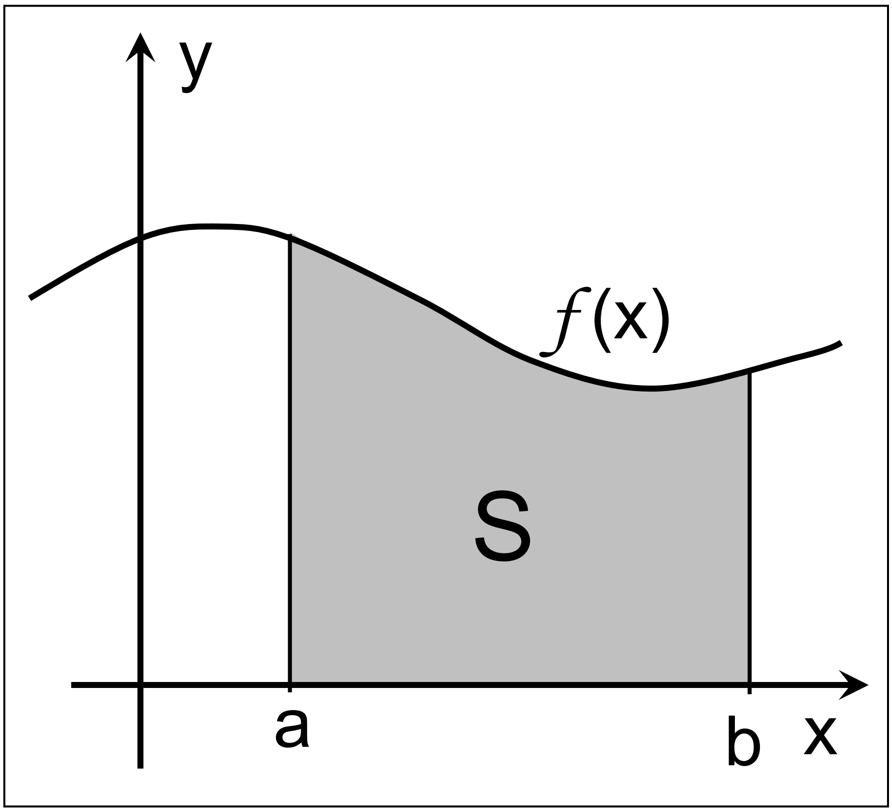
# UNTERRICHTSENTWICKLUNG




# Integralrechnung – Rekonstruktion von Beständen

## Didaktisch-methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung im Fach Mathematik der Sekundarstufe II

Bildungsregion Berlin-Brandenburg

LISUM Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

# Impressum

**Herausgeber:**

Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM)

14974 Ludwigsfelde-Struveshof

Tel.: 03378 209-200
Fax: 03378 209-232

Internet: www.lisum.berlin-brandenburg.de

**Autorinnen und Autoren:**
Viola Adam, Ines Fröhlich, Sabine Jagst, Mike Reblin, Gudrun Riemann

**Redaktion:**
Viola Adam

**Grafiken:**
Viola Adam, Mike Reblin

**Layout:**
Viola Adam, Mike Reblin

**Druck und Herstellung:**
Druckteam Berlin

ISBN 978-3-940987-52-5

**INHALT**

## VORWORT

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

mit der vorliegenden Handreichung zum Thema "Integralrechnung – Rekonstruktion von Beständen" möchten wir Ihnen Anregungen für die kompetenzorientierte Gestaltung des Mathematikunterrichts in den ersten beiden Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe geben.

In den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ (EPA) der KMK sind Anforderungen an die fachlichen und methodischen Kompetenzen formuliert und verbindliche fachliche Inhalte für das Unterrichtsfach Mathematik festgelegt. Diese Anforderungen werden durch die im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg beschriebenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die von den Schülerinnen und Schülern am Ende der gymnasialen Oberstufe im Grund- und Leistungskursfach erwartet werden, konkretisiert. Für die Umsetzung dieser Vorgaben stehen den Lehrkräften, neben dem Schullehrbuch, viele andere Medien zur Verfügung. Aus der Vielfalt der Angebote hat eine Arbeitsgruppe des Landesinstitutes für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM) eine Auswahl getroffen, die den Intentionen des Rahmenlehrplans besonders gut entspricht.

Die didaktischen Kommentare und methodischen Anregungen sollen Ihnen bei der konkreten Planung des Unterrichtes eine Hilfe sein. Wir wünschen Ihnen viel Freude und Erfolg bei der Arbeit damit.

Um die Materialien allen interessierten Lehrkräften zugänglich zu machen, wird diese Handreichung auch auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de veröffentlicht.

Dr. Gisela Beste

Leiterin der Abteilung Unterrichtsentwicklung SekI/II und E-Learning

# 1 Zielsetzung

Die Inkraftsetzung des „Rahmenlehrplanes für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg im Zusammenhang mit der Schulzeitverkürzung machen es notwendig, Veränderungen in der Unterrichtsplanung vorzunehmen und schulinterne Pläne zu überarbeiten bzw. neu zu durchdenken.

Prinzipiell ist der Unterricht kompetenzorientiert und standardbezogen auszurichten. Dabei muss eine strikte Trennung von Grund- und Leistungskurs erfolgen. Bereits die Kultusministerkonferenz (KMK) forderte im Jahre 2002 eine Trennung der Anforderungen im Grund- und Leistungskurs:

“Die Anforderungen des Grundkursfaches sollen sich... qualitativ von denen des Leistungskursfaches unterscheiden ... insbesondere durch: den Grad der Vorstrukturierung, den Schwierigkeitsgrad, den Komplexitätsgrad, die Offenheit der Aufgabenstellung, die Anforderungen an Selbsttätigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben, den Umfang und die Art der bereitgestellten Hilfsmittel und Informationen.“ (KMK 2002)

Der „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg unterscheidet sich im Grund- und Leistungskurs bei Kompetenzen und Inhalten sowie abschlussorientierten Standards. Im Grundkurs steht das anwendungsorientierte Unterrichten mit einfacheren (weniger wissenschaftlichen) Erklärungen im Mittelpunkt. Dies bedeutet nicht, dass der Leistungskurs weniger anwendungsorientiert unterrichtet wird. Vielmehr ist die Art der Herangehensweise und die Tiefe der Vermittlung zu berücksichtigen und zu unterscheiden.

