz eines Funktionsplotters möglich
Eigenschaften ganzrationaler Funktionen – begründete Aussagen zum allgemeinen Verlauf (Monotonie, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen) ganzrationaler Funktionen treffen – Nullstellen ganzrationaler Funktionen mit verschiedenen Algorithmen (grafische Ermittlung, Linearfaktorzerlegung, biquadratische Gleichungen, Sätze über Nullstellen, Probierlösung, Polynomdivision) bestimmen – markante Punkte (z. B. Hoch-, Tiefpunkte, Wendepunkte) aus Funktionsgraphen bestimmen und in Sachzusammenhängen deuten	– an Vorwissen (Lösen quadratischer Gleichungen) anknüpfen – ggf. Freiarbeit mit genügend Zeit für Übungen – siehe Material 3 und 4 – Einsatz eines Funktionsplotters, um selbstständig Ergebnisse zu kontrollieren
Zielstellung: Suche nach Extrempunkten durch Monotoniebetrachtung – Aussagen zum Verlauf ganzrationaler Funktionen treffen – markante Punkte bestimmen (Extrema)	– siehe Material 5 – Schülerinnen und Schüler erkennen anhand geeigneter Aufgaben selbst den Zusammenhang zwischen Lage eines Extremums und Anstieg des Graphen. – Aus dieser Erkenntnis ergibt sich das Motiv für weitere Betrachtungen des Anstieges einer Funktion.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Bemerkungen, Materialien, Methoden, Medien
Näherungsweise Ermittlung des Anstieges von Funktionen – Aussagen zum Verlauf eines Graphen in ausgewählten Punkten durch Betrachtung des Verlaufes der Tangente bzw. der Sekanten in diesen Punkten treffen – Anstiege näherungsweise gezeichneter Tangenten bestimmen – Sekantenanstiege berechnen – Sekantenanstiege zur Abschätzung des Tangentenanstieges in einem Punkt nutzen – Funktion der Sekantenanstiege (näherungsweise Änderungsfunktion) darstellen	– Mittlere und lokale Änderungsrate an zwei Beispielen veranschaulichen, siehe Material 6 – Tangenten händisch zeichnen, siehe Material 7 – siehe Material 8: Zusammenhang zwischen Tangenten- und Sekantenanstieg – Entwicklung der Sekantenanstiege bei kleiner Schrittweite mithilfe einer Tabellenkalkulation darstellen, siehe Material 9
Zusammenhänge zwischen dem Verlauf eines Funktionsgraphen und dem Verlauf der Ableitungsfunktion – vorgegebene Schaubilder von Funktionen und Ableitungsfunktionen einander zuordnen – Zusammenhänge zwischen Eigenschaften eines Funktionsgraphen und Verlauf der Ableitungsfunktion erläutern	– siehe Material 10: Graphenpuzzle
Deutung des Verlaufs von Ableitungsfunktionen in Sachzusammenhängen – markante Punkte aus Funktionsgraphen bestimmen und in Sachzusammenhängen deuten – den Verlauf von Ableitungsfunktionen in einem Sachzusammenhang deuten	– siehe Material 11: Modellierung von Gewinnfunktionen mithilfe ganzrationaler Funktionen 3. Grades
Ggf.: Bestimmung der 1. Ableitung mit $h \to 0$ – Abschätzen eines Anstieges durch Termumformung – h-Methode	– siehe Material 12: Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

Statt der Materialien aus der Papierfassung kann an vielen Stellen auch das GeoGebra-Buch https://www.geogebra.org/m/nd22jnas genutzt werden.

3 Kommentierte Unterrichtsmaterialien

Material 1a: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen

Diese Aufgabe konfrontiert die Schülerinnen und Schüler vermutlich erstmalig mit dem Problem der Extremwertberechnung. Gezieltes Probieren ist ein erster Schritt zur Lösung des Problems. Im Aufgabenteil b) wird verlangt, die Zielfunktion aufzustellen. Da es sich hierbei um eine quadratische Funktion handelt, können Schülerinnen und Schüler ihr Vorwissen aus Jahrgangsstufe 9 nutzen, um Aufgabenteil c) zu lösen. Die Aufgabe ist auch für den Einsatz eines graphikfähigen Rechners oder eines Funktionsplotters geeignet.

Die Auswertung der Aufgabe kann dazu motivieren, Extrempunkte einer Funktion an einem Sachkontext zu bestimmen.

Im Material 1a) ist die Aufgabe mit einigen Informationen und Fragen zur Hilfestellung formuliert. Varianten dieser Aufgabe sind im Material 1b) und 1c) dargestellt.

Aufgabe 1

Das Nashorn-Gehege

Vor einigen Jahren wurde dem Zoo ein junges Nashorn geschenkt, das mit viel Fürsorge im Elefantenhaus aufgezogen wurde.
Nun ist daraus ein stattlicher Nashornbulle geworden, der mehr Platz benötigt.
Ein Freigehege soll gebaut werden, das an das Elefantenhaus angrenzt.
64 m Spezialzaun stehen dafür zur Verfügung.

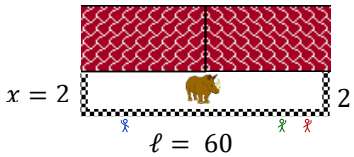


Abb.: Nashorngehege 1

Die Zooleitung überlegt, wie das Gehege anzulegen ist.
Rechteckig soll es sein.

Ein Mitarbeiter schlägt vor, das Gehege das 60 m lange Gebäude entlang zu ziehen. Doch wäre es dann nur 2 m breit. Das ist zu eng.

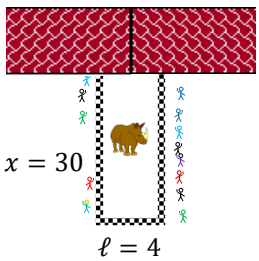


Abb.: Nashorngehege 2

Ein anderer schlägt vor, es 30 m breit anzulegen, damit von beiden Seiten möglichst viele Besucherinnen und Besucher hineinschauen können.

Die Tierpflegerinnen und Tierpfleger lehnen jedoch beide Vorschläge ab. In beiden Fällen wäre die Fläche für das Tier nur 120 m² groß und somit viel zu klein.

Die Breite und die sich daraus ergebende Länge sollten eine größere Fläche ermöglichen.

a) Geben Sie mehrere mögliche Breiten (x), Längen (ℓ) und die daraus resultierenden Flächen (A) an.

b) Erstellen Sie einen Term, mit dem sich die Fläche A in Abhängigkeit von der Breite x berechnen lässt. Beachten Sie die Bedingung, dass nur 64 m Zaun vorhanden sind.

c) Geben Sie an, für welche Breite (x) sich eine maximale Fläche ergibt.
Begründen Sie auf einem geeigneten Weg.

Material 1b: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen (offene Variante)

Aufgabe 1

Das Nashorn-Gehege

Vor einigen Jahren wurde dem Zoo ein junges Nashorn geschenkt, das mit viel Fürsorge im Elefantenhaus aufgezogen wurde.

Nun ist daraus ein stattlicher Nashornbulle geworden, der mehr Platz benötigt.
Ein Freigehege soll gebaut werden, 64 m Spezialzaun stehen dafür zur Verfügung.

Die Zooleitung überlegt, wie das Gehege anzulegen ist.
Rechteckig soll es sein und, um Zaun zu sparen, an das Elefantenhaus angrenzen.

Abb.: Nashorngehege

- Überlegen Sie sich verschiedene mögliche Breiten und Längen des Geheges und geben Sie zwei Beispiele an.
- Geben Sie an, für welche Länge bzw. Breite des Geheges die Fläche für das Nashorn am größten ist.
  Begründen Sie.

Material 1c: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen (mit digitalen Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Das Nashorn-Gehege

Vor einigen Jahren wurde dem Zoo ein junges Nashorn geschenkt, das mit viel Fürsorge im Elefantenhaus aufgezogen wurde.

Nun ist daraus ein stattlicher Nashornbulle geworden, der mehr Platz benötigt.
Ein Freigehege soll gebaut werden, 64 m Spezialzaun stehen dafür zur Verfügung.

Die Zooleitung überlegt, wie das Gehege anzulegen ist.
Rechteckig soll es sein und, um Zaun zu sparen, an das Elefantenhaus angrenzen.

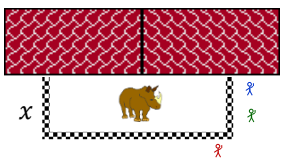


Abb.: Nashorngehege

- Überlegen Sie sich verschiedene mögliche Breiten und Längen des Geheges. und geben Sie zwei Beispiele an.
- Erstellen Sie einen Term, mit dem die Fläche A in Abhängigkeit von der Breite x berechnet werden kann.
- Stellen Sie $A = f(x)$ mit einem Funktionsplotter dar.
  Lesen Sie aus dem Graphen ab, für welche Breite des Geheges die Fläche A am größten ist.

Lösung und Kommentare zu Material 1

Die Zaunlänge von 64 m verteilt sich auf zweimal Breite x und einmal Länge ℓ. → $64 = 2x + \ell$
In der Flächeninhaltsgleichung $A = \ell \cdot x$ lässt sich die Variable ℓ ersetzen. → $A = (64 - 2x) \cdot x$
Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung: $A = f(x) = -2x^2 + 64x$
Mit Vorwissen aus Jahrgangsstufe 9 lässt sich daraus der Scheitelpunkt der Parabel ablesen, der ein Hochpunkt ist, da die Parabel nach unten geöffnet ist: $S(16|512)$.
Daraus ergibt sich: Die maximale Fläche ist 16 m breit, 32 m lang und der Flächeninhalt beträgt 512 m².
In der Variante 1c kann der Punkt aus dem Graphen abgelesen werden.

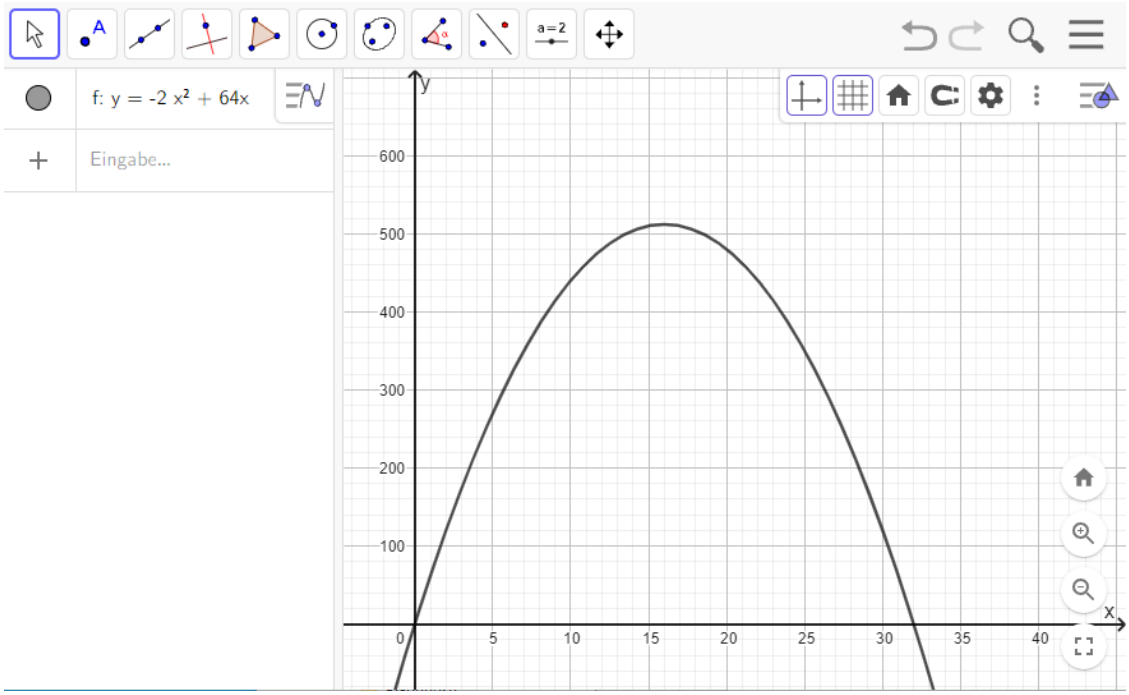
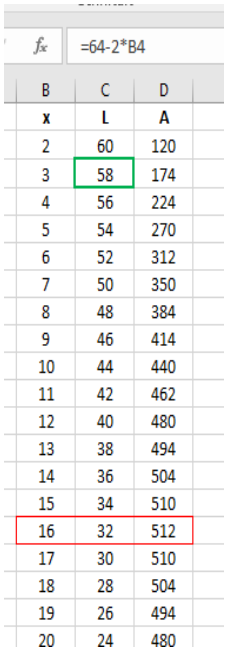


Abbildung: Funktionsgraph, erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

In der Variante 1b) ist es auch möglich, durch geschicktes Variieren, ggf. unter Zuhilfenahme einer Tabelle, die größte Fläche und ihre Maße zu finden. Eine Tabellenkalkulation einzusetzen ist möglich.



=64-2*B4

B	C	D
x	L	A
2	60	120
3	58	174
4	56	224
5	54	270
6	52	312
7	50	350
8	48	384
9	46	414
10	44	440
11	42	462
12	40	480
13	38	494
14	36	504
15	34	510
16	32	512
17	30	510
18	28	504
19	26	494
20	24	480

Abbildung: Ausschnitt aus der Excel-Tabelle

Material 2: Sachproblem zur Einführung ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 2 ist eine weitere Möglichkeit, sich der Thematik mit einem anschaulichen Problem zu nähern. Man kann Aufgabe 2 an Stelle einer der Aufgaben aus Material 1 wählen oder sie zusätzlich bearbeiten lassen. Entscheidendes Kriterium ist dabei die verfügbare Zeit.

Aufgabe 2

Der oben offene Kasten

Aus einem quadratischen Stück Pappe der Größe 5 dm x 5 dm soll ein oben offener Kasten hergestellt werden. Die Ecken mit der variablen Seitenlänge x sind hierzu entsprechend der Abbildung abzuschneiden und die Seiten an den gepunkteten Linien hochzubiegen.

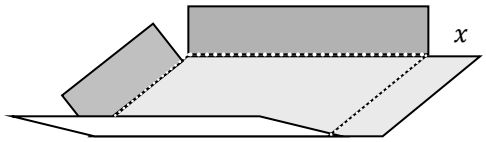


Abbildung.: Kasten

a) Geben Sie verschiedene mögliche Abmessungen (Länge, Breite, Höhe) eines solchen Kastens an und berechnen Sie jeweils das zugehörige Volumen.

b) Stellen Sie einen Term auf, mit dem man das Volumen des Kastens in Abhängigkeit von der Höhe x berechnen kann.

c) Stellen Sie den Verlauf des Graphen der Funktion $V = f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 3$ graphisch dar.

d) Bestimmen Sie die Höhe x, für die das Volumen des Kastens am größten ist.

e) Untersuchen Sie den Verlauf von derartigen Funktionsgraphen $V = f(x)$, die aus anderen Abmessungen der Ausgangspappe resultieren.

Lösungen und Kommentare:

Quadervolumen: $V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$

Quaderhöhe: $h = x$

Seiten der Grundfläche: $a = b = 5 - 2x$

$\Rightarrow$ Kastenvolumen: $V = f((x) = (5-2x) \cdot (5-2x) \cdot x$

$= 4x^3 - 20x^2 + 25x$

exakte Lösung: $x = \frac{5}{6} \rightarrow h = 0{,}8\overline{3}\ dm$

$h \approx 8{,}3\ cm$

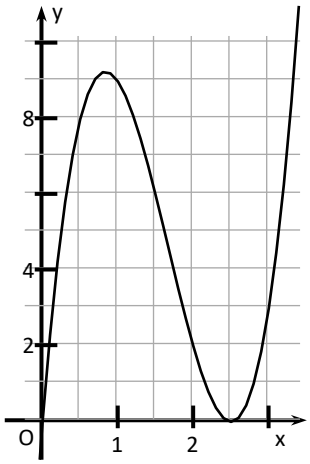


Abbildung.: Funktionsgraph

Für Teilaufgabe a) wird empfohlen, die Lernenden die Unterschiedlichkeit der Volumina erleben zu lassen. Erreicht werden kann das, wenn mehrere entsprechende Quadrate (aus A3-Bögen ausschneiden) ausgegeben werden. Die Ecken werden von den Schülerinnen und Schülern ausgeschnitten, die entsprechenden Volumina berechnet und jeweils auf den Schachteln notiert.

Die Parameter der Aufgabe sind bewusst so gewählt, dass die Lösung in Teilaufgabe d) nicht ganzzahlig ist. Die Probierphase dient dazu, sich in das Problem hineinzudenken, wird aber kein exaktes Endergebnis liefern. Schülerinnen und Schüler sehen sich dadurch motiviert, eine Strategie zu entwickeln, mit der sich Extrempunkte ermitteln lassen. Es kann mit dieser Aufgabe erläutert werden, dass die Analyse eines Funktionsverlaufes notwendig ist, um bestimmte Sachprobleme lösen zu können. Weil der Graph der Funktion $V(x)$ auch Wertepaare für $x > 2{,}5$ darstellt, lässt sich zeigen, dass eine Funktionsgleichung einen Sachverhalt nur in bestimmten Grenzen wiedergibt, Modelle nur begrenzt gültig sind.

Die Aufgaben c), d) und insbesondere e) sind für den Einsatz eines Computeralgebrasystem/modulares Mathematiksystem (*CAS/MMS)* oder Funktionsplotters geeignet. Einige Systeme (*TI-Nspire*, GeoGebra) bieten die Möglichkeit, die Koordinaten von Extrempunkten anzuzeigen. Auch eine Tabellenkalkulation ist nutzbar (siehe nachfolgend: Lösung 2).

Eine ausführliche Auswertung dieser Aufgabe ist eine gute Grundlage, um für nachfolgenden Problemstellungen, z. B. Hoch-/Tiefpunkte zu motivieren.

Lösung_2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**x**	**a**	**b**	**V**					
2	0,1	4,8	4,8	2,304					
3	0,2	4,6	4,6	4,232					
4	0,3	4,4	4,4	5,808					
5	0,4	4,2	4,2	7,056			Verfeinerung		
6	0,5	4	4	8,000					
7	0,6	3,8	3,8	8,664		**x**	**a**	**b**	**V**
8	0,7	3,6	3,6	9,072		0,7	3,6	3,6	9,072
9	0,8	3,4	3,4	9,248		0,71	3,58	3,58	9,100
10	0,9	3,2	3,2	9,216		0,72	3,56	3,56	9,125
11	1	3	3	9,000		0,73	3,54	3,54	9,148
12	1,1	2,8	2,8	8,624		0,74	3,52	3,52	9,169
13	1,2	2,6	2,6	8,112		0,75	3,5	3,5	9,188
14	1,3	2,4	2,4	7,488		0,76	3,48	3,48	9,204
15	1,4	2,2	2,2	6,776		0,77	3,46	3,46	9,218
16	1,5	2	2	6,000		0,78	3,44	3,44	9,230
17	1,6	1,8	1,8	5,184		0,79	3,42	3,42	9,240
18	1,7	1,6	1,6	4,352		0,8	3,4	3,4	9,248
19	1,8	1,4	1,4	3,528		0,81	3,38	3,38	9,254
20	1,9	1,2	1,2	2,736		0,82	3,36	3,36	9,257
21	2	1	1	2,000		0,83	3,34	3,34	9,259
22	2,1	0,8	0,8	1,344		0,84	3,32	3,32	9,259
23	2,2	0,6	0,6	0,792		0,85	3,3	3,3	9,257
24	2,3	0,4	0,4	0,368		0,86	3,28	3,28	9,252
25	2,4	0,2	0,2	0,096		0,87	3,26	3,26	9,246
26	2,5	0	0	0,000		0,88	3,24	3,24	9,238
27	2,6	-0,2	-0,2	0,104		0,89	3,22	3,22	9,228
28	2,7	-0,4	-0,4	0,432		0,9	3,2	3,2	9,216
29	2,8	-0,6	-0,6	1,008		0,91	3,18	3,18	9,202
30									

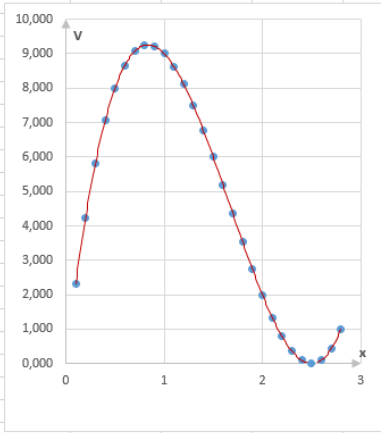


Abbildung: Excel-Tabelle mit Graph

Material 3: Nullstellenverfahren

Ziel der Unterrichtseinheit ist es, auf das Thema Analysis in Jahrgangsstufe 11 vorzubereiten. Gleichungen zu lösen ist eine Voraussetzung, um Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen berechnen zu können. Für den Start in der gymnasialen Oberstufe ist es eine gute Basis, wenn Routineverfahren beherrscht werden. Das Ende der Jahrgangsstufe 10 als Zeitraum für dieses Thema zu nutzen, führt zu einer zeitlichen Entlastung in der Qualifikationsphase.

Eine Vorbereitung auf dieses Thema beginnt in Jahrgangsstufe 9. Zu den Planungshilfen für Jahrgangsstufe 9 ist bereits das Unterrichtsmaterial „Einsatz von GeoGebra zur Untersuchung der Linearfaktordarstellung für quadratische Funktionen“[4] vorhanden.
Die nachfolgenden Materialien können der Lehrkraft zur eigenen Vorbereitung dienen. Nach ihrem Vortrag können die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben als Übungsaufgaben nutzen. Es ist auch möglich, das Material für andere Unterrichtsmethoden oder Sozialformen einzusetzen, z. B. für Freiarbeit, Stationsarbeit, innerhalb einer Lerntheke, etc. Die ersten Abschnitte zu den Nullstellenverfahren im Material sind deshalb auch wortgleich.

Das Material 3 kann, bei entsprechenden Methoden und Sozialformen in einer Lerngruppe, auch mit Material 4 kombiniert eingesetzt werden. Die Materialien sind so formatiert, dass sie einfach kopiert werden können. Die Lösungen zu allen Aufgaben finden sich am Ende von Material 3.

[4] (https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Planungshilfen_kompetenzorientierter_Unterricht/Sekundarstufe_I/UM-Quadr_F_09_Linearfaktordarstellung_2024-06-03_rot.pdf

Nullstellenverfahren

1 Ausklammern

Als Nullstelle x_0 wird das Argument einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet, für das der Funktionswert Null ist. Im Punkt $P_x(x_0|0)$ schneidet der Graph der Funktion die x-Achse.

$$\boxed{x_0 \text{ ist Nullstelle } \leftrightarrow\ y = f(x_0) = 0\,;\ \ P_x(x_0|0)}$$

Um die Nullstelle zu ermitteln, wird die Funktionsgleichung „$= 0$“ gesetzt und nach einer Lösung für die entstehende Gleichung gesucht.

Für einige Gleichungen gibt es Standardalgorithmen:

- Lineare Gleichungen wie z. B. $0 = 3x - 12$ werden durch äquivalentes Umformen gelöst.
- Quadratische Gleichungen lassen sich durch quadratische Ergänzung und anschließendes Umformen mit Fallunterscheidung oder durch die übliche Lösungsformel lösen.
- Für Gleichungen dritten Grades existiert zwar auch eine Lösungsformel, die aber umständlich ist.

Gleichungen höheren Grades lassen sich nachweislich nicht mehr durch eine allgemeine Formel lösen. Gegebenenfalls hilft nur gezieltes Probieren. In einigen Fällen lässt sich dies jedoch noch umgehen. Eine Möglichkeit ist das Faktorisieren (Ausklammern).

Die Idee ist einfach: *Ein Produkt ist nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.*

$$(a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0)$$

Fazit: Lässt sich ein Funktionsterm in ein Produkt verwandeln (Faktorisieren), so können, um die Nullstellen aufzufinden, die Faktoren einzeln betrachtet werden.

Bsp.: $0 = x^4 + 3x^3 \ \rightarrow\ 0 = x^3 \cdot (x+3)$

1. Fall: $x^3 = 0$ $\qquad x_1 = 0$

2. Fall: $(x+3) = 0$ $\qquad x_2 = -3$

Die Funktion $y = x^4 + 3x^3$ hat Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$.
Der Graph der Funktion schneidet die x-Achse in den Punkten $P_1(0|0)$ und $P_2(-3|0)$.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $y = x^3 - 5x^2 - 50x$ b) $y = x^4 + 6x^3 + 5x^2$ c) $y = 4x^4 + 4x^3 + 35x^2$

d) $y = 2x^3 - 8x^2 + 10x$ e) $y = 2x^3 + 8x^2 - 10x$ f) $y = (x+1) \cdot (x-5) \cdot (x+4{,}8) \cdot (2x-14)$

weiterführend:
Auch für Brüche (Quotienten) lässt sich eine einfache Regel finden:
Ein Bruch ist genau dann „$= 0$“, wenn der Zähler (Dividend) „$= 0$“.
[Dabei darf der Nenner (Divisor) nicht gleichzeitig auch den Wert Null annehmen, da die Division durch Null nicht definiert ist.]

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

g) $y = \dfrac{x-5}{x+2}$ h) $y = \dfrac{3x^2 - 12x - 15}{x+1}$ i) $y = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x+4}$ k) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$

2 Substituieren biquadratischer Gleichungen

Als Nullstelle x_0 wird das Argument einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet, für das der Funktionswert Null ist. Im Punkt $P_x(x_0|0)$ schneidet der Graph der Funktion die x-Achse.

$$\boxed{x_0 \text{ ist Nullstelle } \leftrightarrow\ y = f(x_0) = 0\,;\ \ Px(x_0|0)}$$

Um die Nullstelle zu ermitteln, wird die Funktionsgleichung „$= 0$" gesetzt und nach einer Lösung für die entstehende Gleichung gesucht.

Für einige Gleichungen gibt es Standard-Algorithmen:

- Lineare Gleichungen wie z. B. $0 = 3x - 12$ werden durch äquivalentes Umformen gelöst.
- Quadratische Gleichungen lassen sich durch quadratische Ergänzung und anschließendes Umformen mit Fallunterscheidung oder durch die übliche Lösungsformel lösen.
- Für Gleichungen dritten Grades existiert zwar auch eine Lösungsformel, die aber umständlich ist.

Gleichungen höheren Grades lassen sich nachweislich nicht mehr durch eine allgemeine Formel lösen. Gegebenenfalls hilft nur gezieltes Probieren. In einigen Fällen lässt sich dies jedoch noch umgehen.

Ein solcher „Glücksfall" ist es, wenn die Funktionsgleichung folgende Struktur hat:

$y = a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$
($n \in \mathbb{Q}$ möglich, aber Definitionsbereich beachten).

In diesem Fall ersetzt (substituiert) man: $x^n = z$ und dementsprechend $x^{2n} = z^2$.
Zur Nullstellenberechnung ist nun folgende Gleichung zu lösen: $0 = az^2 + bz + c$.
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert bis zu zwei Lösungen für z.
Aus z wird durch Rücksubstitution der x-Wert bestimmt:

$x^n = z$
$|x| = \sqrt[n]{z}$ $(n \in \mathbb{N})$,
für gerade n ergeben sich 2 Lösungen.

Beispiel a) $0 = 2x^4 - 6x^2 - 3{,}5$ $\quad z = x^2$

$0 = 2z^2 - 6z - 3{,}5 \quad |:2$
$0 = z^2 - 3z - 1{,}75$
$z_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 1{,}75}$
$z_1 = 3{,}5 \qquad z_2 = -0{,}5$

Rücksubstitution: $x^2 = z$ $\quad x_1 \approx 1{,}8708\,;\ x_2 \approx -1{,}8708\,;$ $\quad x_{3,4}$ nicht definiert ($\sqrt{-0{,}5}$ nicht reell)

Beispiel b) $0 = x^6 - 19x^3 - 216$ $\quad z = x^3$

$0 = z^2 - 19z - 216$
$z_1 = -8 \qquad z_2 = 27$

Die Rechnung $\sqrt[3]{-8}$ ist zwar laut Definition nicht durchführbar, aber $x^3 = -8$ hat trotzdem die Lösung $x_1 = -2$. Eine zweite Lösung folgt nicht aus $z_1 = -8$.
Aus $z_2 = 27$ ergibt sich $x_2 = 3$.
[Die Lösungen sind mit einer Probe verifizierbar.]

Aufgaben: Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:

a) $y = x^4 - 45x^2 + 324$ b) $y = 3x^4 - 15x^2 + 12$ c) $y = x^4 + 3x^2 - 4$

d) $y = x^8 - 17x^4 + 16$ e) $y = 2x^6 - 126x^3 - 128$ f) $y = x - 2 \cdot \sqrt{x} - 3$

weiterführend:

g) $y = x^{1,4} - x^{0,7} - 6$ h) $y = x^{-4} - 13x^{-2} + 36$ i*) $y = 6 \cdot 3^{2x} - 56 \cdot 3^x + 18$

3 Reduzieren durch Polynomdivision

Als Nullstelle x_0 wird das Argument einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet, für das der Funktionswert Null ist. Im Punkt $P_x(x_0|0)$ schneidet der Graph der Funktion die x-Achse.

$$\boxed{x_0 \text{ ist Nullstelle } \leftrightarrow\ y = f(x_0) = 0\,;\ \ Px(x_0|0)}$$

Um die Nullstelle zu ermitteln, wird die Funktionsgleichung „$= 0$“ gesetzt und nach einer Lösung für die entstehende Gleichung gesucht.

Für einige Gleichungen gibt es Standardalgorithmen:

- Lineare Gleichungen wie z. B. $0 = 3x - 12$ werden durch äquivalentes Umformen gelöst.
- Quadratische Gleichungen lassen sich durch quadratische Ergänzung und anschließendes Umformen mit Fallunterscheidung oder durch die übliche Lösungsformel lösen,
- Für Gleichungen 3. Grades existiert zwar auch eine Lösungsformel, die aber sehr umständlich ist.

Gleichungen höheren Grades lassen sich nachweislich nicht mehr durch eine allgemeine Formel lösen. Gegebenenfalls hilft nur gezieltes Probieren. In einigen Fällen lässt sich das Probieren jedoch noch umgehen.

Eine Möglichkeit ist, den Grad der Gleichung durch Division zu reduzieren ($x^5 : x^3 = x^2$).
Die Idee ist folgende:
Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion lässt sich mitunter in verschiedenen Formen darstellen. Zum Beispiel:

(i) $y = \underbrace{(x+1)\cdot(x-4)}\cdot(x-7)$

(ii) $y = \underbrace{(x^2-3x-4)\cdot(x-7)}$

(iii) $y = x^3-10x^2+17x+28$

- Darstellung (i) wurde durch Ausmultiplizieren der Klammern in die Darstellung (iii) umgeformt.
- Darstellung (i) heißt Linearfaktorzerlegung der Funktion.
- In Darstellung (i) lassen sich alle Nullstellen einfach ablesen. ($x_1 = -1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 7$).
- In Darstellung (ii) lassen sich 2 Nullstellen berechnen, indem man die Gleichung $0 = x^2-3x-4$ löst. Die dritte Nullstelle ist ($x_3 = 7$) ist immer noch ablesbar.
- Darstellung (iii) enthält einen Term, der zu einer Gleichung führt, die mit keinem der bekannten schulüblichen Verfahren gelöst werden kann.

2. Beispiel:

(i) $y = (x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$

(ii) $y = (x^2+x-6)\cdot(x-4)$

(iii) $y =$

Aufgabe 1

a) Lesen Sie in Darstellung (i) die Nullstellen der Funktion ab.

b) Bestimmen Sie in Darstellung (ii) die Nullstellen, z. B. mithilfe einer Lösungsformel.

c) Erzeugen Sie durch Ausmultiplizieren die Darstellung (iii).

Wenn es möglich ist, aus Darstellung (ii) die Darstellung (iii) zu erzeugen, dann muss es auch einen umgekehrten Weg geben.

Ein einfaches Beispiel aus der Grundschule: $11 \cdot 8 = 88$

$\rightarrow\ 88 : 8 = 11$

Wird diese Idee auf Terme (Polynome) übertragen, so ergibt sich:

$$(x^2-3x-4)\cdot(x-7) = x^3-10x^2+17x+28$$

$$\rightarrow\ (x^3-10x^2+17x+28) : (x-7) = x^2-3x-4$$

Durch Division wurde der Grad des Polynoms von 3 auf 2 reduziert.

Daraus ergeben sich zwei Fragen:

(1) Wie soll man auf die Idee kommen, den Term $x^3 - 10x^2 + 17x + 28$ durch $(x - 7)$ zu teilen?

(2) Wie lassen sich Terme (Polynome) dividieren?

Antwort auf (1): Der Divisor ist ein Linearfaktor. Dieser lässt sich bilden, wenn eine Nullstelle bekannt ist. Entweder ist die Nullstelle vorgegeben oder sie findet sich durch Probieren.

z. B.: Eine Nullstelle der Funktion y = $x^3 - 10x^2 + 17x + 28$ sei bekannt, es ist $x_1 = 7$.
Dann ist $(x - 7)$ ein Linearfaktor des Funktionsterms.
Mit dem Polynom lässt sich folgende Division ausführen:
$(x^3 - 10x^2 + 17x + 28) : (x - 7)$

Aufgabe 2

Bilden Sie zu den vier gegebenen Nullstellen den jeweils zugehörigen Linearfaktor.

Nullstelle:	a) $x_1 = 4$	b) $x_1 = 0{,}5$	c) $x_1 = -4$	d) $x_1 = -7$
Linearfaktor:	_____	_____	_____	_____

Die Antwort auf Frage (2) ist das Verfahren der Polynomdivision. Es funktioniert ähnlich wie das Verfahren der schriftlichen Division mit natürlichen Zahlen, das hier an einem kommentierten Beispiel erläutert wird:

9 9 4 : 7 = ...	Zu überlegen ist, wie oft die „7“ in die erste Stelle (9) des Dividenden passt, Lösung: einmal.
9 9 4 : 7 = 1 ... 7 ↓ 2 9	- Rückwärtsrechnen (multiplizieren) - Rest bilden - nächste Ziffer hinzunehmen, erneut überlegen
9 9 4 : 7 = 1 4 ... 7 ↓ 2 9 2 8 1 4	 - Rückwärtsrechnen und wieder Rest bilden - nächste Ziffer hinzunehmen, ...

Mit dem nachfolgenden Beispiel wird die Polynomdivision an einem kommentierten Beispiel erläutert. Alternativ kann auch ein Lernvideo dazu benutzt werden.
(z. B. https://www.youtube.com/watch?v=j_f9itXqZHs)

Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$,
also die Lösung der Gleichung $0 = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$.
Bekannt sei die Nullstelle $x_1 = -2$. Daraus ergibt sich als Divisor der Linearfaktor $(x + 2)$.

$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 2) =$	Zu überlegen ist, wie oft „x“ in den ersten Summanden (x^3) des Polynoms passt, Lösung: x^2.
$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 2) = x^2$ $\underline{-(x^3+2x^2)}$ $0 + 4x^2 + 3x$	- Rückwärtsrechnen (multiplizieren) - Rest bilden (durch Subtraktion) - nächsten Term hinzunehmen, erneut überlegen
$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 2) = x^2 + 4x$ $\underline{-(x^3+2x^2)}$ $4x^2 + 3x$	Für diese Überlegung werden nur die ersten Summanden der beteiligten Terme betrachtet. Um „$4x^2$“ zu erhalten, muss „x“ (im Linearfaktor) mit dem Faktor „$4x$“ multipliziert werden. Also ist „$4x$“ der nächste Summand. Daraus ergibt sich die nächste Zeile durch entsprechende Multiplikation $(4x \cdot (x + 2) = 4x^2 + 8x$

$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 2) = x^2 + 4x$ - wieder: Rest bilden

$\underline{-(x^3 + 2x^2)}$ - nächsten Term hinzunehmen, erneut überlegen

$4x^2 + 3x$

$\underline{-(4x^2 + 8x)}$

$-5x - 10$

$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 2) = x^2 + 4x - 5$ - Ergebnis der Überlegung ist „-5“.

$\underline{(x^3 + 2x^2)}$ - Aus $-5 \cdot (x + 2)$ ergibt sich die vorletzte Zeile.

$4x^2 + 3x$

$\underline{(4x^2 + 8x)}$

$-5x - 10$ - Die letzte Differenz (der letzte Rest) muss „0“ sein.

$\underline{-(-5x - 10)}$

0

Ergebnis: $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = (x^2 + 4x - 5) \cdot (x + 2)$.

Statt $0 = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ kann nun die Gleichung $0 = (x^2 + 4x - 5) \cdot (x + 2)$ gelöst werden.

→ $(x + 2) = 0$, die Lösung $x_1 = -2$ kennen wir schon.

→ $(x^2 + 4x - 5) = 0$ ist eine quadratische Gleichung, die sich lösen lässt, z. B. mit der Lösungsformel. Es ergibt sich $x_2 = 1$ und $x_3 = -5$.

Die Funktion $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ hat die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -5$.

Sie lässt sich auch als Linearfaktorzerlegung $y = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 5)$ darstellen.

Aufgabe 3

Führen Sie die Polynomdivisionen aus.

a) $(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2)$ b) $(x^3 - 11x^2 + 44x - 160) : (x - 8)$

c) $(x^3 + 7x^2 - 50) : (x + 5)$

Aufgabe 4

- Bilden Sie aus den gegebenen Nullstellen Linearfaktoren.
- Führen Sie die Polynomdivision aus.
- Berechnen Sie aus dem entstehenden quadratischen Term weitere Nullstellen.
- Geben Sie die Funktionsgleichungen als Linearfaktorzerlegung an.

a) $f(x) = x^3 - 11x^2 + 20x + 32$
$x_1 = 4$

b) $y = x^3 - 5{,}5x^2 - 26x + 48$;
$x_1 = -4$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
$x_1 = 2$

d) $y = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$
$x_1 = -1$

e) $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
$x_1 = 3$

Weiterführend:

„Was aber ist, wenn man gar keine Nullstelle kennt?"

Dann lässt sich das Verfahren nicht ausführen oder man sucht nach einer Nullstelle.
Theoretisch gibt es unendlich viele Möglichkeiten - das ist ein Problem.
Unter gewissen Umständen lässt sich die Anzahl der infrage kommenden Argumente jedoch einschränken.
Betrachten wir das Polynom vom Anfang des Kapitels:

$$(x+1)\cdot(x-4)\cdot(x-7) = (x^2-3x-4)\cdot(x-7) = x^3 - 10x^2 + 17x + 28$$

Die letzte Zahl des Polynoms steht ohne Variable für sich allein. Genannt wird sie Absolutglied des Polynoms. Sie ist im Beispiel ein Produkt der Zahlen $+1$, -4 und -7.
$\{-1; 4; 7\}$ sind die Nullstellen der Funktion.
Die Nullstellen sind somit immer (positive oder negative) Teiler des Absolutgliedes.
Das gilt aber nur, wenn alle Lösungen (Nullstellen) ganzzahlig sind.

Beispiel 1: Alle Nullstellen sind ganzzahlig und das Absolutglied ist 7.
→ Es kommen die Zahlen $\{-7, 7, -1, 1\}$ infrage.

Beispiel 2: Alle Nullstellen sind ganzzahlig und das Absolutglied ist 15.
→ Es kommen die Zahlen $\{-15, 15, -5, 5, -3, 3, -1, 1\}$ infrage.

Indem probiert wird (Einsetzen in den Term und prüfen, ob der Termwert 0 ist), lässt sich herausfinden, welche der infrage kommenden Zahlen eine Nullstelle ist, der Linearfaktor wird gebildet und die Polynomdivision vorgenommen.

Aufgabe 5

- Finden Sie durch Probieren eine der ganzzahligen Lösungen.
- Führen Sie dann eine entsprechende Polynomdivision durch.
- Bestimmen Sie alle Lösungen.

a) $0 = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

b) $0 = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

„Welche Auswirkung hat es, wenn eine Nullstelle mehrfach als Lösung auftritt?"

Aufgabe 6

Stellen Sie den Graphen der Funktion $y = f(x) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$
mit einem Funktionsplotter (z. B. GeoGebra) dar.

- Prüfen Sie, ob die erwarteten drei Nullstellen am Graphen der Funktion erkennbar sind.
  - Notieren Sie den Funktionsterm und die Nullstellen.
- Verändern Sie den Funktionsterm, indem Sie jeweils eines der Binome so ersetzen, dass eines der anderen dann doppelt im Produkt vorkommt, z. B. $f(x) = (x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.
  - Beobachten Sie die Veränderungen des Graphen.
  - Untersuchen Sie mehrere Varianten.
  - Notieren Sie, was Ihnen auffällt.
- Verändern Sie den Funktionsterm so, dass nur noch ein Binom vorkommt, dieses aber dreimal, z. B. $f(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$.
  - Beobachten Sie die Veränderungen des Graphen.
  - Untersuchen Sie mehrere Varianten.
  - Notieren Sie, was Ihnen auffällt.

Untersuchen Sie Funktionsterme, die ein Produkt aus vier gleichen Binomen sind.

Lösungen zu Material 3 (Nullstellenverfahren)

zu 1) Ausklammern

a) $0 = x \cdot (x^2 - 5x - 50);\ \ x_1 = 0,\ x_2 = -5,\ x_3 = 10$

b) $0 = x^2 \cdot (x^2 + 6x + 5);\ \ x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -5$

c) $0 = 4x^2 \cdot (x^2 + x + 8{,}75);\ \ x_1 = 0$

d) $0 = 2x \cdot (x^2 - 4x + 5);\ \ x_1 = 0$

e) $0 = 2x \cdot (x^2 + 4x - 5);\ \ x_1 = 0,\ x_2 = -5,\ x_3 = 1$

f) $0 = (x + 1) \cdot (x - 5) \cdot (x + 4{,}8) \cdot (x - 14);\ \ x_1 = -1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -4{,}8,\ x_4 = 7$

weiterführend:

g) $0 = x - 5;\ x_1 = 5$

h) $0 = 3x^2 - 12x - 15 \ \ \rightarrow 0 = x^2 - 4x - 5;\ \ x_1 = 5, (x = -1$ ist keine Lösung [Nenner $= 0$].)

i) $0 = x^2 + 6x + 8;\ \ x_1 = -2,\ \ (x = -4$ ist keine Lösung [Nenner $= 0$].)

k) $0 = x^3 + x^2 = x^2 \cdot (x + 1);\ x_1 = 0, (x = -1$ ist keine Lösung [Nenner $= 0$].)

zu 2) Substituieren biquadratischer Gleichungen

a) $0 = z^2 - 45z + 324;\ \ z_1 = 9,\ z_2 = 36 \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ \ x_3 = 6,\ x_4 = -6$

b) $0 = z^2 - 5z + 4;\ \ z_1 = 1,\ z_2 = 4 \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

c) $0 = z^2 + 3z - 4;\ \ z_1 = 1,\ z_2 = -4 \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ \ x_{3,4} = n.d.$

d) $0 = z^2 - 17z + 16;\ \ z_1 = 1,\ z_2 = 16 \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ \ x_3 = -2,\ x_4 = 2$

e) $0 = z^2 - 63z - 64;\ \ z_1 = -1,\ z_2 = 64 \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 4$

f) $z = \sqrt{x} \qquad 0 = z^2 - 2z - 3;\ \ z_1 = 3,\ z_2 = -1 \qquad x_1 = 9$ ($\sqrt{x} = -1$ liefert keine Lösung.)

weiterführend:

g) $z = x^{0,7} = x^{\frac{7}{10}} \qquad 0 = z^2 - z - 6;\ \ z_1 = 3,\ z_2 = -2$

$x = z^{\frac{10}{7}} \qquad x_1 \approx 4{,}804$; keine weitere Lösung

[$(-2)^{\frac{10}{7}} = 2{,}69180$ aber: $2{,}69180^{\frac{7}{10}} = 2$ und $(-2{,}69180)^{\frac{7}{10}} = \sqrt{-4}$ ist nicht definiert in $\mathbb{R}$]

h) $z = x^{-2} \qquad 0 = z^2 - 13z + 36;\ \ z_1 = 4,\ z_2 = 9 \qquad x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ \ x_3 = -\frac{1}{3},\ x_4 = \frac{1}{3}$

i) $z = 3^x \qquad 0 = 6z^2 - 56z + 18 \qquad 0 = z^2 - \frac{28}{3}z + 3;\ \ z_1 = 9,\ z_2 = \frac{1}{3} \qquad x_1 = 2,\ x_2 = -1$

zu 3) Polynomdivision

zu Aufgabe 1

a) $x_1 = 2;\ x_2 = -3;\ x_3 = 4$

b) $0 = (x^2 + x - 6) \rightarrow x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} \rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -3$

aus $0 = (x - 4)$ folgt: $x_3 = 4$

[Darstellung (ii) hat natürlich die gleichen Nullstellen wie Darstellung (i).]

c) (iii) $y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

zu Aufgabe 2

Nullstelle:	a) $x_1 = 4$	b) $x_1 = 0{,}5$	c) $x_1 = -4$	d) $x_1 = -7$
Linearfaktor:	$(x - 4)$	$(x - 0{,}5)$	$(x + 4)$	$(x + 7)$

zu Aufgabe 3

a) $(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2) = x^2 - x - 12$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -x^2 - 10x \\
\quad \underline{-(-x^2 + 2x)} \\
\qquad -12x + 24 \\
\qquad \underline{-(-12x + 24)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) $(x^3 - 11x^2 + 44x - 160) : (x - 8) = x^2 - 3x + 20$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{(x^3 - 8x^2)} \\
\quad -3x^2 + 44x \\
\quad \underline{-(-3x^3 + 24x)} \\
\qquad 20x - 160 \\
\qquad \underline{-(20x - 160)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

c) $(x^3 + 7x^2 - 50) : (x + 5) =$

$(x^3 + 7x^2 + 0x - 50) : (x + 5) = x^2 + 2x - 10$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{(x^3 + 5x^2)} \\
\quad 2x^2 + 0x \\
\quad \underline{-\ (2x^2 + 10x)} \\
\qquad -10x - 50 \\
\qquad \underline{-10x - 50} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Hinweis: Man kann auch auf „Rest = 0“ schließen, wenn die letzten zwei Restterme identisch sind.

zu Aufgabe 4

a) $(x^3 - 11x^2 + 20x + 32) : (x - 4) = x^2 - 7x - 8$

$$0 = x^2 - 7x - 8 \;\rightarrow\; x_{2,3} = 3{,}5 \pm \sqrt{20{,}25} \;\rightarrow\; x_2 = -1;\; x_3 = 8$$

$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 8) \cdot (x - 4)$

b) $(x^3 - 5{,}5x^2 - 26x + 48) : (x + 4) = x^2 - 9{,}5 \cdot x + 12$

$$0 = x^2 - 9{,}5 \cdot x + 12 \rightarrow x_{2,3} = 4{,}75 \pm \sqrt{10{,}5625} \rightarrow x_2 = 1{,}5;\; x_3 = 8$$

$f(x) = (x - 1{,}5) \cdot (x - 8) \cdot (x + 4)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2) = x^2 - x - 2$

$$0 = x^2 - x - 2 \;\rightarrow\; x_{2,3} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} \;\rightarrow\; x_2 = -1;\; x_3 = 2$$

$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$

Die Nullstelle $x = 2$ ist doppelt vorhanden.

d) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 12) : (x + 1) = 2x^2 + 2x - 12 = 2 \cdot (x^2 + x - 6)$

$$0 = x^2 + x - 6 \;\rightarrow\; x_{2,3} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} \;\rightarrow\; x_2 = -3;\; x_3 = 2$$

$f(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

e) $(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x - 3) = x^2 - 6x + 9$

$$0 = x^2 - 6x + 9 \;\rightarrow\; x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{0} \;\rightarrow\; x_{2,3} = 3$$

$x = 3$ ist dreifache Nullstelle.

weiterführende Aufgaben:

zu Aufgabe 5

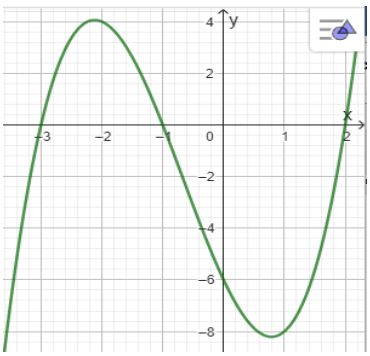
a) $\mathcal{L} = \{-3; 2; 5\}$ b) $\mathcal{L} = \{-3; -1; 1; 2\}$

weiterführende Aufgaben

zu Aufgabe 6

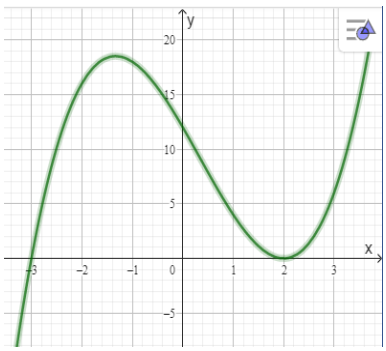
$f(x) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$

$x_{01} = -3,\ x_{02} = -1,\ x_{03} = 2$

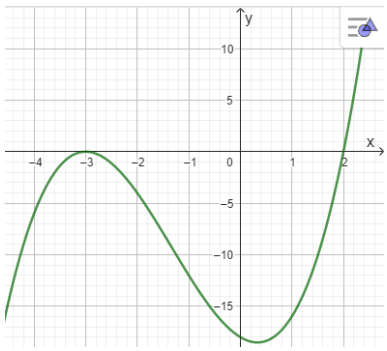


Doppeltes Binom:

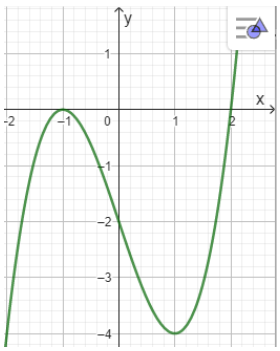
$f(x) = (x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$



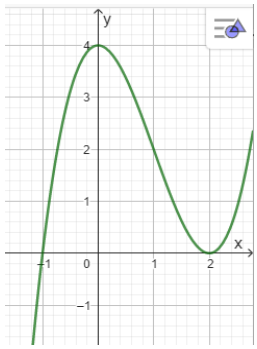
$f(x) = (x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+3)$



$f(x) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$



$f(x) = (x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$



Es sind weitere Varianten möglich.

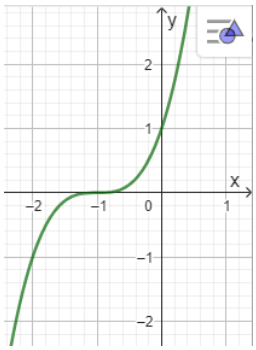
Mögliche Beobachtungen:

- Es gibt nur noch zwei statt drei Nullstellen.
- Die Nullstelle, die dem doppelten Binom entspricht, ist zugleich Extremstelle (Hoch- oder Tiefpunkt).

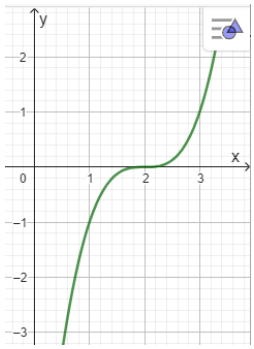
Abbildung: erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

Dreifaches Binom

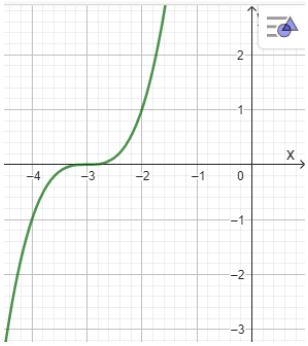
$f(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$
$\quad = (x+1)^3$



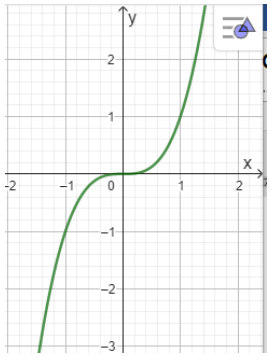
$f(x) = (x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)$
$\quad = (x-2)^3$



$f(x) = (x+3)\cdot(x+3)\cdot(x+3)$



zum Vergleich: $f(x) = x^3$

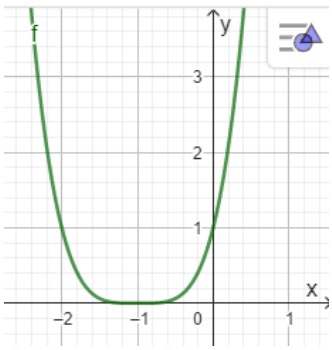


Mögliche Beobachtungen:

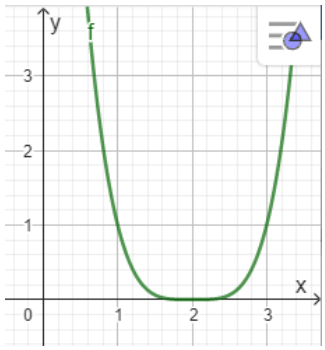
- Es gibt nur noch eine statt drei Nullstellen.
- Die Nullstelle, die dem Binom entspricht, ist zugleich Wendepunkt.
- Der Graph ist der verschobene Graph von $f(x) = x^3$.

Vierfaches Binom

$f(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$



$f(x) = (x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)$



Mögliche Beobachtungen:

- Es gibt nur eine Nullstelle.
- Die Nullstelle ist zugleich Tiefpunkt.
- Der Graph ist der verschobene Graph von $f(x) = x^4$.

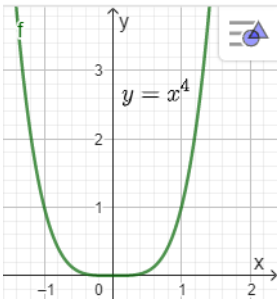


Abbildung: erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

Material 4: Einfache Funktionseigenschaften

Funktionen unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung zu untersuchen ist laut Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, Hrsg., 2022. Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe Potsdam, Teil C, verfügbar unter: https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf) Thema des ersten Kurshalbjahres (Jahrgangsstufe 11 an Gymnasien, Jahrgangsstufe 12 an Gesamtschulen/Beruflichen Gymnasien)[5].
Bei ganzrationalen Funktionen lassen sich einige Eigenschaften auch ohne Differentialrechnung untersuchen. Dazu gehören neben den Nullstellen ...

- der Schnittpunkt mit der y-Achse,
- die Symmetrie zur y-Achse oder zum Koordinatenursprung,
- das Verhalten im Unendlichen,
- der Zusammenhang zwischen Monotonie und Lage von Extrempunkten.

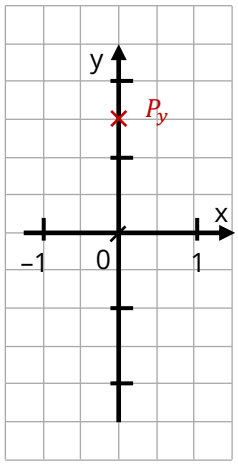
In Vorbereitung auf die Qualifikationsphase lassen sich mit dieser Thematik die entsprechenden Begriffe erarbeiten und Vorgehensweisen verstehen und üben.

Das nachfolgende Material ist so formatiert, dass es sich als Kopiervorlage eignet.