Die Schwerpunkte des Themenbereichs "Analysis" verteilen sich im Grund- und Leistungskurs auf drei der vier Kurshalbjahre der Qualifikationsphase. Die Behandlung der Grundlagen der Integralrechnung erfolgt schwerpunktmäßig im zweiten Kurshalbjahr. Von besonderer Bedeutung sind dabei die vorstellungsorientierte Behandlung von Fachinhalten am Beispiel der Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten in Anwendungssituationen sowie die Verknüpfung von Differential- und Integralrechnung im Hauptsatz. Auf diese beiden Schwerpunkte bezieht sich die vorliegende Handreichung. Neben Hinweisen zur Gestaltung einer schulinternen Planung der Unterrichtseinheit "Integralrechnung" für Grundkurse und Leistungskurse beinhaltet die Handreichung ausgewählte Aufgabenbeispiele sowie didaktisch-methodische Anregungen und Materialien für die Unterrichtsgestaltung im zweiten Kurshalbjahr der Qualifikationsphase. Sie sollen Anregungen für die Arbeit im Themenfeld „Integralrechnung“ geben.

Bei der zeitlichen Planung des zweiten Kurshalbjahres ist neben der Integralrechnung die Behandlung des Themenfeldes "Stochastik" zu berücksichtigen. Bei den Vorschlägen für die schulinterne Planung haben wir bewusst auf eine konkrete Festlegung von Stundenzahlen verzichtet. Für eine erfolgreiche Arbeit im Grund- und Leistungskurs empfehlen wir, dem Themenfeld "Stochastik" ausreichend Zeit einzuräumen.

Da noch nicht alle Schulen mit CAS im Unterricht arbeiten, haben wir uns in dieser Handreichung darauf beschränkt, die Beispielaufgaben ohne den Einsatz eines Computeralgebrasystems zu formulieren.

## 2 Inhaltsbezogene Standards

Dem oben genannten Themenfeld „Integralrechnung“ lassen sich speziell folgende inhaltsbezogene Standards aus den Leitideen „Funktionaler Zusammenhang“, „Approximation“, „Räumliches Strukturieren und Koordinatisieren“, „Messen“ und „Algorithmus“ aus dem Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe in den Ländern Berlin und Brandenburg zuordnen:

Die Schülerinnen und Schüler

*Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“*

- beschreiben die Integration als Umkehroperation zur Differentiation,
- nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zur Bestimmung von bestimmten Integralen,
- berechnen das bestimmte Integral von Potenzfunktionen und linearen Funktionen sowie von abschnittweise definierten Funktionen zur Lösung von Anwendungsproblemen,

*Leitidee „Approximation“*

- beschreiben die Integration als Aufsummierung von lokalen Änderungsraten und führen dies an geeigneten Beispielen auch numerisch durch,
- erläutern den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, indem sie in inner- und außermathematischen Situationen die Aufsummierung von lokalen Änderungsraten als einen Gesamteffekt (Gesamtänderung) interpretieren,

*Leitidee „Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren“*

- modellieren ebene Flächen und Körper durch Randfunktionen,

*Leitidee „Messen“*

- bestimmen Flächeninhalte und Rotationsvolumina (näherungsweise) durch infinitesimale Ausschöpfung und rekonstruieren Bestände durch infinitesimale Summation,

*Leitidee „Algorithmus“*

- bestimmen Lösungen von Gleichungen oder Integrationen mit numerischen Verfahren und begründen deren Funktionsweise.

## 3 Prozessbezogene Standards

Im Laufe der Behandlung eines Themenfeldes sind alle im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg formulierten prozessbezogenen Kompetenzen in einem ausgewogenen Verhältnis zu beachten. Die gezielte Planung prozessbezogener Kompetenzen sollte schwerpunktmäßig und passend zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen erfolgen. Die Auswahl der zu erreichenden prozessbezogenen Standards ergibt sich aus verschiedenen Aspekten, wie z. B.

- den bereits erreichten Niveaustufen der Lerngruppe,
- der Passfähigkeit zur beabsichtigten didaktischen Vorgehensweise und
- der Eignung der prozessbezogenen Kompetenz als Mittel zum Erreichen eines oder mehrerer inhaltsbezogener Standards.

Folgende Standards sind u. a. als Schwerpunkte in dieser Unterrichtseinheit besonders geeignet:

Argumentieren:
- mathematische Situationen erkunden und Vermutungen aufstellen
- Begründungen für mathematische Sachverhalte entwickeln

Problemlösen:
- heuristische Strategien verwenden
- in inner- und außermathematischen Situationen Probleme finden und formulieren

Modellieren:
- reale Situationen strukturieren und vereinfachen
- reale Situationen mit mathematischen Modellen beschreiben
- zu einem mathematischen Modell verschiedene Realsituationen angeben

Symbole, Verfahren und Werkzeuge verwenden:
- komplexe algorithmische Verfahren ausführen, deren Anwendung und Grenzen reflektieren und Ergebnisse überprüfen
- mathematische Verfahren sicher ausführen

Kommunizieren:
- eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Zusammenhänge erläutern
- Überlegungen und Lösungswege dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren unter Nutzung geeigneter Medien

# 4 Grundlage für die schulinterne Planung

In den einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (EPA) sind die Anforderungen an die fachlichen und methodischen Kompetenzen formuliert und verbindliche fachliche Inhalte festgelegt. Diese Anforderungen werden durch die im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg beschriebenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die von den Schülerinnen und Schülern am Ende der gymnasialen Oberstufe im Grund- und Leistungskursfach erwartet werden, konkretisiert.

Die Planung der Themenfelder in den Kurshalbjahren ist grundsätzlich auf den Kompetenzerwerb der Schülerinnen und Schüler und auf die Bewältigung der Anforderungen in den abschlussorientierten Standards auszurichten. Die Realisierung dieser Anforderungen macht ein Planungsinstrument notwendig, welches den Zusammenhang zwischen den zentralen Leitideen, Kompetenzen und Standards deutlich ausweist. Die folgenden Planungsbeispiele orientieren sich an dieser Forderung und sind entsprechend der im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe“ in den Ländern Berlin und Brandenburg beschriebenen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gestaltet.