Material 3 und Material 4 können auch zusammen eingesetzt werden. So sind verschiedene Arbeitsformen, Methoden und Sozialformen möglich, wie z. B. Lerntheke/Lernbuffet, Gruppenpuzzle, Expertenkonferenz, Freiarbeit. Teile der Ausführungen im Material können auch durch den Vortrag einer Lehrerin oder eines Lehrers ersetzt und nur die Aufgaben zum Üben genutzt werden.

1 Schnittpunkt mit der y-Achse

Alle Punkte auf der y-Achse haben die Koordinaten $P_y(0|n)$.
Der Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse lässt sich rechnerisch ermitteln, indem in die Funktionsgleichung der Wert $x = 0$ eingesetzt wird, d. h. $n = f(0)$.



Beispiele

	Funktion	Rechnung	Schnittpunkt mit y-Achse
I)	$y = 2x + 5,$	$f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$	$\rightarrow P_y(0\|5)$
II)	$y = x^2 - 3,$	$f(0) = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$	$\rightarrow P_y(0\|-3)$
III)	$y = 2^x + 3,$	$f(0) = 2^0 + 3 = 1 + 3 = 4$	$\rightarrow P_y(0\|4)$

Übungen

Bestimmen Sie den jeweiligen Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse.

a) $y = 3x - 7$ b) $y = x^2 + 3x + 5$ c) $y = x^3 + 2x^2 - 1$ d) $y = 3 \cdot \cos(x) + 1$

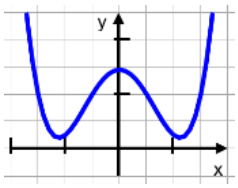
[5] RLP gymnasiale Oberstufe, Teil C, Mathematik, S.23

2 Symmetrie

Symmetrien im Funktionsverlauf zu erkennen ist nützlich. Es kann den Berechnungsaufwand verringern und helfen, einen Graphen zu skizzieren. In Anwendungskontexten können Symmetrien dazu beitragen, Probleme zu vereinfachen.

Zwei einfache Symmetrien sind die (Spiegel-)Symmetrie zur y-Achse und die (Punkt-)Symmetrie zum Koordinatenursprung.

Symmetrie zur y-Achse



Der Graph einer Funktion ist dann symmetrisch zur y-Achse, wenn er „links genauso aussieht wie rechts".

Das bedeutet, dass er für ein beliebiges Argument (x) den gleichen Funktionswert hat, wie für das Argument $(-x)$.

Es gilt dann folglich: $f(x) = f(-x)$ für alle x.

Beispiel: Abb. 1 zeigt den Graphen von $f(x) = x^2 - 4$.

Für $x = 3$ ergibt sich $f(3) = 5$ und $f(-3) = 5$,

allgemein gilt $f(x) = x^2 - 4$ und $f(-x) = (-x)^2 - 4$.

Da $(-x)^2 = x^2$ ist, folgt $f(x) = x^2 - 4$ und $f(-x) = x^2 - 4$,

also $f(x) = f(-x)$.

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

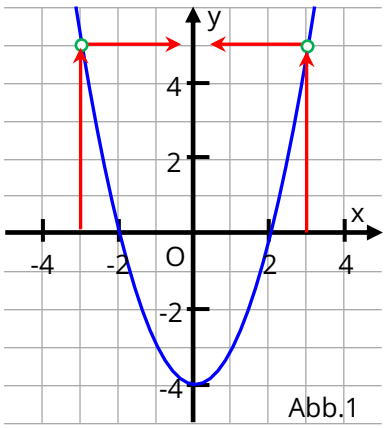


Abb.1

Aufgabe:

Abb. 2 zeigt den Graphen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

- Wählen Sie als Argumente eine beliebige Zahl und deren Gegenzahl. Zeigen Sie rechnerisch, dass sich für beide der gleiche Funktionswert ergibt.
- Begründen Sie die vorliegende Achsensymmetrie wie im Beispiel (zu Abb. 1).

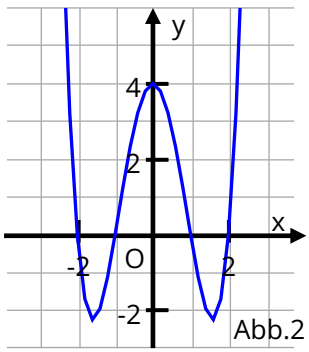


Abb.2

Funktionen, deren Graphen symmetrisch zur y-Achse verlaufen, nennt man gerade Funktionen.
Für diese gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$.

Für Funktionen, deren Gleichung ein Polynom ist, gibt es eine Vereinfachung:

Wenn alle **Exponenten** der Funktionsgleichung **gerade** sind, dann ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.

Symmetrie zum Koordinatenursprung

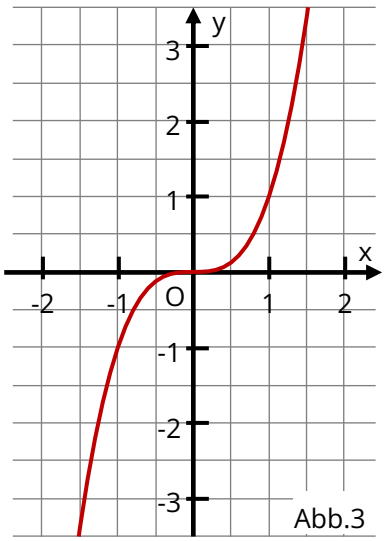


Abb.3

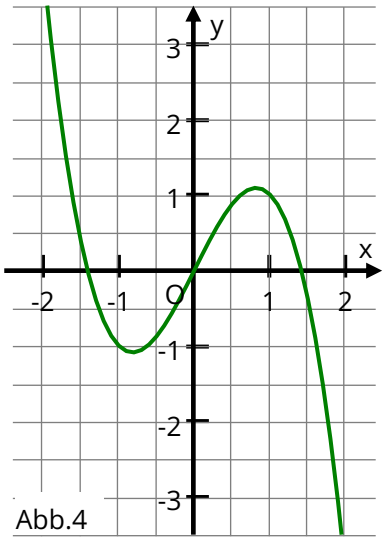


Abb.4

Gilt für eine Funktion: $f(-x) = -f(x)$, d.h. für eine Zahl und ihre Gegenzahl ergibt sich ein Funktionswert mit gleichem Betrag aber entgegengesetztem Vorzeichen, dann ist der Graph der Funktion (punkt-)symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Beispiel: Abb. 3 zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$
Für $x = 1{,}5$ und $x = -1{,}5$ ergibt sich $f(1{,}5) = 3{,}375$ und $f(-1{,}5) = -3{,}375$,
allgemein gilt $(-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = -x^3$,
also $f(-x) = -f(x)$.
Der Graph ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Aufgabe: Abb. 4 zeigt den Graphen von $f(x) = 2x - x^3$.

- Wählen Sie als Argumente eine beliebige Zahl und deren Gegenzahl. Zeigen Sie rechnerisch, dass deren Funktionswerte den gleichen Betrag aber unterschiedliche Vorzeichen haben.
- Begründen Sie die vorliegende Symmetrie wie im Beispiel (zu Abb. 3).

Funktionen, deren Graphen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (0|0) verlaufen, nennt man ungerade Funktionen.
Für diese gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$.

Für Funktionen, deren Gleichung ein Polynom ist, gibt es eine Vereinfachung:

Wenn alle **Exponenten** der Funktionsgleichung **ungerade** sind,
dann ist der Graph der Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Abb. 4 zeigt eine derartige Funktion: $f(x) = 2x - x^3$. (Hinweis: $x = x^1$)

Aufgaben:

Beurteilen Sie die folgenden Funktionen bezüglich ihrer Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Koordinatenursprung.

a) $f(x) = x^4 - 5$ b) $f(x) = x^5 + 2x^3$ c) $y = x^6 - 2x^4 - x^2$

d) $y = x^5 - x$ e) $f(x) = x^4 - x$ f) $f(x) = x^3 - 7$

Überprüfen Sie Ihre Aussagen mit Hilfe eines Funktionsplotters.

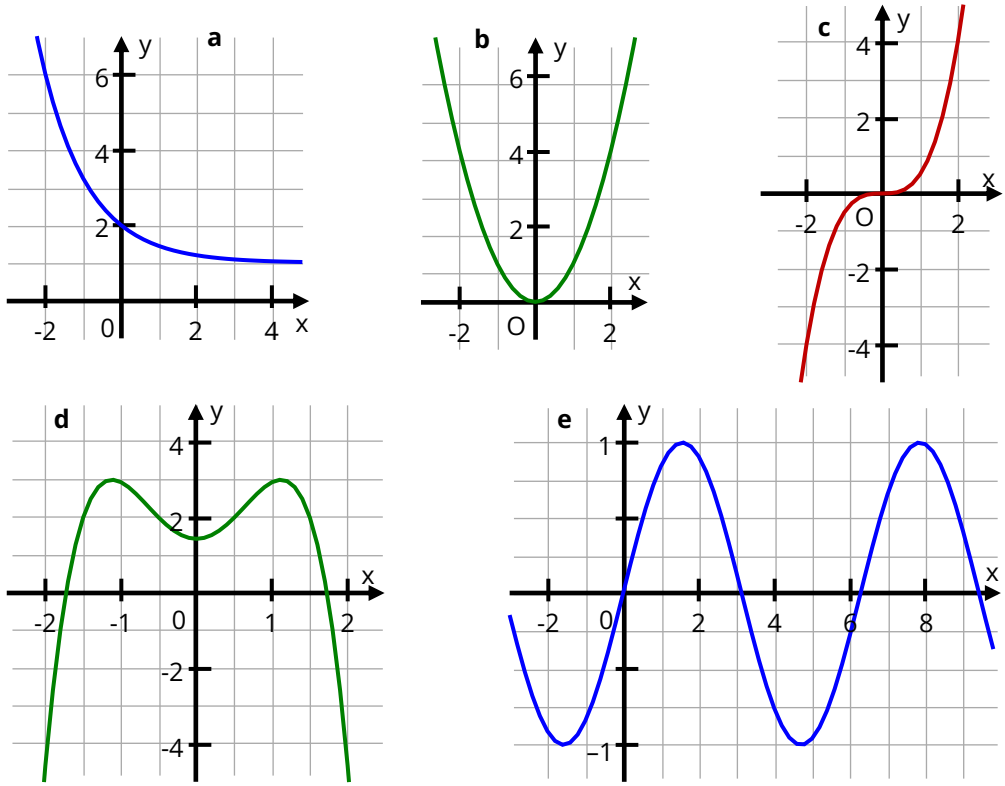
3 Verhalten im Unendlichen

Funktionen sind Werkzeuge. Geschickt eingesetzt, eröffnen sie die Möglichkeit, Vorgänge in der Welt zu beschreiben. Die Festlegung der Rentenbeiträge, die Traglast eines Flugzeuges, die Fluthöhe im Hafen von Büsum, ... – alles kann mit funktionalen Zusammenhängen modelliert werden.

In vielen Fachgebieten beschäftigen sich Expertinnen und Experten damit, aus vorliegenden Daten mathematische Modelle zu entwickeln, mit denen sich Entwicklungsprozesse vorausberechnen lassen. Ist ein funktionaler Zusammenhang gefunden, der eine vorhandene Datenmenge gut beschreibt, so stellt sich sofort die Frage, wie sich diese Funktion in naher oder ferner Zukunft entwickelt. Funktionseigenschaften sind mitunter die Basis von Prognosen.

Das Verhalten eines Funktionsgraphen für sehr große Argumente ($x \to \infty$) und für negative Argumente mit großem Betrag ($x \to -\infty$) ist bei Funktionen, deren Gleichung ein Polynom ist, sicher vorhersagbar.

Beispiele und Symbolik



Funktionsgraphen können sich für große Argumente bzw. negative Argumente mit großem Betrag sehr unterschiedlich verhalten. Folgendes Verhaltenen sind auf den Abbildungen erkennbar:

a) Der Graph von $f(x)$ nähert sich für große x-Werte dem Wert $y = 1$.
Um das kurz und knapp auszudrücken, verwendet man folgende Symbolik: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Gelesen wird dies folgendermaßen: Limes von $f(x)$, für x gegen unendlich, ist 1.
Das bedeutet, dass die Funktionswerte bei sehr großen x-Werten im Bereich von $y \approx 1$ liegen.

Für negative x-Werte mit großem Betrag werden die y-Werte sehr groß.
Die Beschreibung lautet dementsprechend $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Im Folgenden verwenden wir diese Symbolik.
Somit lassen sich die Graphen in den Abbildungen b), c) und d) folgendermaßen beschreiben:

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

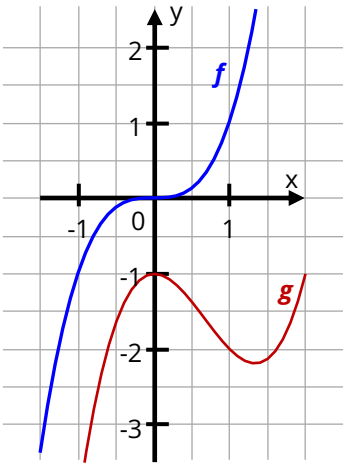
e) Die Funktion in der Abbildung ist periodisch, d.h. ihr Verhalten im Unendlichen kann nicht mit dieser Symbolik beschrieben werden.

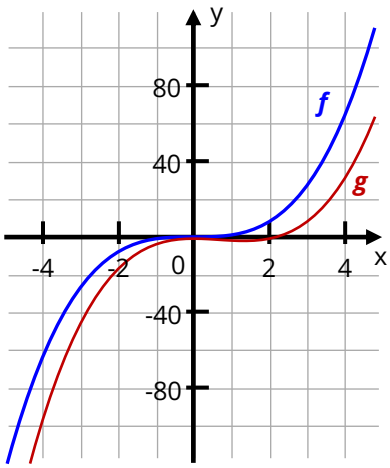
Nur die Verläufe in den Beispielen b), c) und d) sind für ganzrationale Funktionen von Bedeutung, da ihre Funktionsterme Polynome sind. Die Potenzen im Polynom sorgen dafür, dass die Funktionswerte sehr große Beträge annehmen, wenn die Beträge der Argumente größer werden.

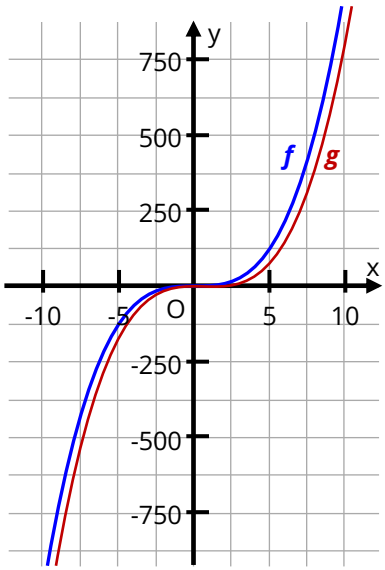
Eine Voraussage für das Verhalten ganzrationaler Funktionen im Unendlichen zu treffen, ist nicht schwierig, wenn der Verlauf von Potenzfunktionen bekannt ist:

Eine ganzrationale Funktion verhält sich, für sehr große Argumente bzw. negative Argumente mit großem Betrag, wie der **Summand** in der Funktionsgleichung **mit der höchsten Potenz**.
Das Vorzeichen dieses Summanden ist zu beachten.

Die folgenden Bilder veranschaulichen diese Aussage.







In allen drei Abbildungen sind die Graphen derselben Funktionen dargestellt:

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

Im Bereich $-1 < x < 1$ unterscheiden sich die Verläufe stark. Mit zunehmender Vergrößerung des Ausschnitts sieht man, dass die Graphen für große bzw. negative Argumente mit großem Betrag ähnlich verlaufen.
Der Verlauf von $g(x)$ wird mit größer/kleiner werdendem Argument x durch den Term x^3 bestimmt, der Einfluss des Terms $-2x^2-1$ nimmt immer mehr ab.
Um Voraussagen über den Verlauf ganzrationaler Funktionen im $\pm$Unendlichen treffen zu können, muss klar sein, wie einfache Potenzfunktionen verlaufen.

Beispiel

$f(x) = 8 + 12x - x^4$ Der Summand mit der höchsten Potenz ist x^4.
Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4) = \infty$ und wegen der Symmetrie auch $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4) = \infty$.

Das negative Vorzeichen vor x^4 kehrt den Verlauf um.
Also gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Eine Proberechnung mit hinreichend großen bzw. kleinen Argumenten bestätigt die Aussage.

- Setzen Sie die Argumente $x_1 = 100$ und $x_2 = -100$ in die Funktionsgleichung ein und prüfen sie die Aussagen.

Aufgaben

Beschreiben Sie die Funktionsverläufe für sehr große Argumente und sehr kleine Argumente (negativ, mit großem Betrag). Nutzen Sie die Symbolik $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ldots$.

a) $f(x) = x^2 + 8x$ b) $y = x^3 + 5x^2$ c) $g(x) = 2x - 5x^3 + 80$ d) $y = 5(x^3 + x) - x^6$

Prüfen Sie Ihre Aussagen, indem Sie geeignete Werte einsetzen.

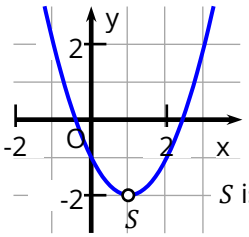
4 Hochpunkte und Tiefpunkte

Eine besondere Eigenschaft der bekannten quadratischen Funktionen ist die Existenz eines Scheitelpunktes S. Dieser ist, je nach Öffnungsrichtung, Hochpunkt oder Tiefpunkt.

Der Oberbegriff für Hoch- und Tiefpunkte ist *Extrempunkt*.

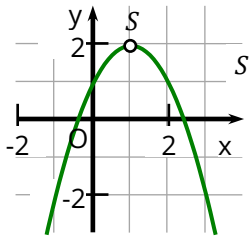
Beispiele:

$f_1(x) = x^2 - 2x - 1$



S ist Tiefpunkt.

$f_2(x) = -x^2 + 2x + 1$

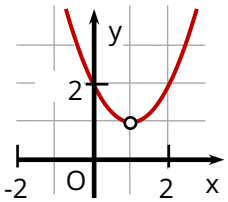


S ist Hochpunkt.

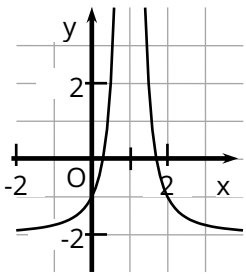
Zwischen zwei Nullstellen befindet sich bei ganzrationalen Funktionen zwangsläufig ein Hoch- oder Tiefpunkt.

Hoch- oder Tiefpunkte gibt es aber auch, wenn keine Nullstellen existieren.

Dieser Fall ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Satz: Wenn eine ganzrationale Funktion zwischen zwei Nullstellen x_1 und x_2 keine Definitionslücke aufweist, so besitzt sie im Intervall $x_1 < x < x_2$ **mindestens** einen Hochpunkt oder Tiefpunkt.



Eine derartige Aussage gilt nicht, wenn im Bereich $x_1 < x < x_2$ eine Definitionslücke existiert.

Z. B.: $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 2$ ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert.

(Der Graph von $g(x)$ ist nebenstehend abgebildet.)

$x = 1$ liegt genau zwischen den beiden Nullstellen von $g(x)$.

Wegen dieser Definitionslücke lässt sich aus der Existenz der Nullstellen nicht auf das Vorhandensein von Extrempunkten schließen.

Die Funktion $g(x)$ in diesem Beispiel ist jedoch keine ganzrationale Funktion. Bei ganzrationalen Funktionen treten keine Definitionslücken auf.
Obwohl sich die Begriffe Hochpunkt und Tiefpunkt schon aus dem Namen ergeben, ist eine genaue Definition erforderlich. Sie lautet:

Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert.
Dann ist der Punkt $P(x_E|f(x_E))$ ...

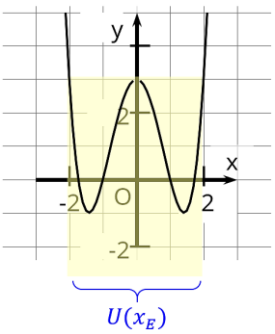
- ein *lokaler Hochpunkt*, wenn es eine Umgebung $U(x_E)$ gibt, so dass für alle $x \in U$ $(x \neq x_E)$ gilt: $f(x_E) \geq f(x)$,
- ein *lokaler Tiefpunkt*, wenn es eine Umgebung gibt, so dass für alle $x \in U$ $(x \neq x_E)$ gilt: $f(x_E) \leq f(x)$."

Gelten diese Aussagen sogar für den gesamten Definitionsbereich (und nicht nur für eine eingeschränkte Umgebung U), so ist $P(x_E|f(x_E))$ *globaler Hoch-* bzw. *Tiefpunkt* von f.

Aufgabe
Erläutern Sie die Aussagen in dieser Definition. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Aussagen ein, die in mathematischer Kurzschrift formuliert sind.

Zwei Beispiele mit Abbildungen zur Erläuterung

$f_3(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

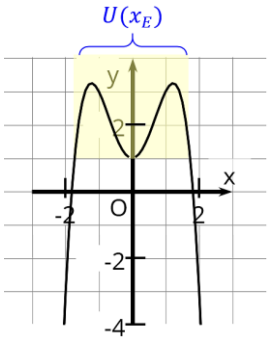


f_3 hat vier Nullstellen. Zwischen je zwei Nullstellen existiert ein Extrempunkt.

Die Tiefpunkte sind global, d.h. sie sind die tiefsten Punkte der Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich.

Der Hochpunkt ist (nur) lokal.
Er ist in seiner Umgebung U der höchste Punkt.
Es gibt aber höhere Punkte auf dem Graphen von f_3 .

$f_4(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$



f_4 hat zwei Nullstellen. Dazwischen befindet sich mindestens ein Extrempunkt, in diesem Fall sind es sogar drei.

Die zwei Hochpunkte sind global, d.h. es sind die höchsten Punkte überhaupt.

Der Tiefpunkt ist (nur) lokal.
Er ist in einer Umgebung U der tiefste Punkt.
Es gibt aber tiefere Punkte auf dem Graphen von f_4

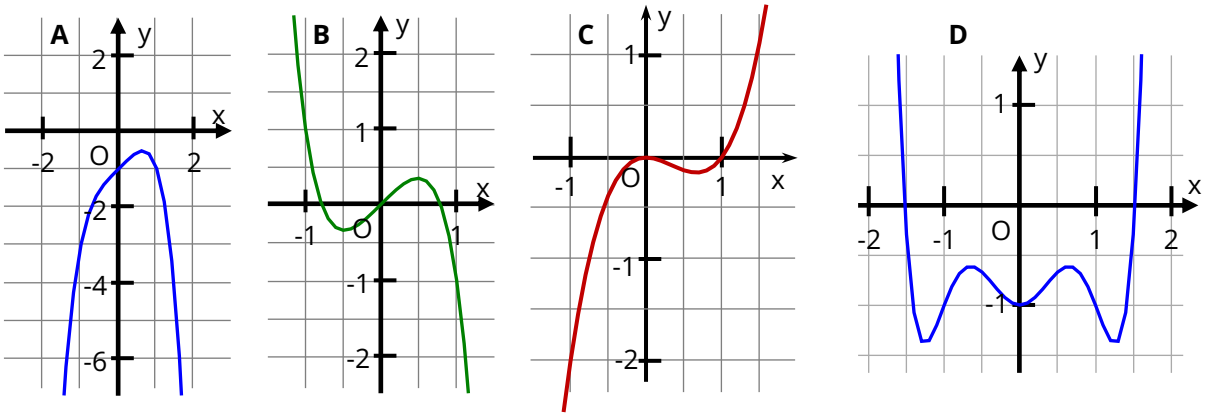
Übungen zu Material 4 (Einfache Funktionseigenschaften)

Aufgabe 1

a)
- Vermuten Sie anhand der Funktionsgleichungen das **Symmetrieverhalten** und das **Verhalten im Unendlichen** ihrer jeweiligen Graphen.
- Ordnen Sie dementsprechend die gegebenen Schaubilder (A, B, C, D) den Funktionsgleichungen (f_1, f_2, f_3, f_4 oder f_5) zu. Eine Funktionsgleichung bleibt übrig.
- Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

$f_1(x) = x^3 - x^2$, $\quad f_2(x) = -x^4 + x - 1$, $\quad f_3(x) = x - x^3 - x^5$,

$f_4(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ $\quad f_5(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1$



b) Berechnen Sie für f_1 und f_3 die Nullstellen und prüfen Sie die Übereinstimmung mit den von Ihnen zugeordneten Schaubildern..

Aufgabe 2

- Berechnen Sie für folgende Funktionen die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse.
- Beschreiben Sie das Symmetrieverhalten und das Verhalten im Unendlichen.
- Geben Sie die ungefähre Lage möglicher Extrempunkte an [z. B. Hochpunkt bei $x \approx 2{,}8$ oder Tiefpunkt im Intervall $2 < x < 3$].
- Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Graphen dieser Funktionen.
- Prüfen Sie anschließend mit einem Funktionsplotter oder graphikfähigem Taschenrechner.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

c) $f(x) = 2x^4 - 8{,}5x^2 + 2$

d) $f(x) = x^3 - 4x$

e) $f(x) = -0{,}1x^5 + 0{,}8x^3 + 0{,}9x$

f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, [Nullstellen ganzzahlig]

g) $f(x) = x^3 + 3{,}5x^2 - 5x - 12$
[$x_1 = 2$ ist bekannt]

h) $f(x) = x^8 - 6x^4 + 5$

Lösungen zu Material 4 (Einfache Funktionseigenschaften)

zu 1.) a) $P_y(0|-7)$ b) $P_y(0|5)$ c) $P_y(0|-1)$ d) $P_y(0|4)$

zu 2.) Symmetrie zur y-Achse

z. B.:

x	1	– 1	2	– 2	3	– 3	4	– 4	5	– 5
$f(x)$	0	0	0	0	40	40	180	180	504	504

$(-x)^4$=$(x)^4$ und $(-x)^2 = (x)^2$ → $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ und $f(-x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$f(x) = f(-x)$ → Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

Symmetrie zum Koordinatenursprung

z. B.:

x	1	– 1	2	– 2	3	– 3	4	– 4	5	–5
$f(x)$	1	– 1	– 4	4	– 21	21	– 56	56	– 115	115

$(-x)^3$=$-x^3$ und $(-x)^1 = -x^1$ → $f(-x) = -2x + x^3$ und $-f(x) = -2x + x^3$

$f(-x) = -f(x)$ → Graph ist symmetrisch zu $(0|0)$.

zu 2.) **Aufgaben**

a) symmetrisch zur y-Achse b) symmetrisch zu $(0|0)$ c) symmetrisch zur y-Achse

d) symmetrisch zu $(0|0)$ e) nicht symmetrisch f) nicht symmetrisch zur y-Achse oder zu $(0|0)$ [aber zu $(0|7)$]

zu 3.) a) höchste Potenz ist x^2 → $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b) höchste Potenz ist x^3 → $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) höchste Potenz ist x^3, negativer Faktor→ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

d) höchste Potenz ist x^6, negativer Faktor→ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

zu 4.) lokaler Hochpunkt: Vor und hinter der Stelle x_E gibt es einen Bereich, in dem nur x-Werte sind, deren zugehörige y-Werte alle kleiner sind als der y-Wert, der zu x_E gehört.

lokaler Tiefpunkt: Vor und hinter der Stelle x_E gibt es einen Bereich, in dem nur x-Werte sind, deren zugehörige y-Werte alle größer sind als der y-Wert, der zu x_E gehört.

zu den Übungen zu Material 4, Aufgabe 1a

$f_1(x) = x^3 - x^2$ verläuft für negative x gegen $-\infty$ und für positive x gegen $+\infty$, keine Symmetrie zur y-Achse oder $(0|0)$ → Graph C trifft zu.

$f_2(x) = -x^4 + x - 1$ verläuft für negative x gegen $-\infty$ und für positive x gegen $-\infty$, keine Symmetrie zur y-Achse oder $(0|0)$ → Graph A trifft zu.

$f_3(x) = x - x^3 - x^5$ verläuft für negative x gegen $+\infty$ und für positive x gegen $-\infty$, Symmetrie zu $(0|0)$ → Graph B trifft zu.

$f_4(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ verläuft für negative x und für positive x gegen $-\infty$, symmetrisch zur y-Achse → kein Graph trifft zu.

$f_5(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1$ verläuft für negative x gegen $+\infty$ und für positive x gegen $+\infty$. Symmetrie zur y-Achse → Graph D trifft zu.

zu den Übungen zu Material 4, Aufgabe 1b

$f_1(x) = x^3 - x^2$ $\rightarrow 0 = x^2 \cdot (x-1)$ $\rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1$

$f_3(x) = x - x^3 - x^5$ $\rightarrow 0 = -x \cdot (x^4 + x^2 - 1)$ $\rightarrow x_1 = 0$

$\rightarrow 0 = z^2 + z - 1$ $\rightarrow z_1 \approx 0{,}618 \rightarrow x_2 \approx 0{,}786;\ x_3 \approx -0{,}786$

$z_2 \approx -1{,}618 \rightarrow$ keine weitere Lösung

zu Aufgabe 2

a) $\boldsymbol{y = x^3 + 2x^2 - 3x}$

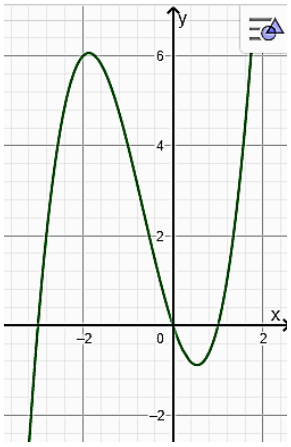
Nullstellen: $0 = x \cdot (x^2 + 2x - 3) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 1,$

$P_y(0|0)$, nicht symmetrisch zur y-Achse oder zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Extrempunkte: zwischen $x = -3$ und $x = 0$
sowie zwischen $x = 0$ und $x = 1$

Für die Skizze: $f(-4) = -20;\ f(-2) = 6;\ f(-1) = 4;$
$f(0{,}5) \approx 0{,}9;\ f(2) = 10$



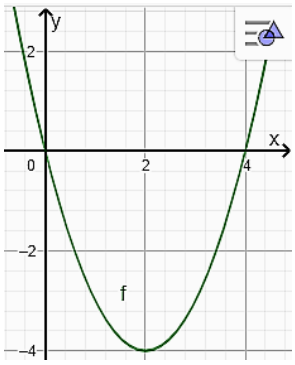
b) $\boldsymbol{y = x^2 - 4x}$

Nullstellen: $0 = x \cdot (x - 4) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

$P_y(0|0)$, nicht symmetrisch zur y-Achse oder zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Extrempunkt (Scheitelpunkt, Tiefpunkt) bei $S(2|-4)$



c) $\boldsymbol{y = 2x^4 - 8{,}5x^2 + 2}$

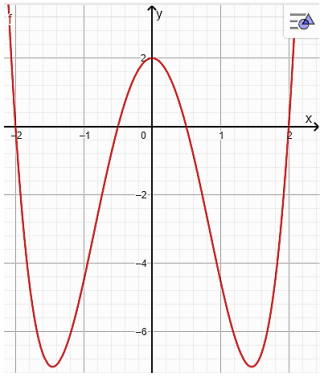
Nullstellen: $0 = z^2 - 4{,}25z - 1 \rightarrow z_1 = 4, z_2 = 0{,}25$
$\rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -0{,}5,\ x_4 = 0{,}5$

$P_y(0|2)$, symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Extrempunkte: $x_{E1} \approx -1{,}5,\ x_{E2} = 0,\ x_{E3} \approx 1{,}5$

Für die Skizze: $f(-1) = -4{,}5,\ f(1) = -4{,}5$



d) $\boldsymbol{y = x^3 - 4x}$

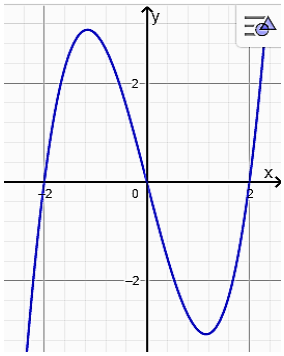
Nullstellen: $0 = x \cdot (x^2 - 4) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$

$P_y(0|0)$, symmetrisch zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Extrempunkte: $x_{E1} \approx -1,\ \ x_{E2} \approx 1$

Für die Skizze: $f(-1) = 3,\ f(1) = -3$



Abbildungen erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

zu den Übungen zu Material 4

zu Aufgabe 2

e) $\boldsymbol{y = -0,1x^5 + 0,8x^3 + 0,9x}$

Nullstellen: $0 = -0{,}1x \cdot (x^4 - 8x^2 - 9) \rightarrow$ $\quad x_1 = 0,\ z_1 = 9, z_2 = -1$

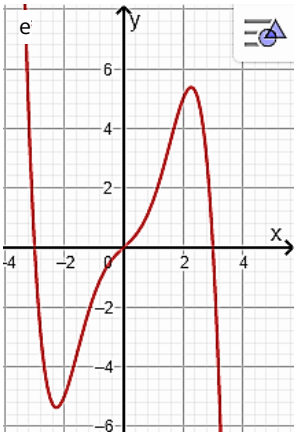
$x_2 = -3, x_3 = 3$

$P_y(0|0)$, symmetrisch zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Extrempunkte: $x_{E1} \approx -2,\ \ x_{E2} \approx 2$

Für die Skizze: $f(-2) = -5$, $f(-1) = -1{,}6$, $f(1) = 1{,}6$, $f(2) = 5$



f) $\boldsymbol{y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

Nullstellen: durch Probieren: $x_1 = 2$

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = x^2 + 4x + 3$

$0 = x^2 + 4x + 3 \ \rightarrow x_2 = -3, x_3 = -1$

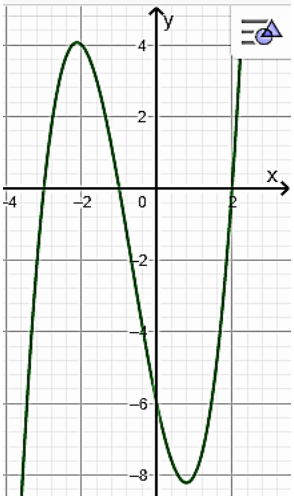
$P_y(0|-6)$, nicht symmetrisch zur y-Achse oder zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Extrempunkte: zwischen $x = -3$ und $x = -1$

sowie zwischen $x = -1$ und $x = 2$

Für die Skizze: $f(-2) = 4$, $f(1) = -8$



g) $\boldsymbol{y = x^3 + 3,5x^2 - 5x - 12}$

Nullstellen: bekannt: $x_1 = 2$

$(x^3 + 3{,}5x^2 - 5x - 12) : (x - 2) = x^2 + 5{,}5x + 6$

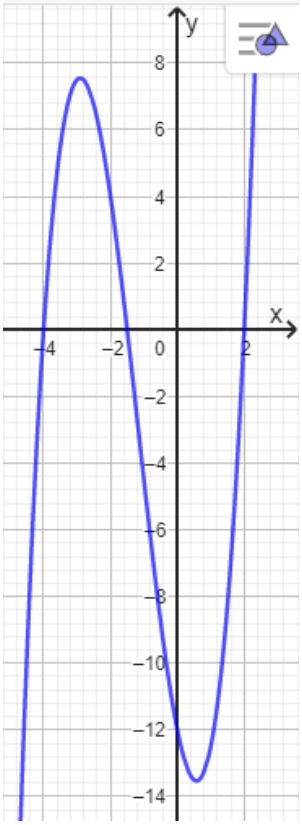
$0 = x^2 + 5{,}5x + 6 \ \rightarrow x_2 = -4, x_3 = -1{,}5$

$P_y(0|-12)$, nicht symmetrisch zur y-Achse oder zu $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Extrempunkte: $x_{E1} \approx -3,\ \ x_{E2} \approx 0{,}5$

Für die Skizze: $f(-3) = 7{,}5$, $f(0{,}5) = -13{,}5$



h) $\boldsymbol{y = x^8 - 6x^4 + 5}$

Nullstellen: $\quad 0 = z^2 - 6z + 5 \ \ [z = x^4]$

$\rightarrow z_1 = 1, z_2 = 5$

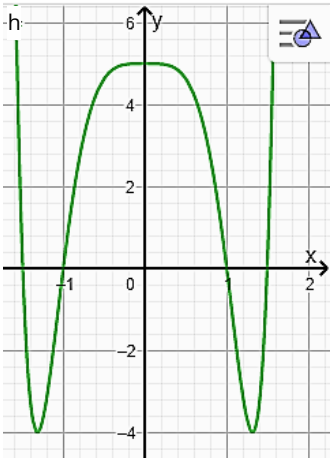
$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 \approx -1{,}5,\ x_4 \approx 1{,}5$

$P_y(0|5)$, symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Extrempunkte: $\quad x_{E1} \approx -1{,}25,\ x_{E2} \approx 1{,}25$

$x_{E3} = 0$



Abbildungen erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

Material 5: Zusammenhang zwischen Monotonie und Lage von Extrempunkten

Anhand geeigneter Beispiele lässt sich anschaulich zeigen, dass genau dort eine Extremstelle liegt, wo das Vorzeichen des Anstieges wechselt. Die nachfolgende Aufgabenstellung hält die Schülerinnen und Schüler dazu an, diese mathematische Situation selbstständig zu erkunden und ihre Erkenntnisse zusammenzufassen.

Eine entsprechende Vorarbeit lässt sich bereits in Jahrgangsstufe 9 leisten. Beim Thema „Quadratische Funktionen“ werden Schülerinnen und Schüler erstmals mit Extrempunkten konfrontiert. Schon bei der Prägung des Begriffes Scheitelpunkt kann das in der gymnasialen Oberstufe zu formulierende „notwendige Kriterium für die Existenz von Extrempunkten“ vorbereitet werden. Den Scheitelpunkt einer Parabel zu beschreiben sollte auch die Tatsache berücksichtigen, dass sich die Monotonie des Graphen genau im Scheitelpunkt ändert. Ein Material für Jahrgangsstufe 9 („Sprachspeicher") findet sich im Anhang (Seite 69).

Hinweis zum Sprachspeicher: Die Begriffe dieser Übersicht müssen erst verstehensorientiert erarbeitet und der Übergang von der Alltagssprache zur Fachsprache vollzogen werden, bevor sich das Material als Werkzeug und Erinnerungshilfe nutzen lässt.

Beachtung finden sollte der Übergang vom konstanten Anstieg einer linearen Funktion hin zur Betrachtung von Anstiegen krummliniger Graphen. An dieser Stelle ist eine Definition des Anstieges für ganzrationale Funktionen noch nicht erfolgt. Man geht hier noch von einer intuitiven Vorstellung vom Anstieg aus.

Das folgende Material enthält einige Beispiele. Diese sind unter Umständen bereits ausreichend. Weitere Beispiele kann man mit Funktionsplottern erstellen.

Graphikfähige Taschenrechner oder *Tablets* bzw. PCs mit GeoGebra oder anderen Funktionsplottern lassen sich in diesem Zusammenhang sehr gut einsetzen. Mithilfe dieser Medien können deutlich mehr Beispiele betrachtet und gleichzeitig prozessbezogene Kompetenzen bei Verwendung mathematischer Hilfsmittel und Werkzeuge erworben werden.

Nachfolgend sind Aufgabenvarianten ohne und mit digitalen Hilfsmitteln dargestellt. Die Aufgaben können gedruckt oder per Beamer/Monitor präsentiert werden.

Monotonie (Steigungsverhalten) eines Graphen und Lage von Extrempunkten

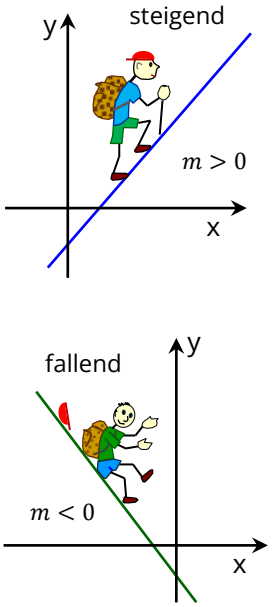


Abb.: steigen und fallen

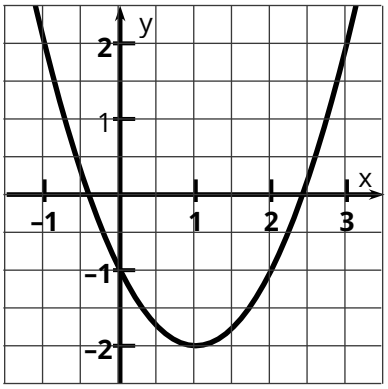
Aufgabe 1

- Beschreiben Sie das Steigungsverhalten der dargestellten Funktionsgraphen (a bis d) abschnittsweise mit den Begriffen *monoton steigend* und *monoton fallend*.
- Geben Sie jeweils auch das Vorzeichen des Anstieges auf den entsprechenden Abschnitten an.
- Strukturieren Sie Ihre Beschreibung so, wie im Beispiel vorgegeben.

Beispiel

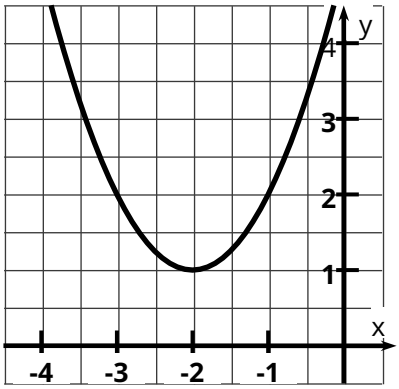
Der Graph verhält sich ...

- für $x < 1$ monoton fallend. ($m < 0$, negativer Anstieg)
- für $x > 1$ monoton steigend. ($m > 0$, positiver Anstieg)
- Für $x = 1$ gilt $m = 0$.

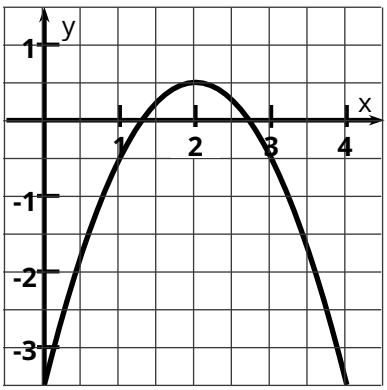


Funktionsgraphen zu Aufgabe 1

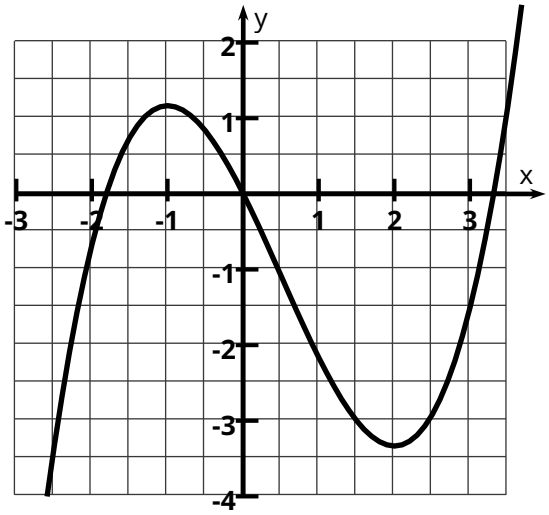
a)



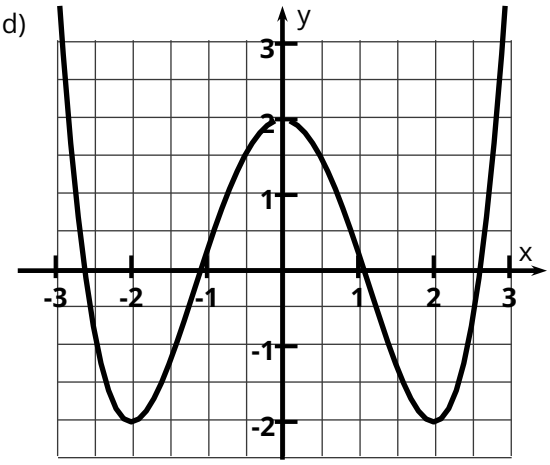
b)



c)



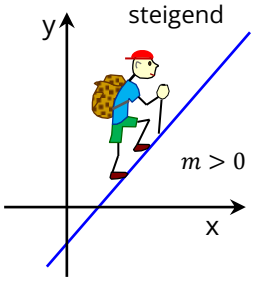
d)



Aufgabe 2

Erläutern Sie allgemein und an einem der Funktionsgraphen, welcher Zusammenhang zwischen dem Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen und der Lage seiner Extrempunkte besteht.

Monotonie (Steigungsverhalten) eines Graphen und Lage von Extrempunkten



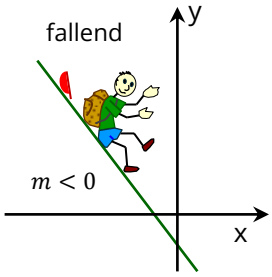


Abb.: steigen und fallen

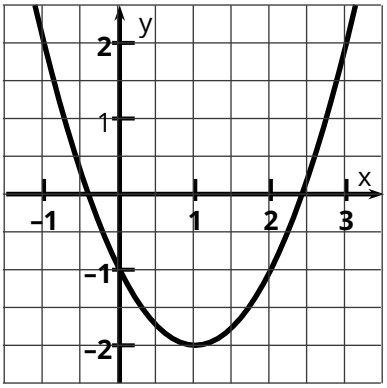
Aufgabe 1

- Stellen Sie die folgenden Funktionen nacheinander auf ihrem Gerät graphisch dar.
- Beschreiben Sie jeweils das Steigungsverhalten der dargestellten Funktionsgraphen abschnittsweise mit den Begriffen *monoton steigend* und *monoton fallend*.
- Geben Sie jeweils auch die Vorzeichen der Anstiege auf den entsprechenden Abschnitten an.

Beispiel

Der Graph verhält sich ...

- für $x < 1$ monoton fallend. ($m < 0$, negativer Anstieg)
- für $x > 1$ monoton steigend. ($m > 0$, positiver Anstieg)
- Für $x = 1$ gilt $m = 0$.



Funktionen zu Aufgabe 1

a) $f(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = -3x + 12$

c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

d) $f(x) = -x^2 - 8x - 9$

e) $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x - 2$

f) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10$

g) $f(x) = 0{,}25x^4 - 4{,}5x^2 + 8{,}25$

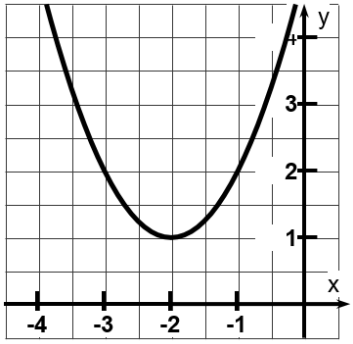
Aufgabe 2

Erläutern Sie allgemein und an einem Beispiel, welcher Zusammenhang zwischen dem Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen und der Lage eines Extrempunktes besteht.

Lösungen zu Material 5 (Monotonie und Lage der Extrempunkte)

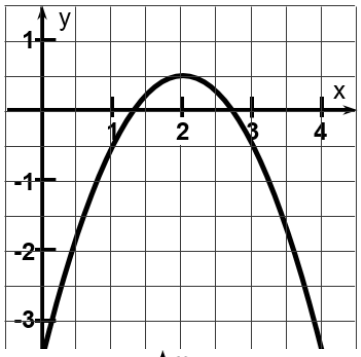
Lösungen zu den Aufgaben ohne digitale Hilfsmittel

zu Aufgabe 1



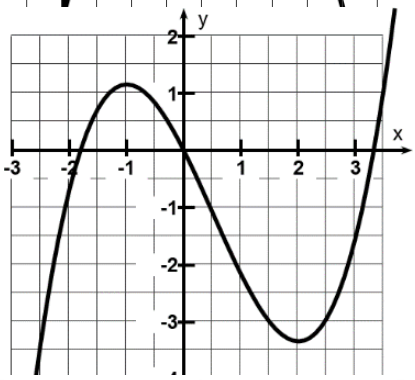
a) Der Graph verhält sich ...

- für $x < -2$ monoton fallend ($m < 0$) (Anstieg ist negativ.).
- für $x > -2$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).
- Für $x = -2$ gilt $m = 0$.



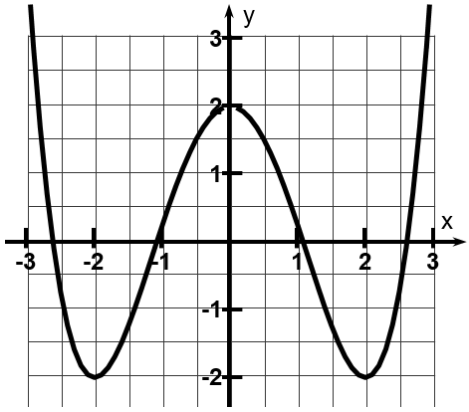
b) Der Graph verhält sich ...

- für $x < 2$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).
- für $x > 2$ monoton fallend ($m < 0$) (Anstieg ist negativ.).
- Für $x = 2$ gilt $m = 0$.



c) Der Graph verhält sich ...

- für $x < -1$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).
- Für $x = -1$ gilt $m = 0$.
- für $-1 < x < 2$ monoton fallend ($m < 0$) (Anstieg ist negativ.).
- Für $x = 2$ gilt $m = 0$.
- für $x > 2$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).



d) Der Graph verhält sich ...

- für $x < -2$ monoton fallend ($m < 0$) (Anstieg ist negativ.).
- Für $x = -2$ gilt $m = 0$.
- für $-2 < x < 0$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).
- Für $x = 0$ gilt $m = 0$.
- für $0 < x < 2$ monoton fallend ($m < 0$) (Anstieg ist negativ.).
- für $x > 2$ monoton steigend ($m > 0$) (Anstieg ist positiv.).

zu Aufgabe 2

An den Stellen, an denen ein Extrempunkt vorliegt, wechselt der Anstieg das Vorzeichen.
Genau in der Extremstelle x_E ist der Anstieg immer $m = 0$.

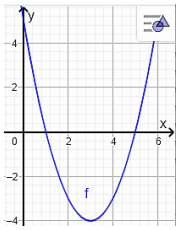
Lösungen zu den Aufgaben mit digitalen Hilfsmitteln

zu Aufgabe 1

a) lineare Funktion, Graph monoton steigend für alle $x \in \mathbb{R}$

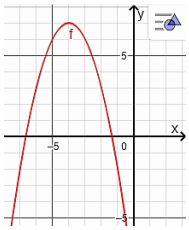
b) lineare Funktion, Graph monoton fallend für alle $x \in \mathbb{R}$

c)



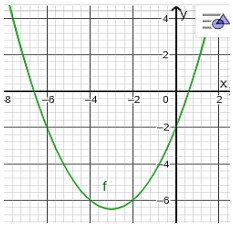
- Der Graph ist monoton fallend für $x < 3$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Der Graph ist monoton steigend für $x > 3$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).
- Für $x = 2$ gilt $m = 0$.

d)



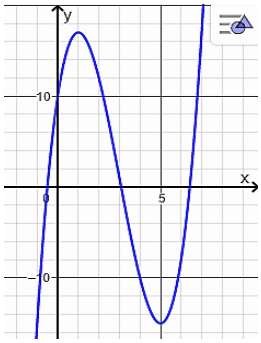
- Der Graph ist monoton steigend für $x < -4$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).
- Der Graph ist monoton fallend für $x > -4$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Für $x = -4$ gilt $m = 0$.

e)



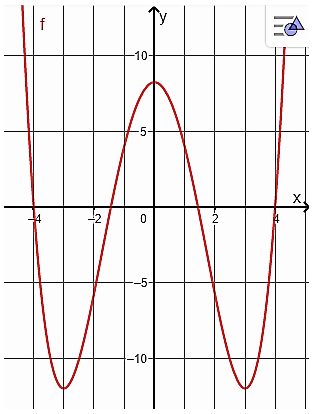
- Der Graph ist monoton fallend für $x < -3$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Der Graph ist monoton steigend für $x > -3$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).
- Für $x = -3$ gilt $m = 0$.

f)



- Der Graph ist monoton steigend für $x < 1$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).
- Für $x = 1$ gilt $m = 0$.
- Der Graph ist monoton fallend für $1 < x < 5$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Für $x = 5$ gilt $m = 0$.
- Der Graph ist monoton steigend für $5 < x$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).

g)



- Der Graph ist monoton fallend für $x < -3$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Für $x = -3$ gilt $m = 0$.
- Der Graph ist monoton steigend für $-3 < x < 0$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).
- Für $x = 0$ gilt $m = 0$.
- Der Graph ist monoton fallend für $0 < x < 3$, dort ist der Anstieg negativ ($m < 0$).
- Für $x = 3$ gilt $m = 0$.
- Der Graph ist monoton steigend für $3 < x$, dort ist der Anstieg positiv ($m > 0$).

Abbildungen erstellt mit GeoGebra®, CC BY-NC-SA 4.0

zu Aufgabe 2

An den Stellen, an denen ein Extrempunkt vorliegt, wechselt der Anstieg das Vorzeichen. Genau in der Extremstelle x_E ist der Anstieg immer $m = 0$.

Material 6: Veranschaulichung der mittleren und lokalen Änderungsrate an Beispielen

Kommentar

Das Material dient zur Einführung bzw. Veranschaulichung von mittlerer und lokaler Änderungsrate.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst eigenständig den Arbeitsauftrag „Polizeimeldung“ und üben, verschiedene mittlere Geschwindigkeiten zu berechnen. Die Momentangeschwindigkeiten (lokale Änderungsraten) lassen sich im Beispiel 1 aus mittleren Geschwindigkeiten bestimmen, da die Abschnitte, die zu untersuchen sind, linear verlaufen. Um die Aufgabe bearbeiten zu können, sollten die Schülerinnen und Schüler über das entsprechende Wissen aus dem Physikunterricht verfügen. Ggf. ist eine Aktivierungsphase nötig, beispielsweise:

- $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
- $1\,h = 60\,min \rightarrow 1\,\frac{km}{min} = 60\,\frac{km}{h}$
- In einem Weg-Zeit-Diagramm entspricht der Anstieg des Graphen der Geschwindigkeit.

Im Arbeitsauftrag „Klippenspringen“ (Beispiel 2) soll die lokale Änderungsrate an einem krummlinig verlaufenden Graphen bestimmt werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass eine Sekante als Hilfsmittel genutzt werden kann, um den Anstieg an der Stelle anzunähern.

Indem das Material eingesetzt wird, erkennen Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen dem Anstieg einer Funktion in einem Punkt und dem der Tangente in diesem Punkt.

Im weiteren Unterrichtsverlauf kann nun thematisiert werden, dass sich über Tangenten an jedem Punkt des Graphen die dortige lokale Änderungsrate bestimmen lässt. Der Anstieg der Tangente entspricht dem Anstieg des Funktionsgraphen an dieser Stelle. Sind alle Punkte eingezeichnet, resultiert daraus ein Graph, der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Dieses Material ist auch eingebettet in das GeoGebra-Buch „Graph der Ableitungsfunktionen“ (https://www.geogebra.org/m/nd22jnas). Das Buch ist als Selbstlernkurs zum Thema „Ganzrationale Funktionen“ in Jahrgangsstufe 10 konzipiert. Die Schülerinnen und Schüler können dort nach Eingabe ihrer Antworten die Lösungen selbstständig vergleichen.