In den nachfolgenden Tabellen sind wesentliche Inhalte (Tabellenspalte 2) im Hinblick auf die abschlussorientierten Standards dargestellt, an denen die Schülerinnen und Schüler die prozessbezogenen Kompetenzen (Tabellenspalte 1) erwerben können. Raum für schulinterne Festlegungen, Absprachen, Einsatz von Medien, … bietet die 3. Tabellenspalte. Diese kann im Verlauf der Behandlung der Themenfelder konkretisiert und ergänzt werden.

## 4.1 Planung für den Leistungskurs

| **Zentrale Leitidee(n)** [1] **; prozessbezogene Kompetenzen** | **Standardbezug** | **Medien, Sonstiges** |
|---|---|---|
| zentrale Leitidee: *funktionaler Zusammenhang*; „Kommunizieren, argumentieren und modellieren“ | Einführung in die Integralrechnung am Beispiel der Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten in Anwendungssituationen (z. B. Wasserstand, zurückgelegter Weg als Fläche unter der v-t-Kurve, Fahrtenschreiber), als diskrete Modellierung und als anschaulicher Grenzprozess | z. B. Duden/Paetec, Analysis, S.190, Fahrtenschreiber |
| zentrale Leitidee: *Approximation;* „Mathematische Symbole, Werkzeuge und Verfahren verwenden“, „Problemlösen“ | Flächenbestimmung als Grenzprozess einer Ausschöpfung mit infinitesimalen Flächenstücken (z. B. durch Unter- und Obersummen) | Nutzung von Computeralgebra-systemen (CAS) oder Tabellen-kalkulation zur Berechnung von Ober- und Untersummen möglich z. B. s.o., S.193 |
| zentrale Leitideen: *Messen, funktionaler Zusammenhang;* „Mathematische Symbole, Werkzeuge und Verfahren verwenden“ | Stammfunktionen und unbestimmte Integrale von ganzrationalen Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen | |
| zentrale Leitideen: *funktionaler Zusammenhang, Messen* „Kommunizieren“, „Argumentieren“, „Mathematische Symbole, Werkzeuge und Verfahren verwenden“ | bestimmtes Integral, Additivität der Grenzen und Linearität des bestimmten Integrals (anschauliche Begründung und Anwendung) | |

[1] Ein konkreter Bezug zu den einzelnen Aspekten der Leitideen und Kompetenzen ist in den Aufgabenbeispielen beschrieben.

| Zentrale Leitidee(n) [1] ; prozessbezogene Kompetenzen | Standardbezug | Medien, Sonstiges |
|---|---|---|
| zentrale Leitideen: *funktionaler Zusammenhang, Messen*<br>„Problemlösen“, „Argumentieren“ und „Approximieren“ | - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,<br>- geometrisch-anschauliche Begründung des Hauptsatzes,<br>- Plausibilität des Hauptsatzes an kontinuierlichen und diskreten Beispielen (z. B. Kontostand)<br>- Berechnung von Flächen unter Funktionsgraphen (oberhalb, unterhalb der x-Achse) und zwischen Funktionsgraphen,<br>- Bestandsrekonstruktionen in Anwendungskontexten | |
| zentrale Leitidee: *funktionaler Zusammenhang*<br>„Problemlösen“ und „Argumentieren“ | weiterführende Integrationsmethoden:<br>- Integration mittels Substitution,<br>- Integration als Umkehrung der Kettenregel und<br>- partielle Integration als Umkehrung der Produktregel | |

**Ausblick für das 4. Kurshalbjahr im Leistungskurs**

| Zentrale Leitidee(n) [1] ; prozessbezogene Kompetenzen | Standardbezug | Medien, Sonstiges |
|---|---|---|
| zentrale Leitidee: *Approximation*<br>„Problemlösen“ und „Argumentieren“ | - Berechnung von Rotationsvolumina bei Rotation um die Abszissenachse,<br>- Beschränktheit und Unbeschränktheit beim uneigentlichen Integral,<br>- näherungsweise numerische Bestimmung von Integralen (z. B. mit der Trapezmethode) | |

[1] Ein konkreter Bezug zu den einzelnen Aspekten der Leitideen und Kompetenzen ist in den Aufgabenbeispielen beschrieben.

## 4.2 Planung für den Grundkurs

| Zentrale Leitidee(n) [1]; prozessbezogene Kompetenzen | Standardbezug | Medien, Sonstiges |
|---|---|---|
| zentrale Leitideen: *funktionaler Zusammenhang, Approximation*<br>„Symbole, Verfahren und Werkzeuge verwenden", „Argumentieren" und „Modellieren" | **Grundlagen der Integralrechnung**<br>- Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten<br>- Untersuchung vorgegebener oder messtechnisch erfasster Änderungsraten<br>- modellierende Beschäftigung mit den Grundlagen der Integralrechnung<br>- Integration als Aufsummierung von lokalen Änderungsraten beschreiben:<br>· Streifenmethode des Archimedes<br>· Flächeninhaltsfunktion<br>· Stammfunktion; unbestimmtes Integral<br>· Grundintegrale; einfache Integrationsregeln für ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen<br>- Plausibilität des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung an Beispielen<br>- bestimmtes Integral, Rechenregeln | Nutzung von CAS, Tabellen-kalkulation und Software zur Simulation der Änderungsrate möglich |
| zentrale Leitideen: *funktionaler Zusammenhang, Approximation*<br>„Mathematische Symbole, Werkzeuge und Verfahren verwenden", „Problemlösen" | **Anwendung der Integralrechnung**<br>- Stammfunktionen und Integrale von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen mit linearer innerer Funktion,<br>- Verwenden von Integrationsregeln beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen,<br>- Beschreiben der Integration als Umkehrung zur Differentiation an konkreten Sachverhalten,<br>- Nutzen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur eigenständigen Lösung von Anwendungsproblemen,<br>- Bestandsrekonstruktion in verschiedenen Anwendungskontexten,<br>- Berechnung von Flächen unter und zwischen Funktionsgraphen | Einsatz von CAS möglich |

[1] Ein konkreter Bezug zu den einzelnen Aspekten der Leitideen und Kompetenzen ist in den Aufgabenbeispielen beschrieben.

# 5 Didaktische Erläuterungen zur Integralrechnung

Bei der Erarbeitung des Zuganges zur Integralrechnung sollten vor allem praxisorientierte Aufgaben im Mittelpunkt stehen. Hierbei können den Schülerinnen und Schülern zum Beispiel die in der folgenden Tabelle aufgeführten Grundvorstellungen und Zusammenhänge zwischen Differential- und Integralrechnung vermittelt werden:

| **Ableitung** | **Integration** |
|---|---|
| Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit | zurück gelegter Weg in Abhängigkeit der Zeit |
| Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit | Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit |
| Wachstum | Bestand |
| Kraft in Abhängigkeit des Weges | Arbeit in Abhängigkeit des Weges |
| lokale Änderung | Summe (von verallgemeinerten Produkten) |
| Steigung | Flächenmaß |

Dies erfordert eine Ausprägung folgender prozessbezogener Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen, dass durch Aufsummierung von lokalen Änderungsraten ein Gesamteffekt bestimmt werden kann und interpretieren diesen Gesamteffekt außermathematisch, z. B. als zurückgelegter Weg, Gesamtkosten usw., bzw. geometrisch als Fläche,
- wissen daher, dass sich mit Hilfe der Differentialrechnung lokale und mit Hilfe der Integralrechnung globale Aussagen machen lassen,
- schließen aus der obigen Erkenntnis, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, kennen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wissen um seine Bedeutung,
- können in einfachen Modellierungsaufgaben das Integral sachgerecht einsetzen und deuten, bestimmen in einfachen Fällen Integrale numerisch, berechnen Integrale ausgewählter Funktionen und sind in der Lage, den ermittelten Zahlenwert im Aufgabenkontext zu interpretieren.

## 5.1 Von der Änderungsrate zum Bestand

Die Beispiele

(1) Heißluftballon (Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Änderungsraten),
(2) $CO_2$ – Gehalt in Teichen (Flächeninhalts- und Approximationseffekt),
(3) Hubschrauberflug (Flächeninhalts- und Approximationseffekt),
(4) Wasserverbrauch (Flächeninhalts- und Approximationseffekt) und
(5) Fahrtenschreiber (Flächeninhalts- und Approximationseffekt)

sollen Anregungen für einen anwendungsorientierten Einstieg in die Integralrechnung geben und können unabhängig voneinander eingesetzt werden. Sie eignen sich besonders dazu, die Grundidee der Integralrechnung von den Schülerinnen und Schülern selbstständig entdecken zu lassen. Durch entsprechende Variation ist der Einsatz sowohl im Grund- als auch im Leistungskurs möglich. Der Schwierigkeitsgrad kann durch Weglassen oder Hinzufügen von Zusatzinformationen erhöht oder verringert werden.

Das **Beispiel (1) „Heißluftballon“** ist, so wie abgebildet, für den Leistungskurs geeignet. Eine Einteilung der Koordinatenachsen wurde bewusst nicht vorgenommen, um das Modellieren stärker in den Vordergrund zu stellen. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich so zuerst mit der Aufgabenstellung vertraut machen und eine für sie sinnvolle Achseneinteilung festlegen.

Im Grundkurs hingegen sollte diese Achseneinteilung vorgegeben werden.

Im **Beispiel (2) „$CO_2$ – Gehalt in Teichen“** sind diskrete Messwerte in der Tabelle gegeben. Es wird angenommen, dass die Änderungsrate durch eine stetige Funktion (ganzrational) näherungsweise modelliert werden kann.

Das **Beispiel (3) „Hubschrauberflug“** ist durch die angegebene kleinschrittige Aufgabenstellung sehr gesteuert. Durch Veränderungen in den Arbeitsaufträgen und durch ergänzende Forderungen kann die Aufgabe variiert werden und je nach Bedarf offen gestaltet werden. Wir haben bewusst auf die Angabe einer Gleichung für die Beschreibung des abgebildeten Graphen verzichtet, um so weitere Modellierungen zu ermöglichen.

Die **Beispiele (4) „Wasserverbrauch“** und **(5) „Fahrtenschreiber“** sind durch den Auftrag „Formulieren Sie nach Analyse des Textes und der zugehörigen Abbildungen sinnvolle Fragen und beantworten Sie diese.“ offen angelegt. Einige mögliche Fragestellungen sind in der Lösungsdarstellung enthalten. Wenn abzusehen ist, dass die Schülerinnen und Schüler Probleme beim Finden sinnvoller Fragen haben, sollte die Lehrkraft steuern und Anstöße geben. Der Differenzierungsgrad der Aufgabenstellung kann bei beiden Beispielen durch die Vorgabe einer oder mehrerer Fragen durch die Lehrkraft verändert werden.

Im Vergleich zur Problemstellung Wasserverbrauch ist das **Beispiel (5) „Fahrtenschreiber“** in der Bearbeitung anspruchsvoller und umfangreicher. Voraussetzung für eine erfolgreiche Bewältigung ist ein Verständnis der Zusammenhänge zwischen Weg und Geschwindigkeit. Unter Umständen ist es ratsam, geeignete hilfreiche Zusatzinformationen anzugeben. Das kann z. B. ein Hinweis auf die zulässige Höchstgeschwindigkeit von Lastkraftwagen sein.

Die Bearbeitung aller **Beispiele** ist in Gruppen- und Einzelarbeit möglich. Der Einsatz von Computeralgebrasystemen ist sinnvoll.