Die Bedeutung lokaler Änderungsraten in der Geometrie sind auch im Unterrichtsmaterial „Lokale Änderungsraten bei Flächeninhalten und Volumina“ zu den Planungshilfen für Jahrgangsstufe 10 (https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Planungshilfen_kompetenzorientierter_Unterricht/Sekundarstufe_I/UM-ganzrat.F-10_lokale_AER_Flaeche_Volumina_2024-06-05_rot.pdf) beschrieben.

Mittlere und lokale Änderungsraten

Beispiel 1: Polizeimeldung

Am Mittwochmorgen wurde ein männlicher Fahrzeugführer von einem mobilen Blitzer erfasst. Der Verkehrssünder überschritt die zugelassene Höchstgeschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ deutlich. Die Polizei stellte eine Geschwindigkeit von $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fest.

Dem Fahrer drohen nun 400 € Bußgeld, 2 Punkte in Flensburg und 2 Monate Fahrverbot.

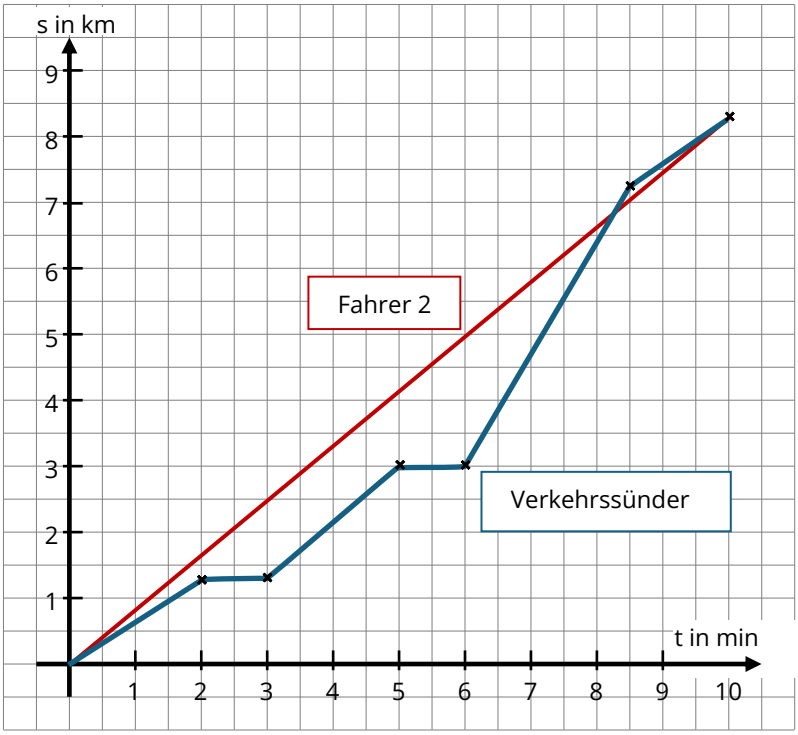


Abb.: Weg-Zeit-Diagramm

a) Beschreiben Sie die Fahrt des Verkehrssünders:

- Im Zeitraum von $t = 3\,min$ bis $t = 5\,min$ betrug die Geschwindigkeit genau $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
  Ermitteln Sie die Zeitspannen, in denen der Verkehrssünder schneller als $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. langsamer als $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr.
- Geben Sie Zeiträume an, in denen das Fahrzeug stillstand.
- Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Geschwindigkeitsübertretung vermutlich gemessen worden ist.

Die Geschwindigkeit in einem bestimmten Intervall nennt man auch die **mittlere Geschwindigkeit**. Man kann sie mit folgender Formel berechnen:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Verkehrssünders in den Intervallen $[0; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 5]$, $[5; 6]$, $[6; 8{,}5]$ und $[8{,}5; 10]$.

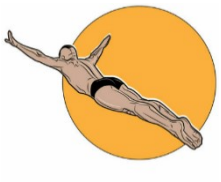
Im Weg-Zeit-Diagramm sind die zurückgelegten Wege des Verkehrssünders und eines zweiten Fahrers in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

c) Vergleichen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten beider Fahrer im gesamten dargestellten Zeitraum $[0; 10]$.

d) Nach 7 Minuten Fahrt wurde der Verkehrssünder durch den mobilen Blitzer erfasst.
Erklären Sie Ihr Vorgehen bei der Ermittlung der Geschwindigkeit des Verkehrssünders genau zum Zeitpunkt $t = 7$.

e) Der Verkehrssünder argumentiert in einem Antwortschreiben an die Polizei: „Ich habe $8{,}3\ \text{km}$ in 10 Minuten zurückgelegt. Das entspricht $50\,\frac{km}{h}$ und damit habe ich die Geschwindigkeit nicht überschritten.“
Nehmen Sie begründet Stellung zu dieser Argumentation.

Beispiel 2: Klippenspringen[6]



Ein Klippenspringer steht in einer Höhe von 28 m auf einer Klippe und springt, ähnlich wie beim Turmspringen, ins Wasser.

Die Höhe h des Springers in Abhängigkeit von der Zeit t ist im Koordinatensystem dargestellt.

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit des Springers in der ersten Sekunde.

   Lesen Sie die dazu benötigten Werte aus dem Graphen ab.

b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Springers beim Eintauchen ins Wasser.

   Erklären Sie Ihr Vorgehen.

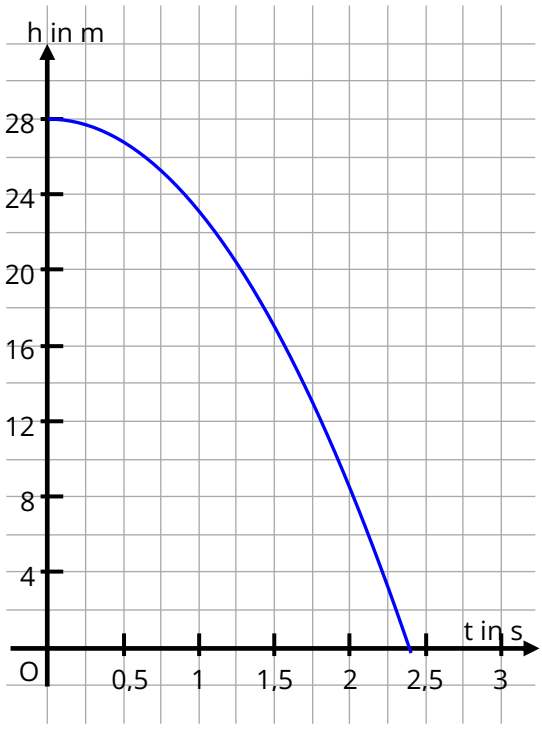


Abb.: Graph $h(t)$

[6] Abb: https://publicdomainvectors.org/de/kostenlose-vektorgrafiken/Cliff-Taucher/86137.html, CC-0

Lösungen zu Material 6: Mittlere und lokale Änderungsraten

zu Beispiel 1: Polizeimeldung

a) Fahrer 1 war in den Zeitspannen von 0 bis 2 Sekunden und 8,5 bis 10 Sekunden langsamer und in der Zeitspanne von 6 bis 8,5 Sekunden schneller als $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Das lässt sich am Anstieg erkennen. Verläuft ein Abschnitt flacher, fährt das Fahrzeug langsamer.

Das Fahrzeug stand in den Zeitintervallen $[2;3]$ und $[5;6]$ still. Der Anstieg des Graphen ist dort Null.

Die Geschwindigkeitsübertretung muss im Intervall $[6;8{,}5]$ gemessen worden sein.

b) $[0;2]$: $v = \frac{1{,}3\ km}{2\ min} = 0{,}65\ \frac{km}{min} = 39\ \frac{km}{h}$

$[2;3]$: $v = 0$

$[3;5]$: $v = \frac{1{,}7\ km}{2\ min} = 0{,}85\ \frac{km}{min} = 51\ \frac{km}{h}$

$[5;6]$: $v = 0$

$[6;8{,}5]$: $v = \frac{4{,}3\ km}{2{,}5\ min} = 1{,}72\ \frac{km}{min} = 103{,}2\ \frac{km}{h}$

$[8{,}5;10]$: $v = \frac{1\ km}{1{,}5\ min} = 0{,}67\ \frac{km}{min} = 40\ \frac{km}{h}$

c) Beide Fahrer haben in 10 Minuten eine Strecke von $8{,}3\ km$ zurückgelegt.
Für beide gilt $v = \frac{8{,}3\ km}{10\ min} = 0{,}83\,\frac{km}{min} \approx 50\,\frac{km}{h}$.

Der Unterschied besteht darin, dass Fahrer 2 tatsächlich die ganze Zeit eine konstante Geschwindigkeit von $50\,\frac{km}{h}$ fuhr und der Verkehrssünder mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten unterwegs war.

d) $t = 7s$ liegt im Intervall $[6;8{,}5]\ s$. Auf diesem Abschnitt hatte er die konstante Geschwindigkeit $v = 103{,}2\,\frac{km}{h}$, also auch zum Zeitpunkt $t = 7s$.

e) Der Verkehrssünder argumentiert hier mit der Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Fahrzeit von 10 Minuten. Die Radarkontrolle fand zum Zeitpunkt $t = 7s$ statt.
Ganz konkret zu diesem Zeitpunkt fuhr der Verkehrssünder mehr als $100\,\frac{km}{h}$.
Seine Verteidigung kann also nicht akzeptiert werden.

zu Beispiel 2: Klippenspringen

a) $v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{23\ m - 28\ m}{1\ s} = -5\ \frac{m}{s} = -18{,}6\ \frac{km}{h}$

Bei einer Bewegung entgegen der positiven Richtung der y-Achse hat die Geschwindigkeit ein negatives Vorzeichen. Wird hier von den Schülerinnen und Schülern kein Vorzeichen angegeben, so ist das tolerierbar.

b) Es wird eine Sekante an den Graphen gezeichnet, um den Anstieg näherungsweise zu ermitteln,

z. B. durch die Punkte $(2{,}4|0)$ und $(2|8)$. → $v = m = \frac{0-8\ m}{2{,}4\ s - 2\ s} = -20\ \frac{m}{s} = -72\ \frac{km}{h}$

oder durch $(2{,}4|0)$ und $(1{,}4|17)$ → $v \approx -17\ \frac{m}{s} \approx -61\ \frac{km}{h}$.

Material 7: Näherungsweise Bestimmung von Funktionsanstiegen (händisch)

Bevor die nachfolgenden Aufgaben (siehe Kopiervorlagen, nachfolgende Seiten) gestellt werden, sollte der Zusammenhang zwischen dem Anstieg einer Funktion in einem Punkt und dem der Tangente in diesem Punkt im Unterrichtsgespräch oder auf einem geeigneten anderen Weg erarbeitet werden.

Der Einstieg über die manuelle Konstruktion von Tangenten wird dann das notwendige Grundverständnis über Sinn und Zweck von Ableitungsfunktionen herstellen.

Auch wenn die ermittelten Punkte des Graphen von $m(x)$ in Aufgabe 1 ungenau sein und nicht exakt auf einer Geraden liegen werden bzw. in Aufgabe 2 nicht exakt auf einer Parabel liegen, so zeigen sie doch anschaulich, dass aus ihnen eine neue Zuordnung (Ableitungsfunktion $m(x)$) entsteht, die einen Bezug zur ursprünglichen Funktion hat. Diese Zuordnung $m(x)$ zeigt die Anstiege der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

Die Aufgaben sollten, nachdem sie bearbeitet worden sind, intensiv ausgewertet werden. Nicht alle Schülerinnen und Schüler werden die folgenden Zusammenhänge selbstständig entdecken und begründen können:

- $m(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton fallend.
- $m(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton steigend.
- $f(x)$ hat bei x_E einen Extrempunkt $\Longrightarrow m(x_E) = 0$.

Aufgabe 1 lässt sich im anschließenden Unterrichtsgespräch auch um einige Aspekte erweitern, z. B. durch die Frage nach der Funktionsgleichung von $m(x)$.

In der Auswertung kann auch nach einem Zusammenhang zwischen den Erkenntnissen aus Aufgabe 1 und Aufgabe 2 gefragt werden. Eventuell lässt sich bereits die Vermutung anstellen, dass der Grad der Anstiegsfunktion (Ableitungsfunktion) um 1 kleiner ist als der der ursprünglichen Funktion.

Im Vergleich der Ergebnisse der Aufgaben 1 und 2 lässt sich erkennen, dass $m(x) = 0$ zwar notwendig für das Vorliegen eines Extrempunktes von $f(x)$ ist, sich als Kriterium aber als nicht ausreichend erweist.

Die Ableitungsfunktion graphisch zu ermitteln ist sehr umständlich und ungenau – reichlich Motivation, nach einem genaueren und effektiveren Verfahren zu suchen.

Die nachfolgenden zwei Seiten sind Kopiervorlagen mit Aufgaben zu dieser Thematik.

Näherungsweise graphische Ermittlung von Funktionsanstiegen

Aufgabe 1

In Bild 1 ist der Graph der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ dargestellt.

- Ermitteln Sie näherungsweise durch Einzeichnen von Tangenten die Anstiege $m(x)$ des Graphen an den in der Wertetabelle vorgegebenen Stellen x.
- Tragen Sie diese Werte in die Tabelle ein.
- Zeichnen Sie den Graphen der Zuordnung $y = m(x)$ in das Koordinatensystem ein.
- Formulieren Sie Zusammenhänge zwischen dem Verlauf der Graphen von $y = f(x)$ und $y = m(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
m(x)							

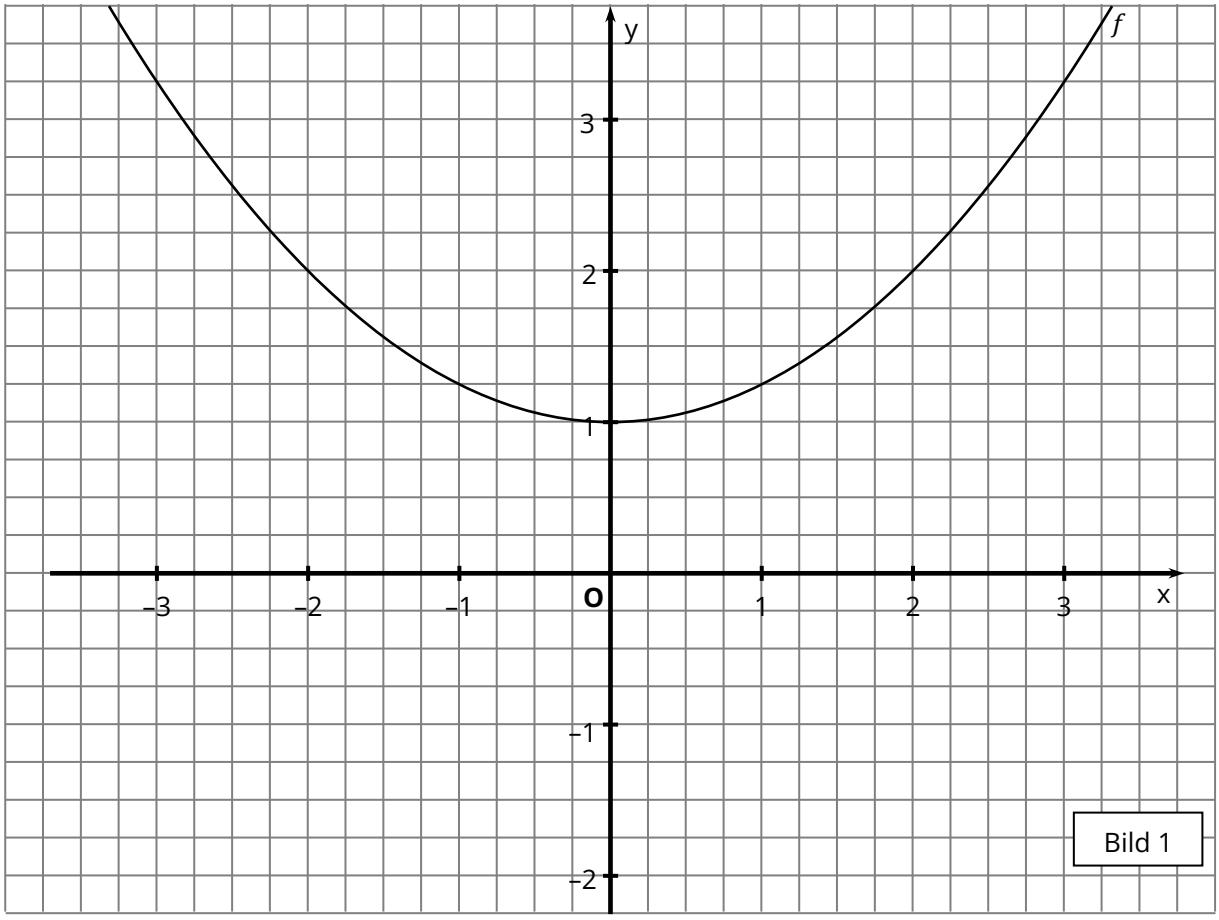


Bild 1

Aufgabe 2

Gegeben ist der Graph der Funktion $y = \frac{1}{6}x^3$ (Bild 2).

- Zeichnen Sie näherungsweise an verschiedenen Stellen x mindestens sieben Tangenten ein und bestimmen Sie mittels Steigungsdreieck deren Anstieg.
  (Tipp: Symmetrie des Graphen nutzen.)
- Ordnen Sie den ausgewählten Stellen x die jeweilige Maßzahl des Anstieges als Funktionswert zu und tragen Sie die so entstehenden Punkte in ein Koordinatensystem ein.
  Verbinden Sie diese Punkte.
- Vermuten Sie, zu welcher Funktionsklasse der dadurch entstehende Graph gehören könnte.
  Stellen Sie eine mögliche Funktionsgleichung auf.

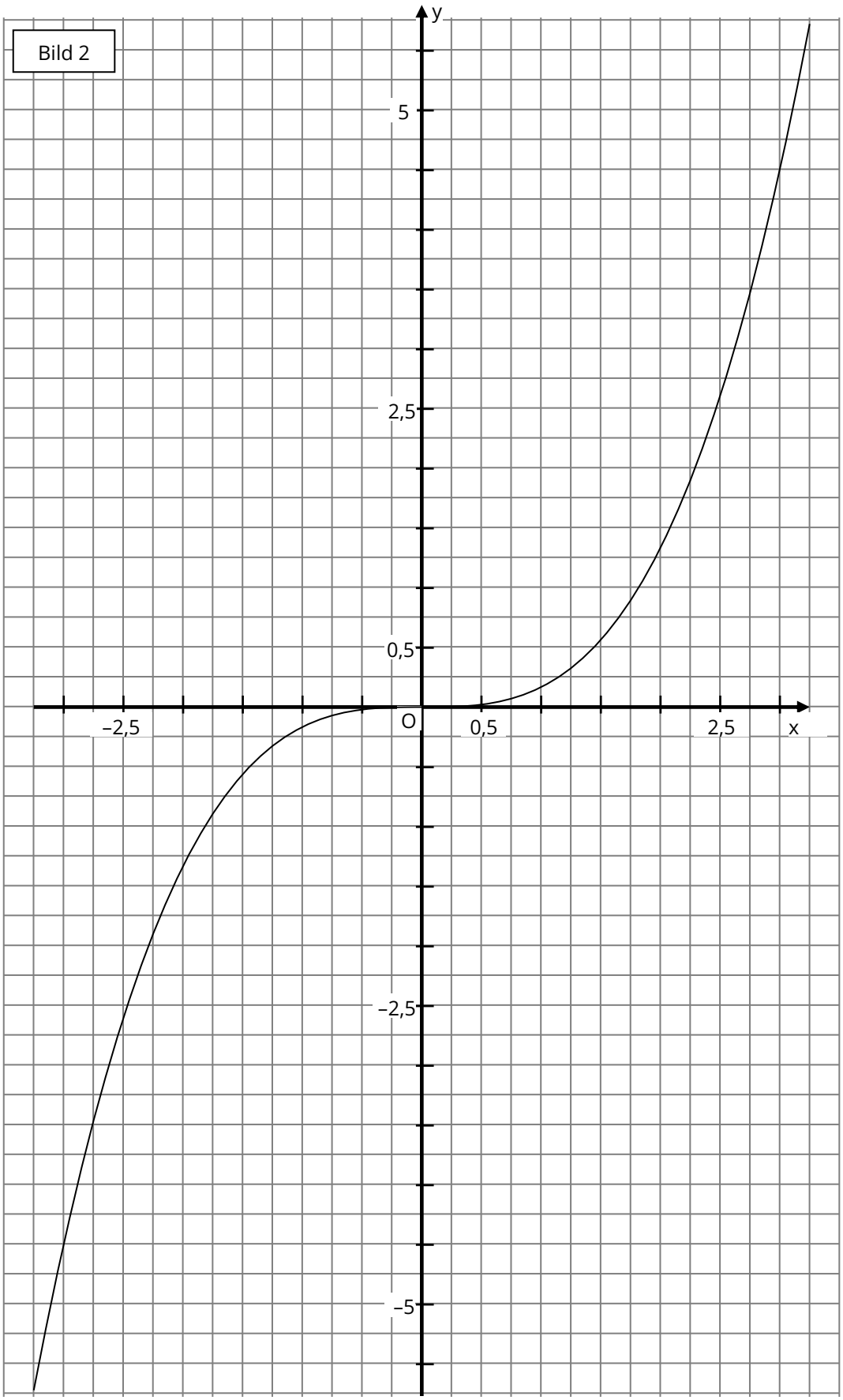
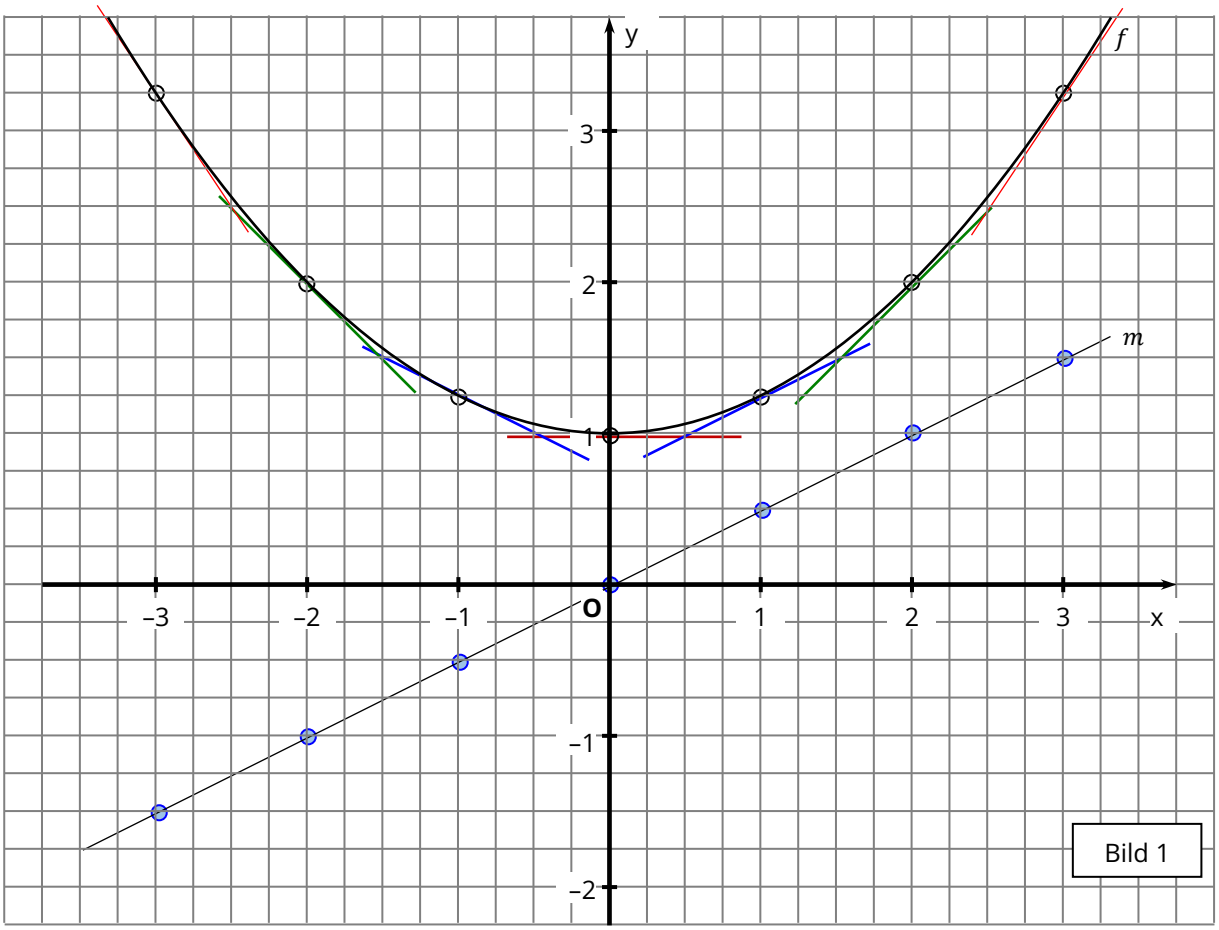


Bild 2
y
5
2,5
0,5
–2,5
O
0,5
2,5
x
–2,5
–5

Lösungen zu Material 7: Näherungsweise Bestimmung von Funktionsanstiegen

zu 1.) $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$m(x)$	**–1,5**	**–1**	**–0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**



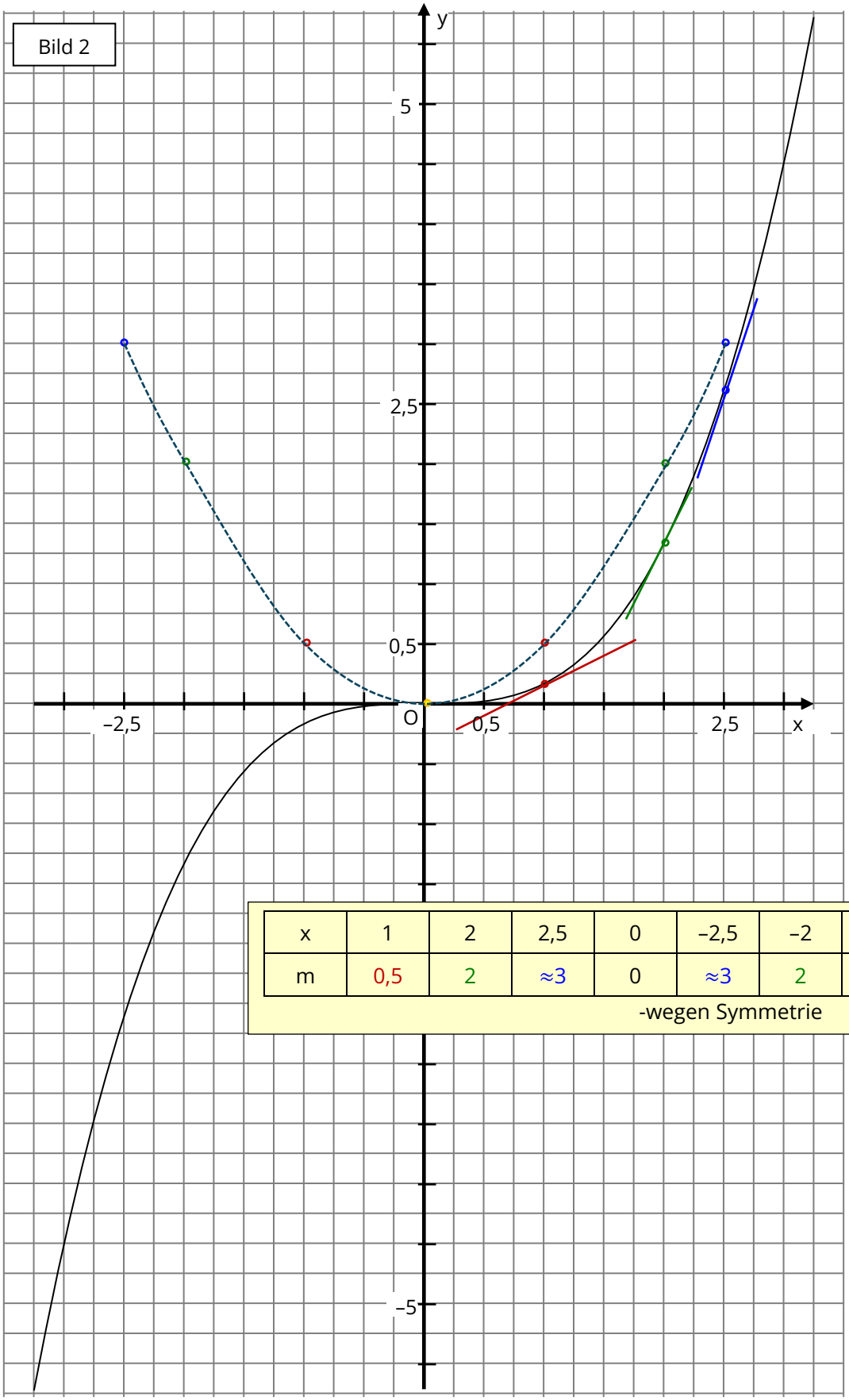
Die Funktionswerte von $m(x)$ sind dort negativ, wo der Anstieg der Funktion f negativ ist.