## Beispiel 1: Heißluftballon

**Quelle:** Thomas Unkelbach, „Materialien zum Selbstständigen Arbeiten“, (Website, 2008)

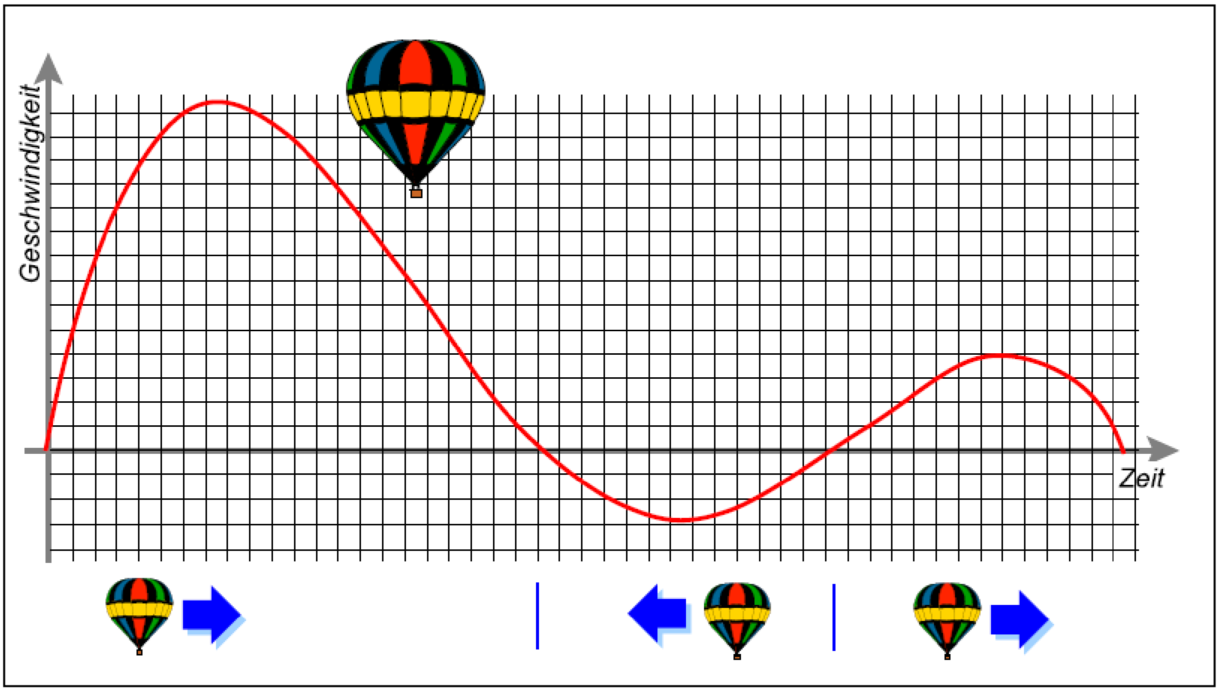
### Ballonfahrt

Ein Heißluftballon ist eine längere Zeit in der Luft.

Zur Vereinfachung gelte die Annahme, dass er sich dort nur in einer Richtung fortbewegt bzw. in entgegengesetzter Richtung, wenn der Wind dreht. An Bord befindet sich ein Messgerät für die Geschwindigkeit, die der Ballon fährt.

Die Geschwindigkeit wird jetzt in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit in ein Koordinatensystem eingetragen, die Rückwärtsfahrt mit „negativer“ Geschwindigkeit gekennzeichnet.

Es ergibt sich vom Start bis zur Landung des Ballons dabei folgendes Schaubild:




Treffen Sie zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben geeignete Annahmen.

a) Beschreiben Sie die Fahrt auf der Grundlage des obigen Graphen.

b) Wie groß war der zurückgelegte Weg?

c) Wie weit ist der Ballon bei der Landung vom Ort des Starts entfernt?

d) Geben Sie eine Möglichkeit an, aus der Kenntnis des Verlaufs der Geschwindigkeit eines Objekts auf dessen zurückgelegten Weg zu schließen.

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise:**

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| **a)** 1. Intervall: Fahrt mit anfangs steigender, dann abnehmender Geschwindigkeit in Windrichtung<br>2. Intervall: Fahrt mit anfangs steigender, dann abnehmender Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung (Graph unterhalb der Zeitachse, Geschwindigkeit insgesamt kleiner als im Intervall 1)<br>3. Intervall: Fahrt mit anfangs steigender, dann abnehmender Geschwindigkeit in gleicher Richtung wie im Intervall 1 (Geschwindigkeit geringfügig größer als im Intervall 2, aber immer noch kleiner als im Intervall 1) | **Modellieren,**<br>z. B. Übersetzen eines gegebenen grafischen Modells in die reale Situation des Heißluftballons<br><br>z. B. Vereinfachen von Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen | |
| **b)** Zur Ermittlung des zurückgelegten Weges müssen die drei Flächenstücke zwischen der Kurve und der Zeit-Achse näherungsweise berechnet und addiert werden.<br>Gesucht ist ein Produkt:<br>*Zeit • Geschwindigkeit ( = Weg ).*<br>Geometrisch ergibt sich daher eine (Rechteck-) Fläche.<br>Die Fläche steht zumeist stellvertretend für gesuchte Größen.<br>Das Flächenmaß kann ermittelt werden, indem man die Fläche mit bekannten Flächen (Dreieck, Rechteck, Trapez, ...) möglichst gut auslegt und deren Flächenmaße addiert.<br>Hinweis: Basis für numerisches Verfahren | **Kommunizieren/ Kooperieren,**<br>z. B. Erfassen, Interpretieren und Reflektieren mathematikhaltiger Texte<br>**Problemlösen,**<br>z. B. Finden von Problemen in inner- und außermathematischen Situationen, Formulieren dieser in eigener und in mathematischer Fachsprache<br>**Modellieren**<br>z. B. Beschreiben von Realsituationen durch mathematische Modelle | **Funktionaler Zusammenhang,**<br>z. B. Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Änderungsraten<br>**Approximation**<br>z. B. Beschreibung der Integration als Aufsummierung von Änderungsraten und numerische Durchführung am konkreten Beispiel |
| **c)** Zur Ermittlung der Entfernung zwischen Abfahrts- und Aufprall-Ort zählt das Maß der Fläche unterhalb der x-Achse als negativ, da der Ballon während dieses Zeitraumes rückwärts fährt.<br>Flächenteile unterhalb der x-Achse ergeben negative Werte. Daher wird meist über eine Nullstelle der Funktion nicht hinweg gerechnet. | **Argumentieren,**<br>z. B. Entwickeln von Begründungen für mathematische Sachverhalte | |

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| **d)** Sofern der Term des Graphen der Ballongeschwindigkeit bekannt ist, können die Werte direkt berechnet werden.<br>Der Term sei f(x). Gesucht ist dann der Funktionsterm F(x) der zugehörigen Weg/Zeit-Funktion mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$, denn die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Weg/Zeit-Funktion.<br>Der zurückgelegte Weg in den Etappen ergibt sich dann durch die Differenz:<br>$F(x_{ZIEL}) – F(x_{START})$<br>Rückwärtsdifferenzieren ist dann Integrieren. | **Argumentieren**<br>z. B. Reflexion und Bewertung von Argumentationen und Begründung der Schlüssigkeit und Angemessenheit | |

## Beispiel 2: $CO_2$–Gehalt in Teichen

**Quelle:** Thomas Unkelbach, „Materialien zum Selbstständigen Arbeiten“, (Website, 2008)

**$CO_2$ im Teich**

Die biologische Aktivität in einem Teich kann man durch die Änderungsrate beschreiben, mit der $CO_2$ dem Wasser zugefügt oder entnommen wird.

Pflanzen entnehmen tagsüber dem Wasser im Rahmen der Photosynthese $CO_2$ und geben nachts $CO_2$ ab. Tiere geben durch die Atmung $CO_2$ an das Wasser ab.

Bei Tagesanbruch werden 2,6 *ME* $CO_2$ im Teich festgestellt. (*ME* steht hier für eine *MengenEinheit*, in der die Stoffmenge von $CO_2$ gemessen werden kann.)

Biologen haben die Zu- und Abnahmerate z(t) über einen ganzen Tag, beginnend mit dem Sonnenaufgang, gemessen. Die Werte werden in der Einheit *ME* pro Stunde angegeben.

| Zeit in h | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Änderungsrate z (t) in ME/h | 0,0 | – 0,042 | – 0,037 | – 0,026 | – 0,009 | 0,046 | 0,031 | 0,019 | 0,006 |

a) Zeichnen Sie die Messpunkte in ein Koordinatensystem.

b) Begründen Sie, dass der Teich Pflanzen enthält.

c) Berechnen Sie für jede der angegebenen Zeiten die Gesamtmenge von $CO_2$ im Wasser und stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar.

d) Zeichnen Sie einen Graphen, der die Entwicklung des $CO_2$-Gehalts während des Tages darstellt.

e) Wann war der $CO_2$-Gehalt am geringsten? Wie groß war er?

f) Welche Bedeutung haben die folgenden Integrale für die vorgegebene Situation?

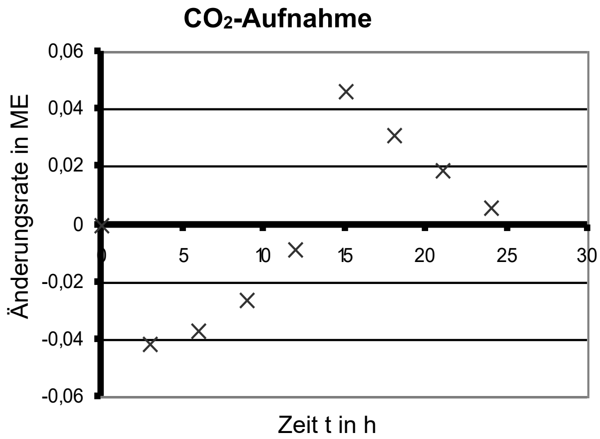
I) $\int_0^{12} z(t)\,dt$ II) $\int_{12}^{24} z(t)\,dt$ III) $\int_0^{24} z(t)\,dt$

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

<table>
<tr><th>Lösungshinweise</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th></tr>
<tr><td>

**a)** graphisches Darstellen von Messwerten




</td><td>

**Mathematische Darstellungen verwenden,**

z. B. Verwenden verschiedener Darstellungen (Tabelle, Graph, Term) und Wechsel zwischen diesen

</td><td>

**Funktionaler Zusammenhang**

z. B. Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Änderungsraten

</td></tr>
<tr><td>

**b)** Der Teich enthält Pflanzen, da nur so die negativen Änderungsraten von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang erklärt werden können.

Die Schülerinnen und Schüler werten die gegebenen Messwerte aus und interpretieren positive und negative Änderungsraten.

</td><td>

**Argumentieren,**

z. B. Kombinieren mathematischen Wissens für Begründungen

</td><td></td></tr>
<tr><td>

**c)** Flächeninhalte werden näherungsweise berechnet, z. B. über Rechteck- oder Trapezsummen mit diskreten Werten.

Schülerinnen und Schüler interpretieren das Integral als Wirkung, hier als enthaltene Gesamtmenge, berechnen die zugehörigen Flächeninhalte und stellen eine Tabelle auf.

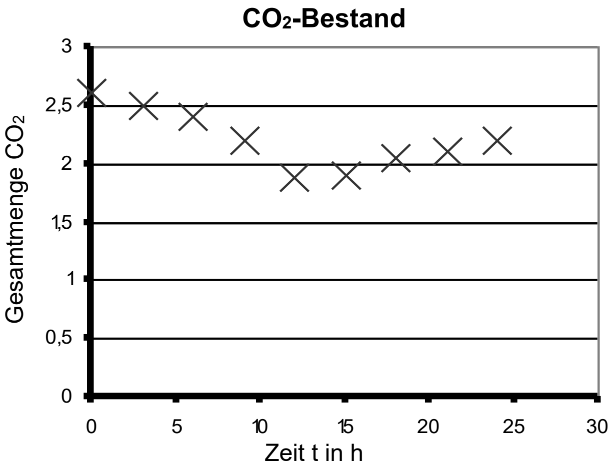
<table>
<tr><td>t in h</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td></tr>
<tr><td>$CO_2$ ges.</td><td>2,6</td><td>2,5</td><td>2,4</td><td>2,2</td><td>1,88</td><td>1,9</td><td>2,05</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr>
</table>