Die Funktionswerte von $m(x)$ sind dort positiv, wo der Anstieg der Funktion f positiv ist.

Dort, wo $m(x)$ eine Nullstelle besitzt, hat $f(x)$ seinen Scheitelpunkt.

Wie man leicht sieht, kann $m(x)$ mit der Gleichung $y = 0{,}5x$ beschrieben werden.

zu 2.)



x	1	2	2,5	0	–2,5	–2	–1
m	0,5	2	≈3	0	≈3	2	0,5

-wegen Symmetrie

Der Graph der Funktion m aus den Anstiegen von f ist („vermutlich“) eine Parabel, also der Graph einer quadratischen Funktion ($y = \frac{1}{2} \cdot x^2$).

Material 8: Zusammenhang zwischen Tangenten- und Sekantenanstieg

Nach Bearbeitung der Aufgaben aus dem Material 7 ergibt sich das Motiv, nach einem exakteren Vorgehen zu suchen. In der Auswertung dieser Aufgaben sollte im Unterrichtsgespräch die dort vorgegebene Vorgehensweise kritisch in Bezug auf die Exaktheit und Effektivität eingeschätzt werden.

„Sekante statt Tangente“, die neue Lösungsstrategie, kann schon im Unterrichtsgespräch oder durch andere geeignete Materialien vorbereitet werden, ist aber auch im folgenden Arbeitsmaterial (siehe Anlage „Arbeitsblatt - Gesucht wird: Der Anstieg“) kurz dargestellt.

Je nachdem, welche Kompetenzstufe die Schülerinnen und Schüler erreicht haben, können diese die nachfolgenden Aufgaben selbstständig oder mit leichter Unterstützung bearbeiten. Empfehlenswert ist ein kurzes Unterrichtsgespräch, bevor die Tabelle zu dem gegebenen Beispiel bearbeitet wird.

Anschließend sollte eine Auswertung und Zusammenfassung erfolgen. Die Idee, Tangenten durch Sekanten mit minimalem Abstand der Schnittpunkte zu ersetzen, wird dann im Material 9 weiterverfolgt.

Gegebenenfalls kann sich der Unterricht nach demselben Prinzip noch mit einem weiteren Beispiel (z. B. $f(x) = 0{,}5x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$) befassen.

Die Lösungen für das nachfolgende Arbeitsblatt „Gesucht wird: – Der Anstieg“ lauten:

$$m_s = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Beispiel:

$$f(x) = 0{,}25 \cdot x^2 + 1 \;;\; x_0 = 1 \,;\, f(x_0) = 1{,}25$$

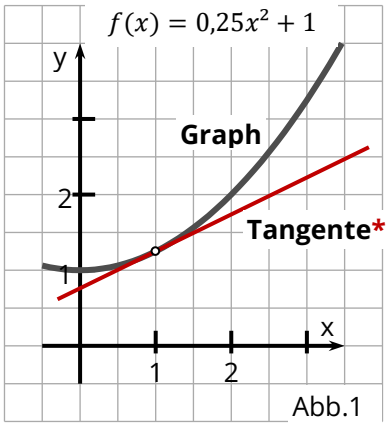
h	$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$	m_S
2,0	$1 + 2{,}0 = 3{,}0$	$0{,}25 \cdot 3{,}0^2 + 1 = 3{,}25$	$\frac{3{,}25 - 1{,}25}{2{,}0} = 1$
1,5	$1 + 1{,}5 = 2{,}5$	$0{,}25 \cdot 2{,}5^2 + 1 = 2{,}5625$	$\frac{2{,}5625 - 1{,}25}{1{,}5} = 0{,}875$
1,0	$1 + 1{,}0 = 2{,}0$	$0{,}25 \cdot 2{,}0^2 + 1 = 2{,}0$	$\frac{2{,}0 - 1{,}25}{1{,}0} = 0{,}75$
0,5	$1 + 0{,}5 = 1{,}5$	$0{,}25 \cdot 1{,}5^2 + 1 = 1{,}5625$	$\frac{1{,}5625 - 1{,}25}{0{,}5} = 0{,}625$
0,2	1,2	1,36	0,55
0,1	1,1	1,3025	0,525
0,05	1,05	1,27625	0,5125
0,01	1,01	1,2755025	0,5025
0,001	1,001	1,25050025	0,50025

Mittels Steigungsdreieck lässt sich der Anstieg der Tangente in Abb.1 mit $m_t = 0{,}5$ bestimmen.
Wie man leicht sieht, nähern sich die Werte der Sekantenanstiege mit abnehmender Schrittweite h dem Anstieg der Tangente.

Es gilt $m_t = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Arbeitsblatt Gesucht wird – Der Anstieg

einer Funktion an einer Stelle (z. B. $x_0 = 1$)



*Diese Tangente wurde konstruktiv bestimmt.

Die Idee: Der Anstieg der Funktion an der Stelle x_0 entspricht dem Anstieg der Tangente an der gesuchten Stelle x_0.

Das Problem: Wie erfahre ich den Tangentenanstieg m_t?

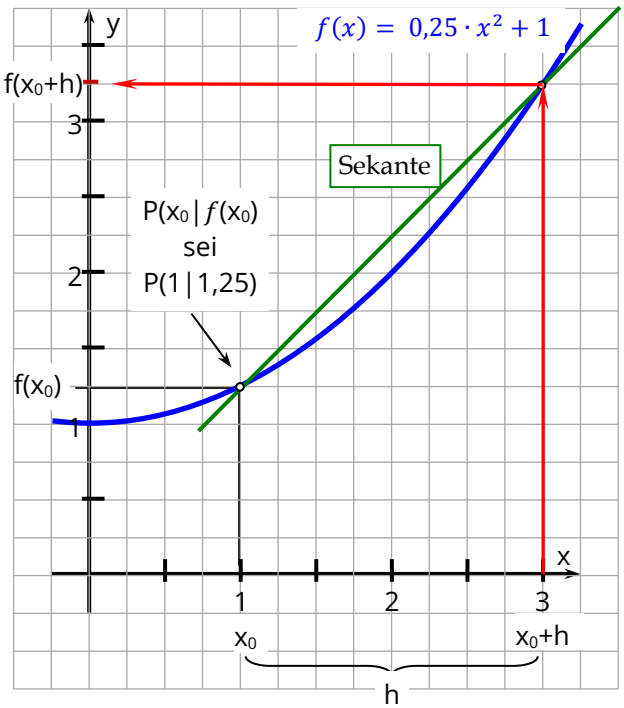
Antwort:

Abb.: Publicdomainvectors.org, CC0

Neue Idee: Wir versuchen eine Näherungslösung mithilfe einer Sekante zu finden. Diese soll durch unseren Punkt P(x_0 | f(x_0)) und einen zweiten Punkt verlaufen, der ein „Stückchen" (= h) weiter weg ist.

Für eine Gerade im Koordinatensystem gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$.

Für unsere Sekante gilt also: $m_s = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$ = _____ .



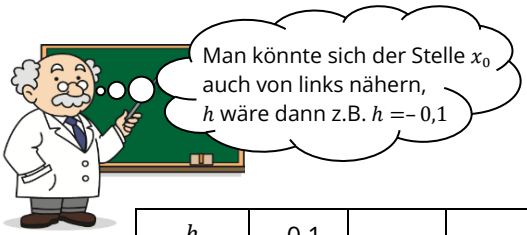
Beispiel:

Bestimmen Sie für die verschiedenen Schrittweiten h die gesuchten Größen und berechnen Sie jeweils m_s.

$f(x) = 0{,}25x^2 + 1$;

$x_0 = 1$; $f(x_0) = f(1) = 1{,}25$

h	$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$	m_S
2,0	1+2,0=3,0	3,25	$\frac{3{,}25-1{,}25}{2}=1$
1,5	2,5		
1,0			
0,5			
0,2			
0,1			
0,05			
0,01			



h	–0,1			
$x_0 + h$		0,99		
m_S				

Ermitteln Sie mit Steigungsdreieck den Anstieg m_T der Tangente in Abb. 1.

Vergleichen Sie Ihre in der Tabelle errechneten Werte von m_s mit dem Tangentenanstieg m_T der gezeichneten Tangente.

Formulieren Sie eine Erkenntnis.

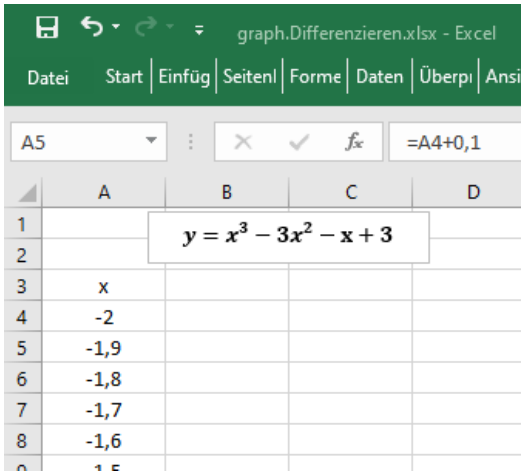
Material 9: Änderungsfunktion (Ableitungsfunktion) näherungsweise mittels Tabellenkalkulation bestimmen

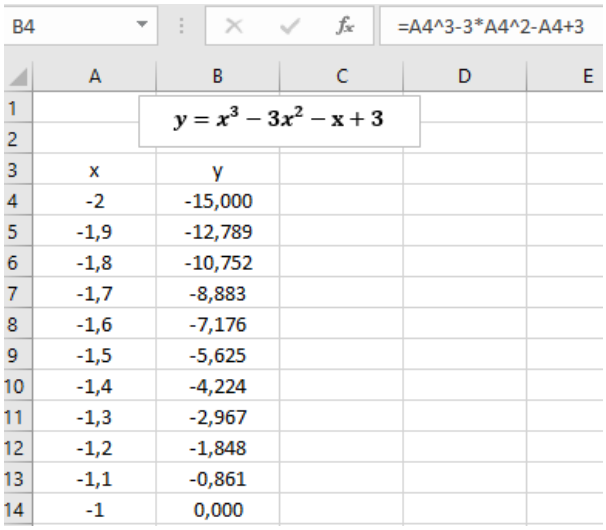
Wird ein Tabellenkalkulationsprogramm (z. B. *MS Excel*, *Numbers* oder *OpenOffice-CALC*) genutzt, lässt sich, auch mit geringen Vorkenntnissen, der Ansatz aus den händischen Aufgaben in Material 7 fortsetzen. Die Idee aus Material 8 aufgreifend, werden die näherungsweise in Handarbeit konstruierten Tangenten nun durch Sekanten ersetzt, deren Anstieg durch Bildung des Differenzenquotienten mit elementaren mathematischen Kenntnissen berechnet werden kann. Um den Rechenaufwand zu verringern, wird diese Aufgabe dem PC übertragen.
Die Excel-Datei (o. ä.) wird schrittweise erstellt.
Es ist notwendig, in dieser Lernphase digitale Hilfsmittel zu nutzen.

Vorbereitung: Wahl einer geeigneten ganzrationalen Funktion und des zu betrachtenden Intervalls durch die Lehrkraft

1. Schritt: Festlegung des Intervalls und der Schrittweite

Im nebenstehenden Beispiel wurde das Intervall $-2 \leq x \leq 4$ gewählt. Die Schrittweite soll $h = 0{,}1$ sein. Dementsprechend werden die zur weiteren Arbeit benötigten Argumente dadurch bereitgestellt, dass ausgehend vom Startwert $x = -2$ in jeder weiteren Zeile 0,1 hinzuaddiert werden. Mittels „Kopieren – Einfügen“ ist eine große Zahl von Argumenten sofort verfügbar.





x	y
-2	-15,000
-1,9	-12,789
-1,8	-10,752
-1,7	-8,883
-1,6	-7,176
-1,5	-5,625
-1,4	-4,224
-1,3	-2,967
-1,2	-1,848
-1,1	-0,861
-1	0,000

2. Schritt: Berechnung der Funktionswerte

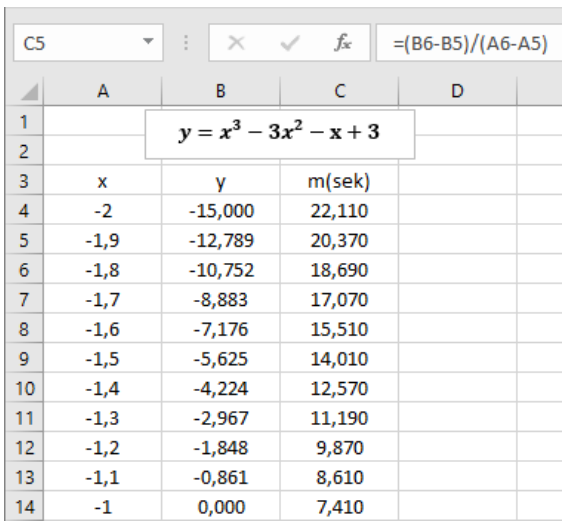
Einmalig wird, entsprechend der Funktionsgleichung, die Formel zur Berechnung der Funktionswerte aus den vorhandenen Argumenten in der Nachbarzelle zum Startwert eingegeben. Unter Nutzung von „Kopieren – Einfügen“ stehen alle benötigten Werte schnell zur Verfügung.

3. Schritt: Berechnung der Sekantenanstiege

Auch im letzten Rechenschritt genügt es, die Formel für den Differenzenquotienten einmal in der Zeile des Startwertes einzugeben:

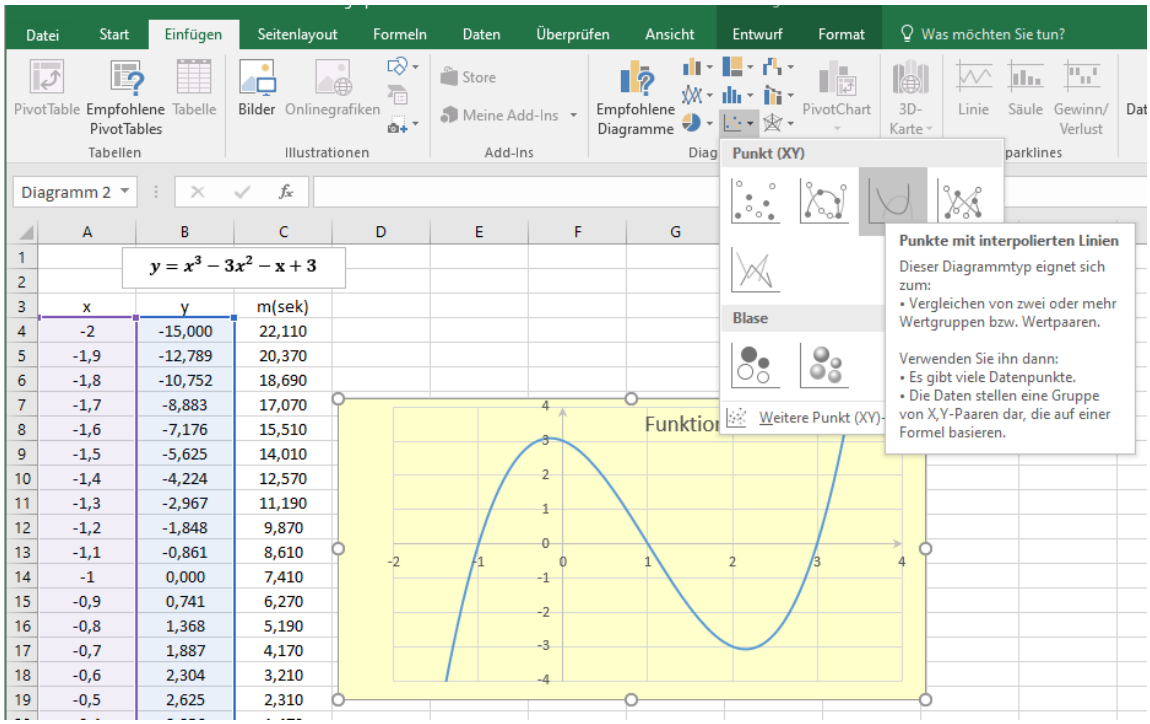
- (2. Funktionswert minus 1. Funktionswert) dividiert durch (2. Argument minus 1. Argument),
- Formel kopieren, in nachfolgenden Zellen der Spalte einfügen.

Mit diesen Werten entsteht eine Wertetabelle für eine Funktion, die näherungsweise der 1. Ableitungsfunktion entspricht.



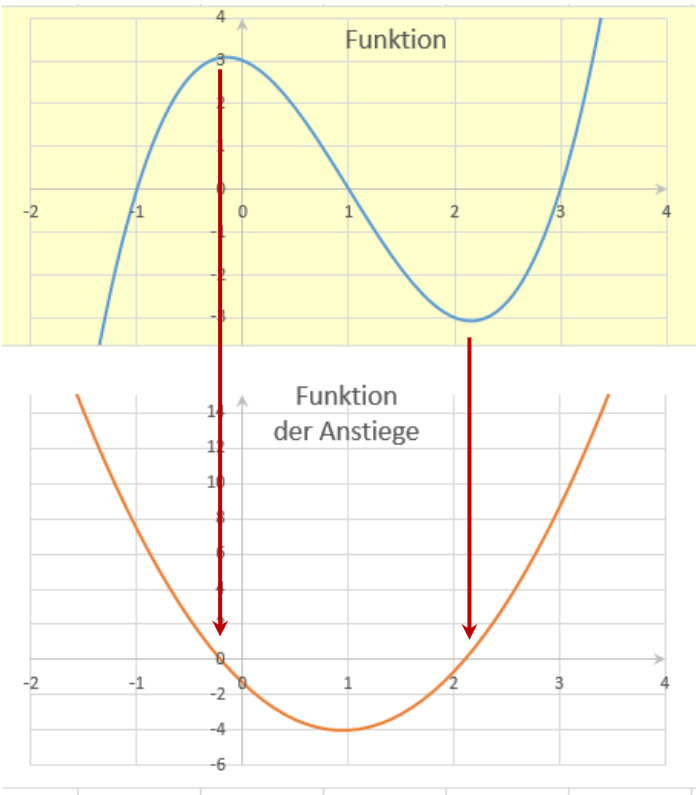
x	y	m(sek)
-2	-15,000	22,110
-1,9	-12,789	20,370
-1,8	-10,752	18,690
-1,7	-8,883	17,070
-1,6	-7,176	15,510
-1,5	-5,625	14,010
-1,4	-4,224	12,570
-1,3	-2,967	11,190
-1,2	-1,848	9,870
-1,1	-0,861	8,610
-1	0,000	7,410

4. Schritt: Darstellung der Graphen der Funktion und ihrer näherungsweisen 1. Ableitungsfunktion



Der Graph der Funktion wird über den Diagramm-Assistenten dargestellt:

- alle Argumente und Funktionswerte markieren, im Menü „Einfügen“ anwählen, Diagramm „Punkt (XY)“,
  → „Punkte mit interpolierten Linien“
- Diagramm-Achsen sinnvoll formatieren: Achse anwählen (rechte Maustaste), dann linke Maustaste, im Menü „Achse formatieren“ wählen, entsprechende Einstellungen vornehmen



Die graphische Darstellung der 1. Ableitungsfunktion erfolgt analog: Argumente markieren, Strg -Taste, Anstiege markieren, Diagramm erstellen und formatieren.

Die so entstehenden graphischen Darstellungen lassen sich später im Unterricht für weiterführende Betrachtungen verwenden. Beziehungen zwischen dem Verlauf des Funktionsgraphen und dem Verlauf der 1. Ableitungsfunktion können daran erörtert werden.

Um einen zielgerichteten Einsatz der Tabellenkalkulation mit einem hohen Anteil an selbstständiger Tätigkeit in diesem Themengebiet zu ermöglichen, ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler bereits in Vorjahren mit der entsprechenden Software vertraut zu machen.

Nach einem Einführungsbeispiel und dessen Auswertung können die Schülerinnen und Schüler selbstständig weitere analoge Aufgaben bearbeiten, die sich auch mit weiteren Fragestellungen zum Funktionsverlauf verknüpfen lassen.

Material 10: Graphenpuzzle (Funktionsgraph und Graph der Ableitungsfunktion einander zuordnen)

Das folgende Material sollte erst am Ende der Unterrichtseinheit „Ganzrationale Funktionen“ eingesetzt werden. Die Schülerinnen und Schüler haben bis dahin erfahren, dass es zu jedem Funktionsgraphen einen zugehörigen Graphen gibt, der die Anstiege der Funktion an jeder Stelle x darstellt. Aus dem Verlauf der ursprünglichen Funktion folgt zwangsläufig der Verlauf der Ableitungsfunktion (Änderungsfunktion). Der Zusammenhang zwischen beiden Verläufen könnte vor dem Einsatz des Materials im Unterrichtsgespräch an einem geeigneten Beispiel erarbeitet werden. Geeignete Beispiele entstehen z. B. durch Einsatz einer Tabellenkalkulation (wie in **Material 9** beschrieben).

Die erfolgreiche Lösung der folgenden Aufgabe setzt ein gutes Verständnis der Grundidee der Differentialrechnung voraus.

Um die prozessbezogenen Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“ [K1[7]] und „Mathematisch kommunizieren“ [K6] zu fördern, empfiehlt es sich, die Schülerinnen und Schüler in Gruppen arbeiten zu lassen.

Bei korrekter Zuordnung der Graphen ergibt sich das Lösungswort NESTOR.

Ist die Puzzleaufgabe beendet, lassen sich anhand der Lösungen Zusammenhänge veranschaulichen oder entdecken.

Beispiele:

Der Graph der Funktion in Abb. 5 ist im Intervall $-1 \leq x \leq 2$ monoton fallend.
$\rightarrow$ Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion sind in diesem Intervall negativ.

oder: Der Graph der Funktion hat in Abb. 4 an der Stelle $x = 1$ einen Tiefpunkt.
$\rightarrow$ Die Ableitungsfunktion hat bei $x = 1$ eine Nullstelle.

Mithilfe der übriggebliebenen drei Puzzleteile kann die Aufgabenstellung erweitert werden. Diese Aufgabenerweiterung lässt sich zur Binnendifferenzierung nutzen.

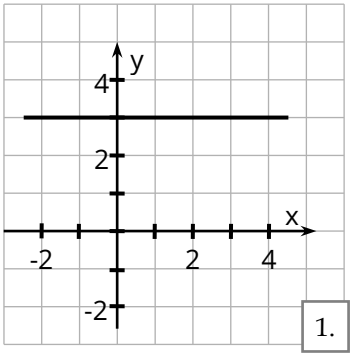
Die folgenden zwei Seiten sind als Kopiervorlage gedacht, die dritte Seite enthält die Lösungen.

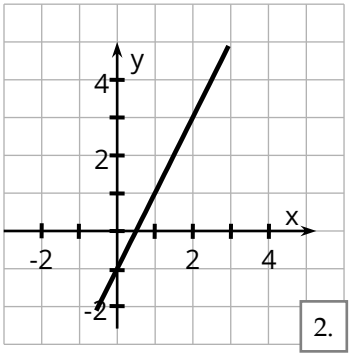
[7] vgl: RLP 1–10, Teil C, Mathematik, S.21

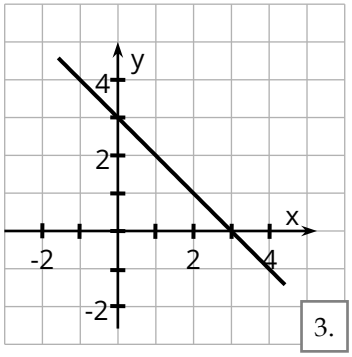
Graphenpuzzle – Erstes Arbeitsblatt

Ordnen Sie den vorgegebenen Schaubildern der sechs Funktionen jeweils das passende Schaubild einer **Ableitungsfunktion** (auch: **Änderungsfunktion** oder **Anstiegsfunktion**) zu.
(Siehe zweites Arbeitsblatt.)

Funktionsgraphen

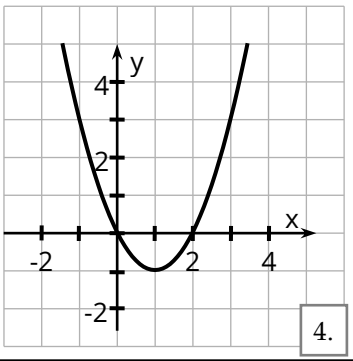


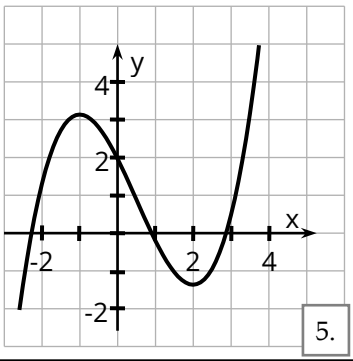


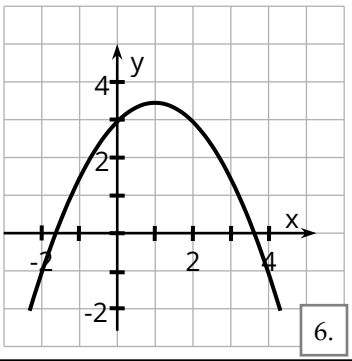


Ableitungsfunktionen

Funktionsgraphen







Ableitungsfunktionen

Zweites Arbeitsblatt zum Graphenpuzzle

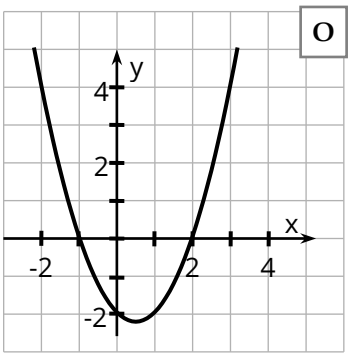
Die folgenden Abbildungen zeigen mögliche Graphen von Ableitungsfunktionen.

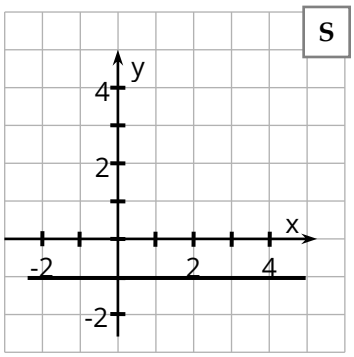
- Schneiden Sie die Abbildungen aus.
- Ordnen Sie diese den Schaubildern auf dem Arbeitsblatt „Graphenpuzzle“ richtig zu.
  Es ergibt sich ein weises Lösungswort.