</td><td>

**Modellieren,**

z. B. Vereinfachung von Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen

</td><td></td></tr>
</table>

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| **d)** Zeichnen des zugehörigen Graphen<br> | **Mathematische Darstellungen verwenden,**<br>z. B. Verwenden verschiedener Darstellungen (Tabelle, Graph, Term) und Wechsel zwischen diesen | |
| **e)** Bestimmen des Tiefpunktes des Graphen:<br>Der $CO_2$-Gehalt war nach ca. 12,5 h am geringsten (etwa 1,88 ME). | **Modellieren,**<br>z. B. Übersetzen des gegebenen graphischen Modells in die reale Situation | |
| **f)** 1) Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, also wurde im betreffenden Zeitraum mehr $CO_2$ entnommen als abgegeben, der Gesamtbestand ist gesunken.<br>2) Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse, also wurde im betreffenden Zeitraum mehr $CO_2$ abgegeben als entnommen, der Gesamtbestand ist also gestiegen.<br>3) Durch das Integral wird angegeben, wie viel $CO_2$ nach 24 Stunden im Vergleich zum Anfangsbestand hinzu gekommen ist bzw. entnommen wurde.<br>Die Schülerinnen und Schüler interpretieren das Integral als Bilanzierung von Flächeninhalten. | **Modellieren,**<br>z. B. einem mathematischen Modell verschiedene passende Realsituationen zuordnen und so die Universalität von Modellen reflektieren | |

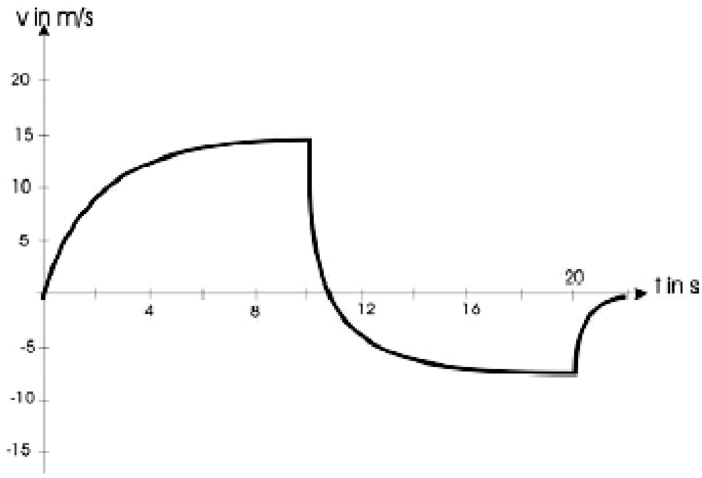
## Beispiel 3: Der Hubschrauberflug

**Quelle:** Thomas Unkelbach, „Materialien zum Selbstständigen Arbeiten“, (Website, 2008)

### Auf und Ab eines Hubschraubers

Abb. mit KI erstellt

Ein Hubschrauber startet zum Zeitpunkt $t$ = 0 *s* vom Boden. Die Geschwindigkeit des Hubschraubers in **vertikaler** Richtung wird durch das folgende Diagramm beschrieben. Dabei wird die Zeit $t$ in Sekunden (*s*) und die Geschwindigkeit $v$ in Meter pro Sekunde (*m/s*) angegeben.




a) Beschreiben Sie den Bewegungsablauf ohne Rechnung.
- In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Hubschrauber aufwärts bzw. abwärts?
- Zu welchen Zeitpunkten ändert der Hubschrauber die Bewegungsrichtung?
- Wann war die Steiggeschwindigkeit am größten?
- Wann war die Sinkgeschwindigkeit am größten?

b) In welchen Zeitabschnitten des Steigflugs findet eine positive bzw. negative Beschleunigung statt?

c) Bestimmen Sie eine sinnvolle Schätzung für die nach 10 Sekunden erreichte Höhe.

d) Nach 22 Sekunden Flugzeit landet der Hubschrauber. Begründen Sie, dass der Landeplatz auf einem Hügel liegt.

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| **a)** • Graph von f oberhalb der t-Achse: Hubschrauber bewegt sich nach oben für $0 \leq t \leq 11$<br>• Graph von f unterhalb der t-Achse: Hubschrauber bewegt sich nach unten für $11 \leq t \leq 22$<br>• Schnittpunkte des Graphen von f mit der t-Achse: dort Änderung der Bewegungsrichtung: $t = 11$<br>• Hochpunkt des Graphen von f: größte Steiggeschwindigkeit ($t = 10$)<br>• Tiefpunkt des Graphen von f: größte Sinkgeschwindigkeit ($t = 20$) | **Modellieren,**<br>z. B. Übersetzen eines gegebenen graphischen Modells in die reale Situation des Hubschraubers | **Funktionaler Zusammenhang,**<br>z. B. Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Änderungsraten |
| **b)** • positive Steigung des Graphen von f: positive Beschleunigung für $0 \leq t \leq 10$<br>• negative Steigung des Graphen von f: negative Beschleunigung für $10 \leq t \leq 11$<br>Lösungsansätze sind z. B. qualitatives differenzieren des Graphen bzw. erkennen der Beschleunigung als Änderungsrate der Geschwindigkeit. | **Modellieren,**<br>z. B. Vereinfachung von Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen | |
| **c)** Die näherungsweise Berechnung, z. B. über Rechteck- oder Trapezsummen, ergibt eine Höhe von ca. 108 m.<br>Ebenfalls möglich wäre eine Argumentation mit der mittleren Geschwindigkeit (etwa 10 m/s). Damit ergibt sich eine Höhe von ca. 100 m.<br>• Interpretation des Integrals als Wirkung (hier: zurückgelegte Höhe) | **Problemlösen,**<br>z. B. Beschreiben, Vergleichen und Bewerten von Lösungswegen | **Approximation,**<br>z. B. Beschreibung der Integration als Aufsummierung von Änderungsraten und numerische Durchführung am konkreten Beispiel |
| **d)** Der Flächeninhalt oberhalb der t-Achse ist größer als unterhalb der t-Achse, d. h. die zurückgelegte Strecke nach oben ist größer als die zurückgelegte Strecke nach unten.<br>• Interpretation des Integrals als Bilanzierung von Flächeninhalten | **Argumentieren,**<br>z. B. Entwickeln von Begründungen für mathematische Sachverhalte | |