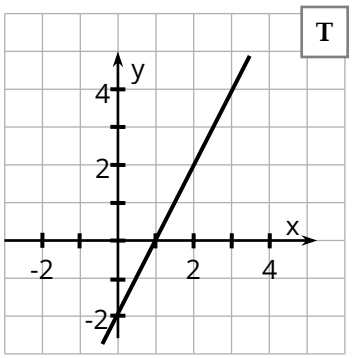
*) Es bleiben drei Abbildungen übrig.
Jede zeigt die Ableitungsfunktion (Änderungsfunktion) einer unbekannten Funktion f.

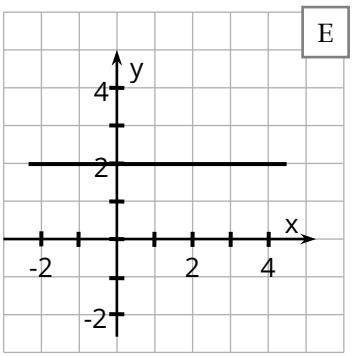
- Kleben Sie die übriggebliebenen Abbildungen auf ein (leeres) kariertes Blatt.
- Skizzieren Sie zu jeder einen möglichen zugehörigen Funktionsgraphen f.

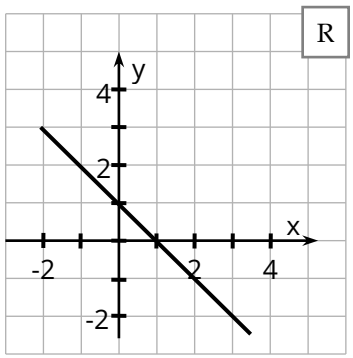
✂

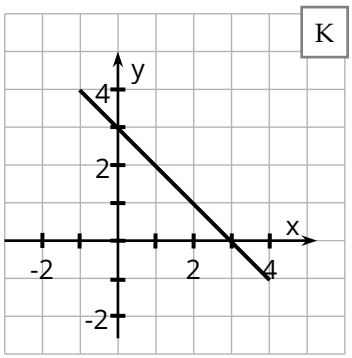


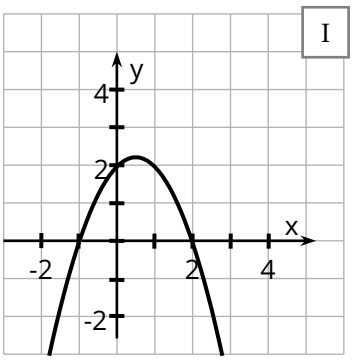


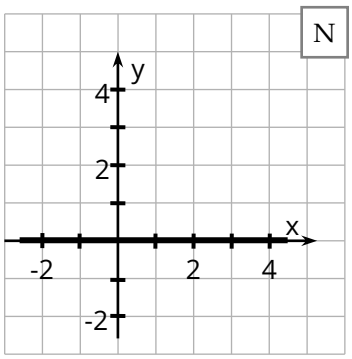


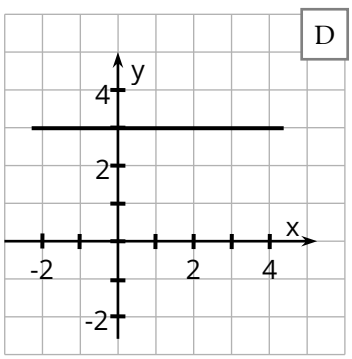






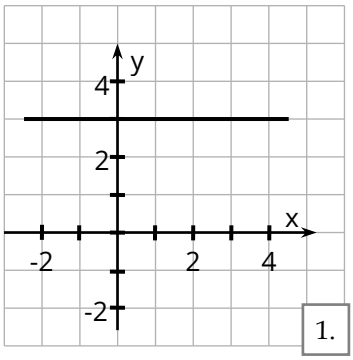


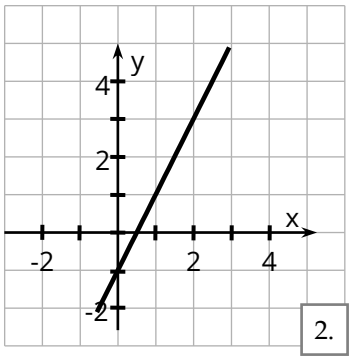


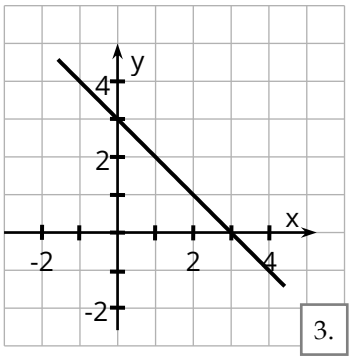


Lösungen zum Graphenpuzzle

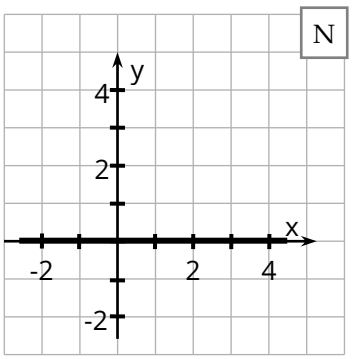
Funktionsgraphen

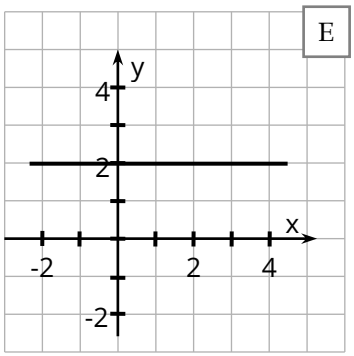


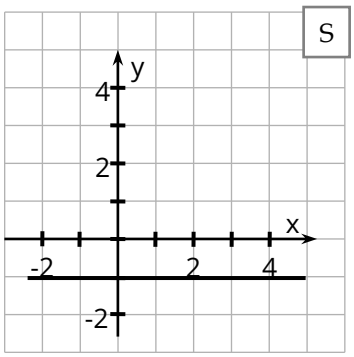




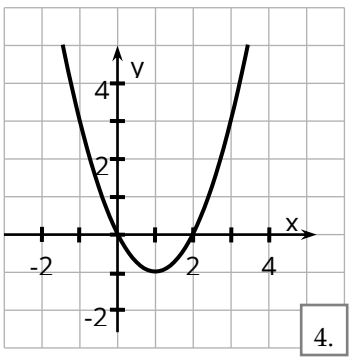
Ableitungsfunktionen

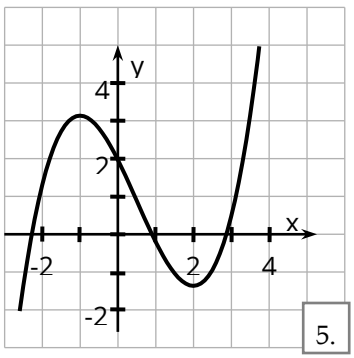


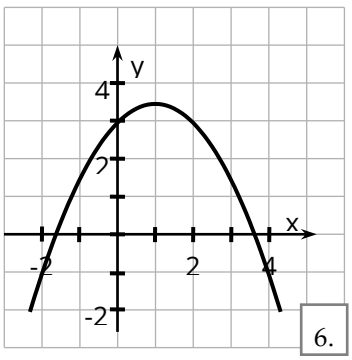




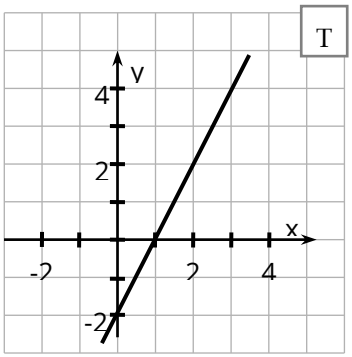
Funktionsgraphen

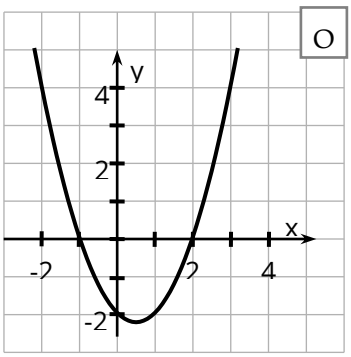


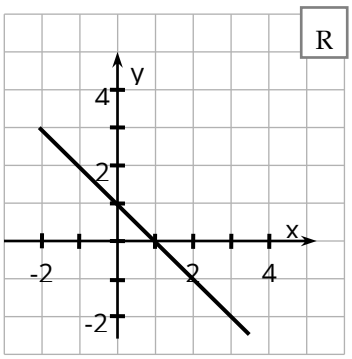




Ableitungsfunktionen

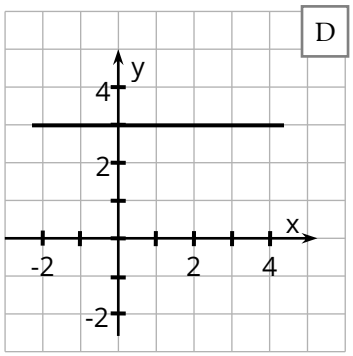


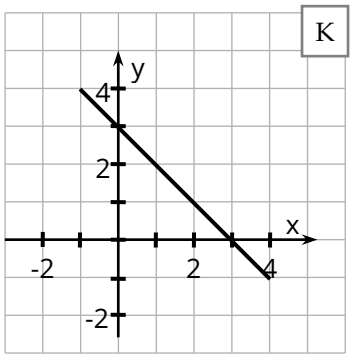


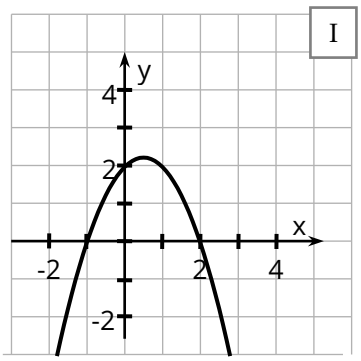


Lösung zu *)

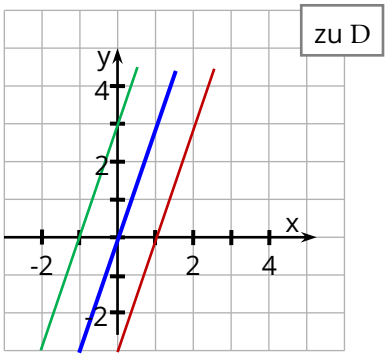
Übrig bleiben folgende Abbildungen:



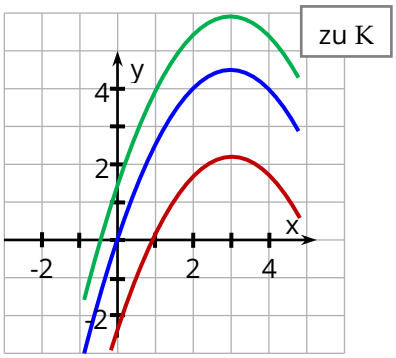




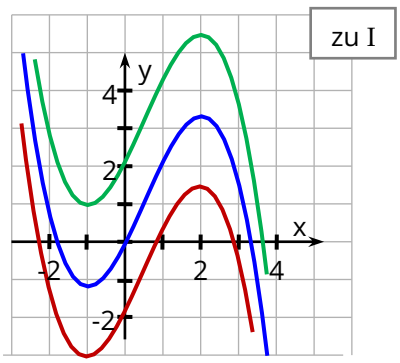
Wenn diese Abbildungen Ableitungsfunktionen sind, dann könnten folgende Graphen eine zugehörige Funktion sein:



- jede lineare Funktion mit dem Anstieg $m = 3$



- eine Funktion, die im Bereich $x < 3$ steigt und für $x > 3$ fällt



- eine Funktion, die im Bereich $x < -1$ fällt, für $-1 < x < 2$ steigt und für $x > 2$ wieder fällt

Material 11: Gewinnfunktionen (Deutung des Verlaufes von Funktionen und Ableitungsfunktionen in realistischen Sachzusammenhängen)

Ziel des Materials ist es, Schülerinnen und Schülern einen realen Sachzusammenhang aufzuzeigen, in dem die Analyse von Funktionsverläufen eine Bedeutung hat. Es soll deutlich werden, dass die Analysis kein realitätsferner Bestandteil der Schulmathematik ist, sondern Grundlage vieler Modellierungen in diversen Wissenschaftsbereichen.

Neben der Optimierung von Verpackungen spielen ganzrationale Funktionen in einfachen ökonomischen Modellen eine Rolle. Das *Ertragsgesetz von TURGOT* gehört zum Grundwissen der Wirtschaftswissenschaften. Es ist auch bekannt als *Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs* und wurde vom französischen Ökonomen Anne Robert Jacques Turgot im 18. Jahrhundert formuliert. Es beschreibt die Beziehung zwischen dem Einsatz eines Produktionsfaktors und dem resultierenden Output, wenn alle anderen Faktoren konstant bleiben.

Das Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs besagt, dass bei zunehmendem Einsatz eines Produktionsfaktors (z. B. Arbeit) der Ertrag zunächst überproportional steigt, aber nach einem bestimmten Punkt nur noch unterproportional zunimmt und schließlich sogar abnimmt. Dies bedeutet, dass der Grenzertrag (der zusätzliche Ertrag durch die Verwendung einer zusätzlichen Einheit des Faktors) abnimmt, sobald der Faktor über einen bestimmten Punkt hinaus eingesetzt wird.[8] Ein Beispiel aus der Landwirtschaft: Wenn ein Landwirt mehr Dünger auf einem Feld ausbringt, steigt der Ertrag zunächst stark an, aber nach einer bestimmten Menge führt zusätzlicher Einsatz nur noch zu geringen Ertragssteigerungen und kann schließlich sogar den Gesamtertrag verringern.

Das Ertragsgesetz von Turgot lässt sich durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades modellieren. Die Daten für diese Modellierung werden in der Regel empirisch gewonnen. Die Kostenfunktion aufzustellen ist für einen Laien nicht einfach und wird deshalb auch nicht Unterrichtsgegenstand sein. Im Schulunterricht ist es jedoch durchaus möglich, aus einer vorgegebenen Kostenfunktion eine Gewinnfunktion (Gewinn = Einnahmen minus Kosten) aufzustellen, den Funktionsgraphen und dessen Ableitungsfunktion zu betrachten und damit einfache wirtschaftliche Fragestellungen zu beantworten.

Im nachfolgenden Arbeitsblatt wird die Modellierung kurz erläutert, Kostenfunktion und Gewinnfunktion sind vorgegeben, Graphen der Gewinnfunktion und deren Ableitungsfunktion sind dargestellt.

Zur Bearbeitung der Aufgaben a – e müssen die Schaubilder genutzt und interpretiert werden. Es ist möglich, das Thema zu erweitern und unter Nutzung von *CAS*-Rechnern oder eines PC selbstständig Gewinnfunktionen darstellen und interpretieren zu lassen (Aufgaben f und Zusatzaufgabe).

Hier bietet sich auch die Möglichkeit, fächerverbindend mit den Fächern Wirtschaft-Arbeit-Technik oder Politische Bildung zusammen zu arbeiten.

---

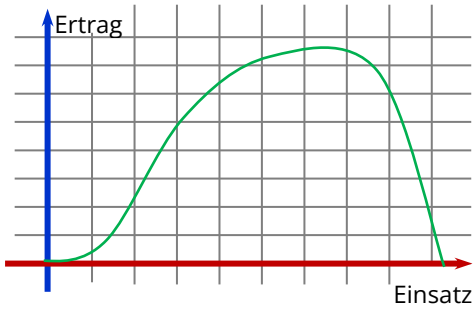
[8] Vgl.: https://wirtschaftsvision.de/ertragsgesetz-was-ist-das-ertragsgesetz/ und https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/ertragsgesetz-34979

Arbeitsblatt Gewinnfunktionen

Abb.: A. R. J. Turgot[9]

Im 18. Jahrhundert formulierte der französische Staatsmann A.R. Jaques Turgot ein nach ihm benanntes Gesetz.
Es besagt:

„Der vermehrte Einsatz eines Produktionsfaktors, bei konstant bleibenden übrigen Faktoren, führt:
- *zunächst zu steigenden,*
- *dann zu sinkenden*
- *und schließlich zu negativen Erträgen.“*



In der rechten Graphik wird dieses Gesetz bildlich dargestellt.

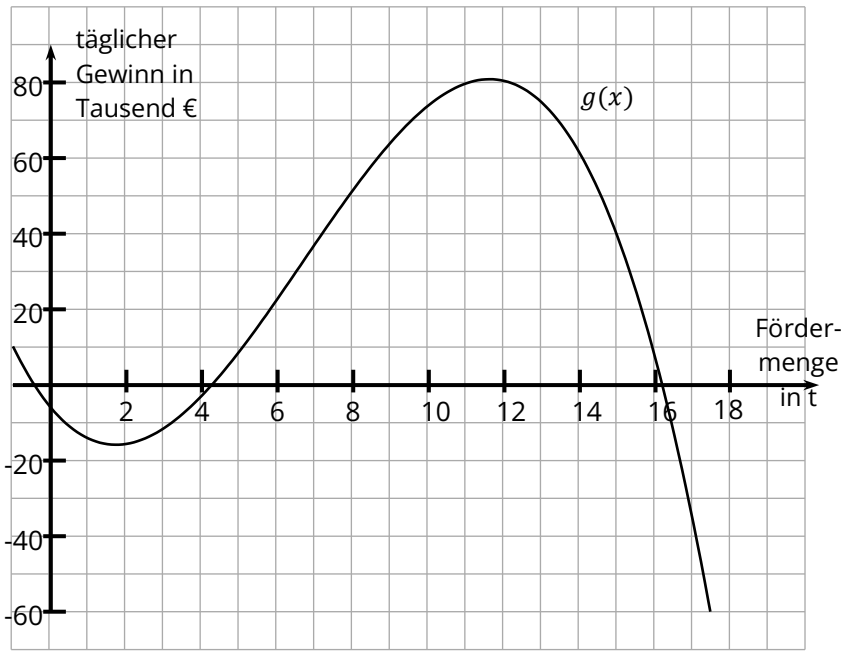
Wirtschaftswissenschaftlerinnen und Wirtschaftswissenschaftler sind bemüht, ökonomische Vorgänge mathematisch zu beschreiben, um Voraussagen treffen zu können. Ganzrationale Funktionen dritten Grades gelten als geeignet, die wesentlichen Aussagen von Turgot abzubilden.

Beispiel

Ein Bergbaubetrieb fördert ein bestimmtes Mineral. Dieses wird zurzeit auf dem Weltmarkt mit 10 Tausend € pro Tonne gehandelt.
Bei vollem Einsatz aller im Förderschacht nutzbaren Maschinen und Arbeitskräfte beträgt die Kapazitätsgrenze der Anlage 18 t pro Tag.
Die bei der Förderung täglich anfallenden Kosten k lassen sich durch die folgende Gleichung berechnen: $\boldsymbol{k(x) = 0,2x^3 - 4x^2 + 22x + 6}$, mit x = tägliche Fördermenge in Tonnen,
$y = k(x)$ = Kosten (in Tausend Euro)

Die Einnahmen e errechnen sich bei einem Preis von 10 Tausend € /Tonne durch: $\boldsymbol{e(x) = 10x}$.
Somit ergibt sich für den Tagesgewinn g: $g(x) = e(x) - k(x)$
$\boldsymbol{g(x) = -0,2x^3 + 4x^2 - 12x - 6}$

Das folgende Schaubild stellt diesen Zusammenhang graphisch dar.

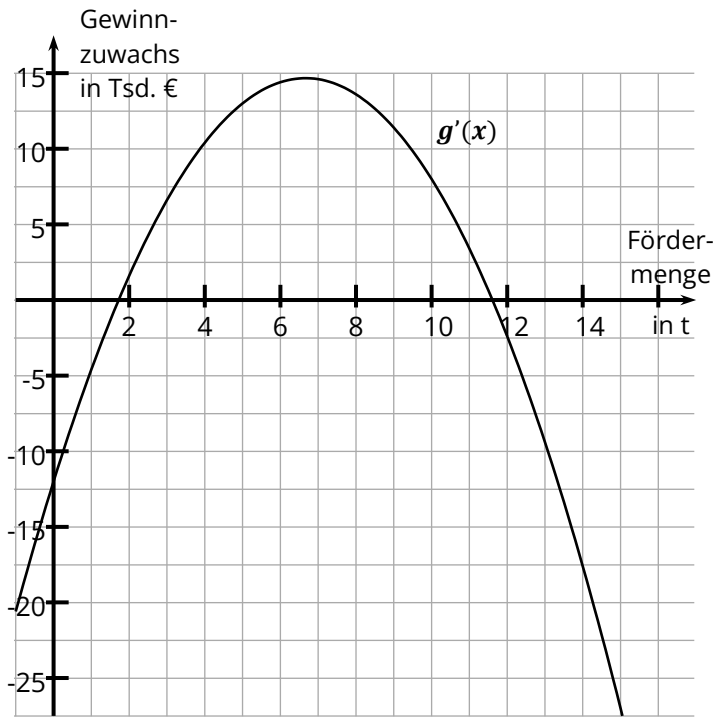


[9] https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Anne_Robert_Jacques_Turgot?uselang=de#/media/File:TurgotDucreux.jpg, CC0

Mit jeder zusätzlich geförderten Tonne ändert sich der Gewinn. Auch die Änderung des Gewinns kann durch eine Funktion beschrieben werden.

Das ist die Ableitungsfunktion $g'(x)$ der Gewinnfunktion $g(x)$.
Deren Graph ist nebenstehend abgebildet.

[Die Gleichung für $g'(x)$ lautet:
$g'(x) = -0{,}6x^2 + 8x - 12$.]



Aufgaben:

Nutzen Sie zur Beantwortung der Fragen die Graphen von g und g'.

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Die Förderanlage kann eine Tagesförderung von 0 bis 18t erbringen.
Geben Sie an, in welchem Bereich Verluste auftreten.

b) Geben Sie an, was für diese Anlage ungefähr die optimale Fördermenge ist.

c) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn der Anlage.

d) Geben Sie an, in welchem Bereich sich eine Erhöhung der Fördermenge besonders stark auswirkt.

e) Beschreiben Sie, wie man die optimale Fördermenge bzw. den maximalen Gewinn berechnen kann, wenn die Gleichung der Ableitungsfunktion bekannt ist.

Weitere Aufgaben, die digitale mathematische Werkzeuge benötigen

f) Angenommen, der Weltmarktpreis fällt auf 3 Tausend € pro Tonne.

Die Kostenfunktion bleibt unverändert.

- Stellen Sie die Gewinnfunktion auf und dann graphisch dar.
- Lesen Sie aus dem Graphen ab,
  - unter welchen Bedingungen dann noch Gewinn zu erwirtschaften ist,
  - welche Fördermenge optimal ist.

Zusatzaufgabe

Der mittelständische Betrieb „SCHICK“ stellt Sonnenbrillen her. Mit der Gleichung

$$k(x) = 0{,}000032x^3 - 0{,}008x^2 + 1{,}8x + 100$$

werden die täglichen Kosten (in €) pro Stück beschrieben.
Der Verkaufspreis beträgt 5,00 € pro Stück.

- Stellen Sie die Gewinnfunktion auf und deren Schaubild graphisch dar.
  - Ermitteln Sie, bei welchen Stückzahlen Gewinne erzielt werden.
  - Bestimmen Sie, welche Stückzahl optimal ist und welcher maximale Gewinn erzielt werden kann.

Ein Billiganbieter bringt ähnliche Sonnenbrillen zu einem Preis von 2,00 € in den Handel.
Berater schlagen der Firma „SCHICK“ zwei mögliche Strategien vor:

A – „SCHICK“ wird auch Billiganbieter, d. h. Senkung des Verkaufspreises auf 2,00 € bei gleichzeitiger Senkung der Produktionskosten um 50 € täglich.

B – Wechsel in die Premiumklasse, d. h. Imageverbesserung durch Werbung und Erhöhung des Verkaufspreises auf 8,00 €. Die Werbung würde dann die Produktionskosten täglich um einen festen Betrag von 1000,00 € erhöhen.

- Prüfen Sie durch Darstellung, Vergleich und Interpretation der entsprechenden Graphen der Gewinnfunktionen, welche der beiden Strategien besser ist.

Lösungen zum Arbeitsblatt Gewinnfunktionen

Aus dem Graphen g lässt sich **ablesen**:

zu a) Ein Verlust tritt auf in den Bereichen 0 t bis ≈ 4,3 t und ≈ 16,2 t bis 18 t (Kapazitätsgrenze).

zu b) Die optimale Fördermenge liegt bei ≈ 11,5 t. Hier ist der Gewinn maximal.

zu c) Der maximale Gewinn liegt bei ≈ 80˙000 € pro Tag.

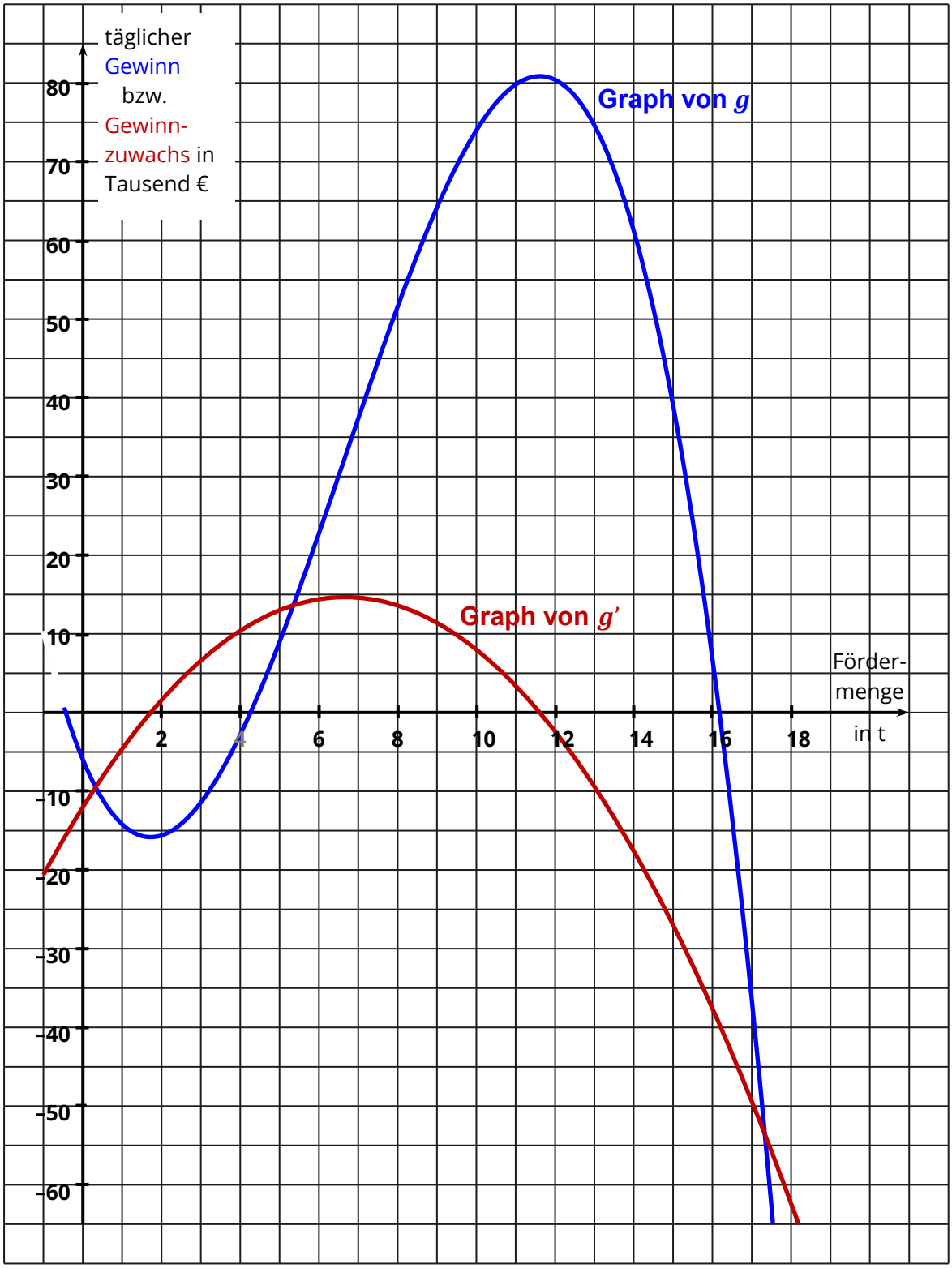
Aus dem Graphen von g' lässt sich **ablesen**:

zu d) Im Bereich von 6 bis 7 t wirkt sich die Erhöhung der Fördermenge besonders stark aus.
Hier ist Gewinnsteigerung maximal, $g'(x)$ hat ein Maximum.

zu e) An den Stellen, an denen $g(x)$ ein Maximum bzw. ein Minimum besitzt, hat $g'(x)$ eine Nullstelle. Dementsprechend kann man durch „Nullsetzen" der Gleichung von $g'(x)$ mögliche optimale Fördermengen (x_E) herausfinden. Durch Einsetzen von x_E in die Gleichung von $g(x)$ lässt sich der maximale Gewinn bzw. maximale Verlust berechnen. Die dazu notwendige Gleichung für $g'(x)$ können Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 10 noch nicht ermitteln, sie ist deshalb auf dem Arbeitsblatt vorgegeben.
Lösung: Die optimale Fördermenge ist 11,61 t, der maximale Gewinn beträgt 80˙861 €.

Um in der Auswertungsphase anschaulich arbeiten zu können, sind auf der nächsten Seite die Graphen von $g$und g' in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt.

Gewinn und Gewinnzuwachs

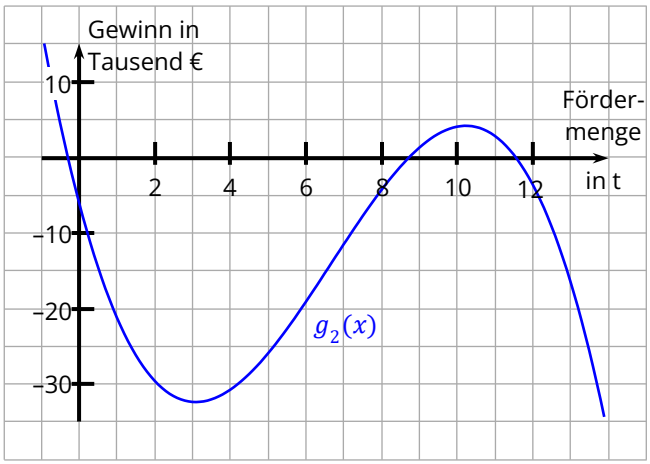


Lösungen zum Arbeitsblatt Gewinnfunktionen – weiterführende Aufgaben

Auch die Lösungen der weiterführenden Aufgaben können die Schülerinnen und Schüler nur näherungsweise bestimmen. Mithilfe entsprechender Medien (z. B. GeoGebra) sollen die Funktionsgraphen dargestellt und passend zu den Fragestellungen Werte abgelesen werden.

zu f) $g_2(x) = -0{,}2x^3 + 4x^2 - 19x - 6$

- Gewinn wird nur im Bereich von ≈ 9 bis ≈ 11,5 t erzielt.
- Optimale Fördermenge liegt bei ≈ 10 t, wobei ≈ 4.000 € Gewinn erzielt würden.

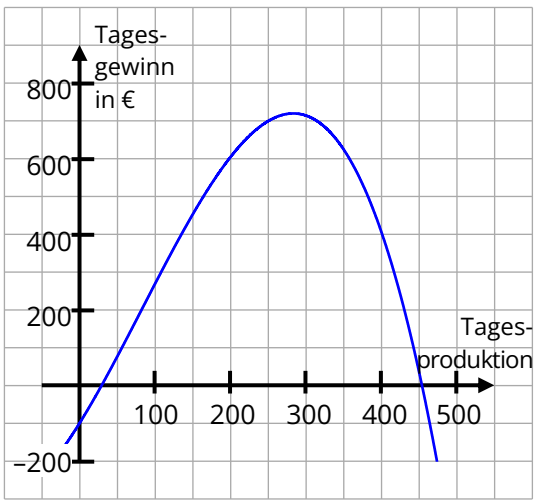


zur Zusatzaufgabe

$g(x) = -0{,}000032x^3 + 0{,}008x^2 + 3{,}2x - 100$

- Gewinn im Bereich von ≈ 30 bis ≈ 450 Stück
- optimal bei ≈ 280 Stück, Maximalgewinn ≈ 720,00 €

Um den Graphen vollständig betrachten zu können, müssen in den verwendeten Medien ggf. die Fenstereinstellungen angepasst werden.
In diesem Falle ist ein entsprechender Hinweis der Lehrkraft hilfreich.



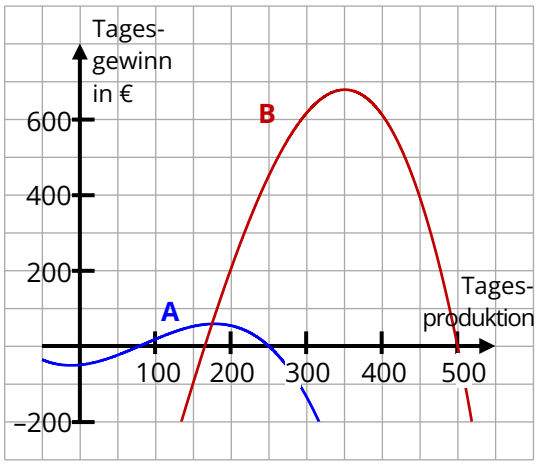
Variante A: $g_A(x) = -0{,}000032x^3 + 0{,}008x^2 + 0{,}2x - 50$

Variante B: $g_B(x) = -0{,}000032x^3 + 0{,}008x^2 + 6{,}2x - 1100$

Vergleich und Interpretation

Variante A ist ungünstig. Trotz Kostenreduzierung verkleinert sich der Gewinnbereich auf 100 bis 250 Stück, bei optimaler Produktion von ca. 180 Stück kann nur noch ein maximaler Tagesgewinn von ca. 60,00 € erzielt werden.

Variante B ist deutlich besser. Wenn, z. B. durch die Werbung, die Kunden die Preiserhöhung akzeptieren, ist bei einer Produktion von ≈ 170 bis 500 Stück ein Gewinn möglich. Dieser könnte bei einer optimalen Stückzahl von ca. 350 Stück bei ca. 680,00 € liegen.



Material 12: Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

Im Material 8 wurde beispielhaft der Anstieg einer Funktion ($y = 0{,}25x^2 + 1$) an einer Stelle ($x_0 = 1$) bestimmt, indem die Entwicklung des Differenzenquotienten für immer kleinere Abstände $h = x - x_0$ betrachtet wurde. Am Ende erfolgte der Hinweis auf den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0}$.

Der Grenzwertbegriff kann unter den Bedingungen des aktuellen Rahmenlehrplanes, sowohl für die Sekundarstufe I als auch für die Sekundarstufe II, nur propädeutisch thematisiert werden. Grenzwerte werden inhaltlich anschaulich als zu bildende oder sich ergebende Zahlen aufgefasst.

Die quantitative Bestimmung des Anstieges einer ganzrationalen Funktion an einer Stelle und das Aufstellen eines Terms für die Ableitungsfunktion gehen über die Forderungen des Rahmenlehrplanes des Landes Brandenburg für die Sekundarstufe I (i. d. F. von 2023)[10] hinaus. Auch die Eingangsvoraussetzungen des Rahmenlehrplanes für die gymnasiale Oberstufe (i. d. F. von 2022) [11] fordern lediglich:

„Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben qualitativ das Änderungsverhalten eines Funktionsgraphen durch eine Skizze des Graphen der Änderungsfunktion und begründen den Verlauf,
- bestimmen charakteristische Punkte (z. B. Achsenschnittpunkte, Hochpunkte, Tiefpunkte, Wendepunkte) aus Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen und deuten sie in Sachzusammenhängen.“

Die Einführungsphase an Gesamtschulen ermöglicht es, sich der Thematik Ganzrationale Funktionen in einem größeren zeitlichen Rahmen zu widmen und die h-Methode schon in Vorbereitung auf die Qualifikationsphase zu nutzen. An Gymnasien steht dafür nur unter sehr günstigen Umständen noch Zeit zur Verfügung. Wenn die Zeit nicht ausreichend ist, dann sollte die h-Methode im Anfangsunterricht des ersten Kurshalbjahres thematisiert werden. In Jahrgangsstufe 10 ist es wichtiger, anschaulich zu arbeiten und Lösungsverfahren für Gleichungen zu üben.
Der Grenzwert des Differenzenquotienten kann für ganzrationale Funktionen durch Termumformungen bestimmt werden, sowohl an einer konkreten Stelle als auch für jede beliebige Stelle x_0. Bevor Schülerinnen und Schüler das selbstständig bewältigen, ist sicher eine Instruktion notwendig. In der Regel werden bestimmte Lernschwierigkeiten auftreten:

- Die Abkürzung x_0 für eine bestimmte Stelle ist für einige Lernende verwirrend, da es zuvor oft die Bezeichnung für Nullstellen war.
- Die notwendigen Termumformungen sind nicht immer geläufig.
- Der Umstand, dass h anfangs akribisch per Termumformung weitestgehend eliminiert wird, um dann am Ende einfach wegzufallen (wegen $h \to 0$) ist für Schülerinnen und Schüler ungewohnt.

[10] RLP 1–10, Teil C, Mathematik, S.61
[11] RLP für die gymnasiale Oberstufe, Teil C, Mathematik, S. 16

Arbeitsblatt Anstiege berechnen

1 Vorüberlegungen

Der Wert $T(x)$ des Terms $T(x) = (x+2)^2$ soll bestimmt werden, indem sich die x-Werte dem Wert $x_0 = 3$ immer weiter nähern. Der jeweilige Abstand zu $x_0 = 3$ sei h.

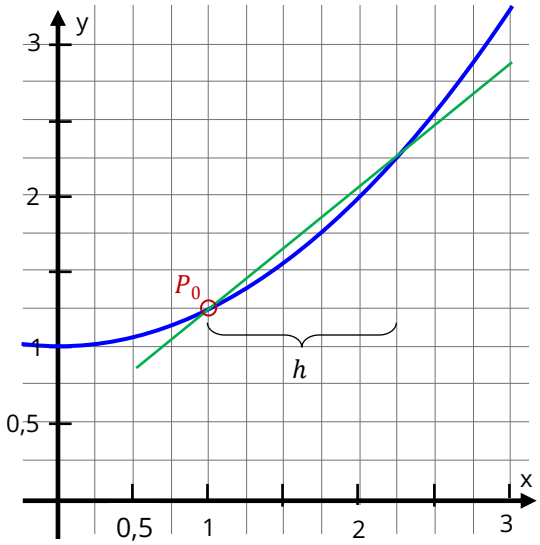
- Berechnen Sie die entsprechenden Termwerte in der Tabelle.

$x_0 + h$	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001
$T(x_0 + h)$	30,25				

$x_0 + h$	3,0001	3,000 01	3,000 001	$3 + 10^{-8}$	$3 + 10^{-10}$
$T(x_0 + h)$					

- Beschreiben Sie die Entwicklung der Termwerte.

2 Den Anstieg durch Termumformung abschätzen



Der Anstieg der Funktion $y = f(x) = 0{,}25x^2 + 1$ soll an der Stelle $x_0 = 1$ bestimmt werden.

Dazu betrachten wir zunächst den Anstieg einer Sekante, die den Graphen der Funktion im Punkt $P_0(x_0|y_0)$ und in einem Punkt $P_1(x_1|y_1)$ schneidet.

Es gilt: $x_1 = x_0 + h$ und $y_1 = f(x_0 + h)$.

Der Anstieg der Sekante ist mit dem Differenzenquotienten berechenbar:

$$m_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}25(x_0+h)^2 + 1 - (0{,}25{x_0}^2 + 1)}{x_0 + h - x_0}$$

Die Klammern werden u. a. mithilfe der binomischen Formel aufgelöst.

$$m_s = \frac{0{,}25({x_0}^2 + 2hx_0 + h^2) + 1 - 0{,}25{x_0}^2 - 1}{h}$$

$$m_s = \frac{0{,}25{x_0}^2 + 0{,}5hx_0 + 0{,}25h^2 - 0{,}25{x_0}^2}{h} = \frac{0{,}5hx_0 + 0{,}25h^2}{h}$$

Im Zähler wird die Variable h ausgeklammert.

$m_s = \frac{h \cdot (0{,}5x_0 + 0{,}25h)}{h}$ → Nun kann die Variable h gekürzt werden. → $m_s = 0{,}5x_0 + 0{,}25h$

Zur Erinnerung:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Unter der Bedingung, dass der Abstand zwischen P_1 und P_0 sehr klein ist, nähert sich der Anstieg m_s der Sekante dem Anstieg m_t der Tangente im Punkt $P_0(x_0|y_0)$ - und somit dem Anstieg des Graphen in diesem Punkt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn h sehr klein ist, so klein, dass der Wert für h gegen Null tendiert. Das wird durch folgende Schreibweise ausgedrückt: $\lim\limits_{h \to 0}$.

Der Sekantenanstieg m_s tendiert gegen einen festen Wert. Dieser Wert wird als Grenzwert bezeichnet.

Für die Funktion $y = f(x) = 0{,}25x^2 + 1$ ist dieser Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0}(0{,}5x_0 + 0{,}25h)$.

Da wir annehmen, dass h fast Null ist, bleibt vom Term $0{,}5x_0 + 0{,}25h$ nur der Bestandteil $0{,}5x_0$ übrig. Das bedeutet, dass für diese Funktion die Anstiege mit $m = 0{,}5x_0$ berechnet werden können. Die Funktion mit der Gleichung $y = 0{,}5x$ heißt 1. Ableitung der Funktion f, symbolische Schreibweise: $f'(x)$. Man schreibt daher $f'(x) = 0{,}5x$.

Die Stelle, an der der Anstieg m bestimmt werden sollte, war $x_0 = 1$.

$$\rightarrow m = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$$

Aufgaben

- Berechnen Sie die Anstiege der Funktion $f(x) = 0{,}25x^2 + 1$ an den Stellen $x_{02} = 2$ und $x_{03} = 0$.
- Prüfen Sie die Anstiege, indem Sie am abgebildeten Graphen an den o. g. Stellen ein Lineal anlegen.

3 Übungen

Hilfebox

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

a) Übertragen Sie den Lösungsweg aus Aufgabe 2 auf die Funktion $y = f(x) = 3x^2 - 2$.

- Bilden Sie den Term für die 1. Ableitung.
- Berechnen Sie die Anstiege an den Stellen $x_0 = 2$, $x_0 = 1$ und $x_0 = 0$.

b) Übertragen Sie diesen Lösungsweg auf die Funktion $y = f(x) = x^2 + 2x$.

- Bilden Sie den Term für die 1. Ableitung.
- Berechnen Sie die Anstiege an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$.

c) Übertragen Sie diesen Lösungsweg auf die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{6}x^3$.

- Bilden Sie den Term für die 1. Ableitung.
- Berechnen Sie die Anstiege an den Stellen $x_0 = 2$, $x_0 = 1$ und $x_0 = 0$.

(Vergleichen Sie die Werte ggf. mit Ihren Lösungen auf dem Arbeitsblatt „Näherungsweise graphische Ermittlung von Funktionsanstiegen“.)

Lösungen zu Material 12 Anstiege berechnen

zu Aufgabe 1

$x_0 + h$	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001
$T(x_0 + h)$	30,25	27,5625	26,01	25,1001	25,010001

$x_0 + h$	3,0001	3,000 01	3,000 001	$3 + 10^{-8}$	$3 + 10^{-10}$
$T(x_0 + h)$	25,00100001	25,0001	25,00001	25,0000001	25,000000001*)

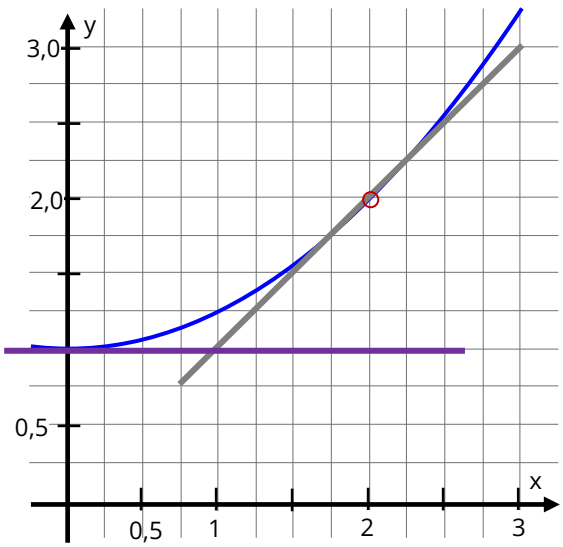
*) Häufig wird hier die Genauigkeit der Taschenrechner-Anzeige erreicht. Viele Taschenrechner zeigen als Ergebnis 25 an. Subtrahiert man aber von diesem angezeigten Ergebnis die Zahl 25, bleibt 0,000 000 001.

Der Termwert wird immer kleiner, nähert sich dem Wert 25.

zu Aufgabe 2

An der Stelle $x_0 = 2$ hat die Funktion den Anstieg $m = 0{,}5 \cdot 2 = 1$.

An der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion den Anstieg $m = 0{,}5 \cdot 0 = 0$.



Das lässt sich auch näherungsweise am Graphen ablesen.

Lösungen zu Aufgabe 3 (Übungen)

a) $m_s = \frac{3(x_0+h)^2-2-(3{x_0}^2-2)}{x_0+h-x_0}$

$m_s = \frac{3{x_0}^2+6x_0h+3h^2-2-3{x_0}^2+2}{h}$

$m_s = \frac{h\cdot(6x_0+3h)}{h} = 6x_0 + 3h$

$\lim\limits_{h\to 0}(6x_0 + 3h) = 6x_0$

Anstieg an der Stelle $x_0 = 2$ ist $m = f'(2) = 12$.

Anstieg an der Stelle $x_0 = 1$ ist $m = f'(1) = 6$.

Anstieg an der Stelle $x_0 = 0$ ist $m = f'(0) = 0$.

b) $m_s = \frac{(x_0+h)^2+2(x_0+h)-({x_0}^2+2x_0)}{x_0+h-x_0}$

$m_s = \frac{{x_0}^2+2x_0h+h^2+2x_0+2h-{x_0}^2-2x_0}{h}$

$m_s = \frac{h\cdot(2x_0+h+2)}{h} = 2x_0 + h + 2$

$\lim\limits_{h\to 0}(2x_0 + h + 2) = 2x_0 + 2$

Anstieg an der Stelle $x_0 = 0$ ist $m = f'(0) = 2$.

Anstieg an der Stelle $x_0 = 1$ ist $m = f'(1) = 4$.

Anstieg an der Stelle $x_0 = -1$ ist $m = f'(-1) = 0$.

c) $m_s = \frac{\frac{1}{6}(x_0 + h)^3 - \frac{1}{6}{x_0}^3}{x_0+h-x_0} = \frac{\frac{1}{6}\left({x_0}^3 + 3{x_0}^2h + 3x_0h^2 + h^3\right) - \frac{1}{6}{x_0}^3}{h}$

$m_s = \frac{\frac{1}{2}{x_0}^2h + \frac{1}{2}x_0h^2 + \frac{1}{6}h^3}{h} = \frac{1}{2}{x_0}^2 + \frac{1}{2}x_0h + \frac{1}{6}h^2$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}{x_0}^2 + \frac{1}{2}x_0h + \frac{1}{6}h^2\right) = \frac{1}{2}{x_0}^2$

Anstieg an der Stelle $x_0 = 2$ ist $m = f'(2) = 2$.

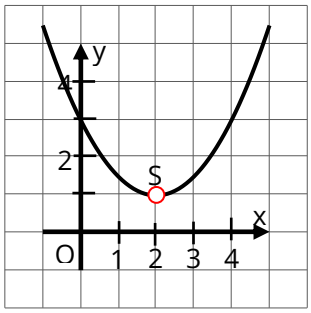
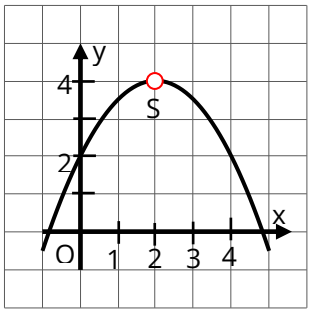
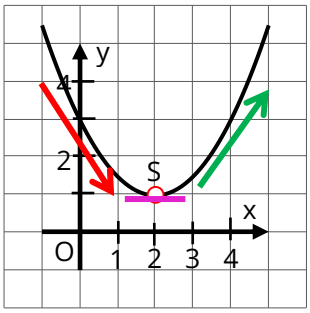
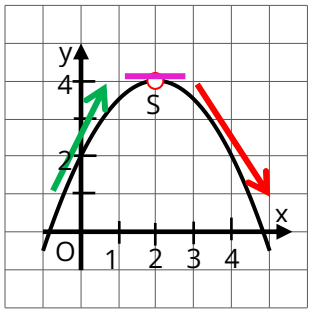
Anstieg an der Stelle $x_0 = 1$ ist $m = f'(1) = 0{,}5$.

Anstieg an der Stelle $x_0 = 0$ ist $m = f'(0) = 0$.

(Stimmt mit den Werten auf dem Arbeitsblatt „Näherungsweise graphische Ermittlung von Funktionsanstiegen“ überein.)

4 Anhang

Sprachspeicher zum Thema Quadratische Funktionen

Argumente, Definitionsbereich	Die x-Werte werden Argumente genannt. Der Definitionsbereich enthält die Zahlen, die ich für x einsetzen darf.
Funktionswerte	Die y-Werte werden auch Funktionswerte genannt. Funktionswerte sind die Werte, die ich berechne, wenn ich Argumente in die Funktionsgleichung einsetze.
Scheitelpunkt	 Der Scheitelpunkt $S(2\|1)$ ist tiefster Punkt des Graphen. oder  Der Scheitelpunkt $S(2\|4)$ ist höchster Punkt des Graphen.
Steigungsverhalten	Ich betrachte und beschreibe den Verlauf einer Funktion von links nach rechts.   Im Scheitelpunkt ändert sich das Steigungsverhalten. - fallend für $x < 2$ - steigend $f$ür $x > 2$ - steigend für $x < 2$ - fallend für $x > 2$ Das Steigungsverhalten wird auch Monotonie genannt.

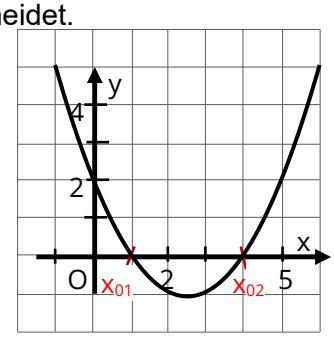
Nullstelle

Nullstellen sind die x-Werte, für die ich den Funktionswert $y = 0$ erhalte.

x	-1	0	1	2	4	5
y	5	2	0	-1	0	2

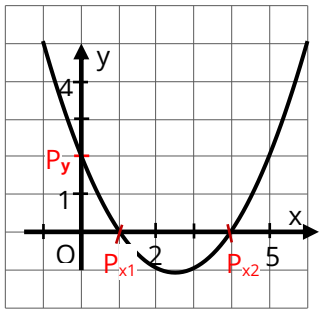
Diese Funktion hat zwei Nullstellen:
$x_{01} = 1; \quad x_{02} = 4$

Die Nullstellen finde ich an den Stellen, wo der Graph die x-Achse schneidet.



Achsenschnitt-punkte

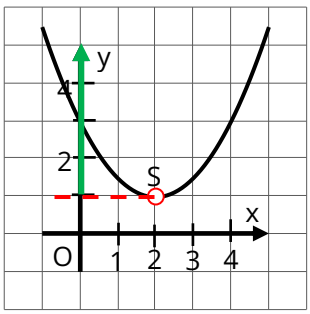
Graphen können die Achsen des Koordinatensystems schneiden.



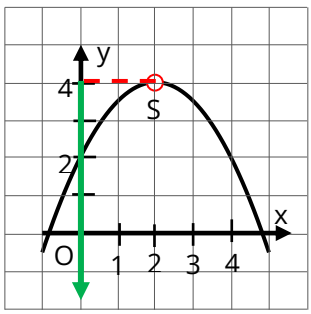
Dieser Graph schneidet die y-Achse im Punkt $P_y(0|2)$.
Er schneidet die x-Achse in den Punkten $P_{x1}(1|0)$ und $P_{x2}(4|0)$.

Wertebereich

Der Wertebereich sagt mir, welche y-Werte möglich sind.



y-Werte gibt es nur oberhalb des Scheitelpunktes
$\rightarrow W = \{y \in R | y \geq 1\}$



y-Werte gibt es nur unterhalb des Scheitelpunktes
$\rightarrow W = \{y \in R | y \leq 4\}$

Abbildungsverzeichnis

Titelbild: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 5 und 6, Nashorngehege 1 und Nashorngehege 2: LIBRA, 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 7, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0, erstellt mit GeoGebra®; https://www.geogebra.org
Seite 7, Ausschnitt aus Excel-Tabelle: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 21, Fünf Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0, erstellt mit GeoGebra®; https://www.geogebra.org
Seite 23, Koordinatensystem: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 25, Zwei Funktionsgraphen, LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 27, Sechs Funktionsgraphen, LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 29, Zwei Funktionsgraphen mit Umgebung, LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 30, Vier Funktionsgraphen, LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 32, Vier Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0, erstellt mit GeoGebra®; https://www.geogebra.org
Seite 33, Vier Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0, erstellt mit GeoGebra®; https://www.geogebra.orgSeite 35, Steigen und Fallen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 35, Fünf Funktionsgraphen, LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 36, Steigen und Fallen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 36, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 37, Vier Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 40, Weg-Zeit-Diagramm: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 41, Symbolbild „Klippenspringer“,
https://publicdomainvectors.org/de/kostenlose-vektorgrafiken/Cliff-Taucher/86137.html, CC0
Seite 41, Funktionsgraph h(t), LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 44, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 45, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 46, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 47, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 49, Funktionsgraph mit Tangente: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 49, Funktionsgraph mit Sekante: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 49, Symbolbild „Glühlampe“: https://publicdomainvectors.org/de/kostenlose-vektorgrafiken/Cartoon-Gl%C3%BChbirne/57312.html, CC0
Seite 49, Symbolbild „Lehrer“: https://publicdomainvectors.org/de/kostenlose-vektorgrafiken/Cartoon-Lehrer/73267.html, CC0
Seite 50, Drei Tabellen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 51, Ausschnitte aus einer Tabellenkalkulation: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 53, Sechs Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 54, Neun Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 55, Zwölf Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 56, Sechs Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 58, Zwei Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 58, A. R. J. Turgot: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Anne_Robert_Jacques_Turgot?uselang=de#/media/File:TurgotDucreux.jpg, CC0
Seite 59, Funktionsgraph: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 62, Zwei Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 63, Drei Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 65, Funktionsgraph mit Sekante: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 67, Funktionsgraph mit Tangenten: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 69, Vier Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0
Seite 70, Vier Funktionsgraphen: LIBRA 2024, CC BY-NC-SA 4.0

libra
Landesinstitut Brandenburg
für Schule und Lehrkräftebildung