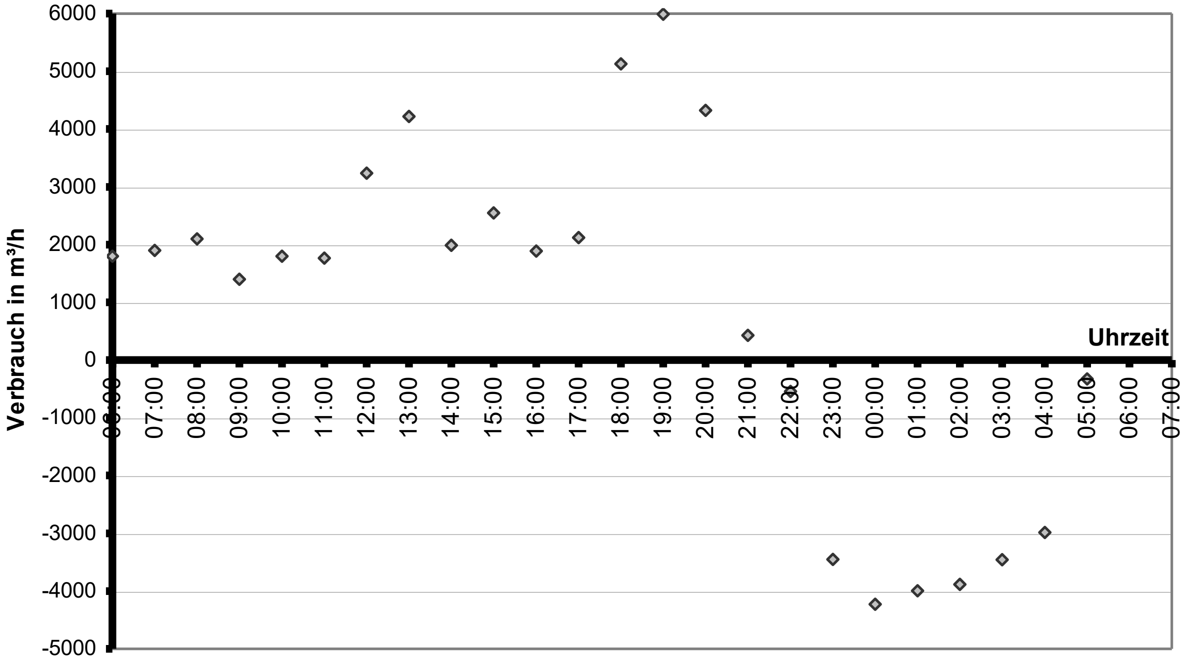
## Beispiel 4: Wasserverbrauch

**Quelle:** Stephan Hußmann: Mathematik – entdecken und erforschen, Cornelsen 2003

**Trinkwasserverbrauchskurvenanalyse**

Der größte Teil des Trinkwasserverbrauchs einer größeren Stadt erfolgt durch ein Wasserwerk. Es umfasst Stauanlage, Wassergewinnung und Pumpwerk.

Um die Bevölkerung jederzeit optimal mit Wasser zu versorgen, ist es wichtig, dass die Anlage optimal ausgenutzt wird. Ausgangspunkt für die optimale Ausnutzung ist der aktuelle Wasserverbrauch der Bevölkerung. Dieser wird mit Hilfe von Fühlern, die in den Verbrauchswasserstrom ragen, gemessen. Damit immer Wasser vorhanden ist, wird Wasser gewonnen und aufbereitet und dem Wasserbecken zugeführt. Dieser Zustrom wird ebenfalls mit entsprechenden Fühlern gemessen. Für den Verlauf eines Tages wird in der Tabelle und der zugehörigen Abbildung die Bilanz der gemessenen Werte angegeben. Bei den Werten handelt es sich um den momentanen Wasserverbrauch. Die Stadtwerke nutzen die Tageskurven, um Prognosen hinsichtlich der optimalen Wassergewinnung für zukünftige Tage treffen zu können.




| **Zeit** | 06:00 | 07:00 | 08:00 | 09:00 | 10:00 | 11:00 | 12:00 | 13:00 | 14:00 | 15:00 | 16:00 | 17:00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Wasser-verbrauch in m³/h** | 1800 | 1900 | 2100 | 1400 | 1800 | 1765 | 3236 | 4219 | 1989 | 2549 | 1888 | 2119 |

| **Zeit** | 18:00 | 19:00 | 20:00 | 21:00 | 22:00 | 23:00 | 24:00 | 01:00 | 02:00 | 03:00 | 04:00 | 05:00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Wasser-verbrauch in m³/h** | 5129 | 5988 | 4322 | 430 | - 543 | -3450 | -4229 | -3998 | -3887 | -3456 | -2987 | -327 |

Formulieren Sie nach Analyse des Textes und der zugehörigen Abbildungen sinnvolle Fragen und beantworten Sie diese.

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| Mögliche Fragen und Antworten könnten sein:<br>**Was ist negativer Wasserverbrauch?**<br>A.: Der Zustrom ist höher als der Verbrauch. | **Kommunizieren/ Kooperieren,**<br>z. B. Erfassen, Interpretieren und Reflektieren von mathematikhaltigen Texten | **Funktionaler Zusammenhang**<br>z. B. Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Änderungs-raten |
| **Was beschreibt der Datenpunkt um 7.00 Uhr, den Wasserverbrauch um 7.00 Uhr oder den Durch-schnittswert zwischen 6.00 Uhr und 7.00 Uhr?**<br>A.: Eine Interpretation als stündlicher Mittelwert oder als momentaner Messwert ist möglich. | **Mathematische Darstellungen verwenden,**<br>z. B. Verwenden verschiedener Darstellungen von Funktionen (Tabelle, Graph) | |
| **Wie groß ist der Verbrauch für einen gesamten Tag?**<br>A.: Addition der positiven Wasser-verbrauchswerte ergibt 42634 m³, Summation der negativen Verbrauchswerte ergibt – 22877 m³. Das ergibt insgesamt 19757 m³. [Interpretation als stündlicher Mittelwert] | **Problemlösen,**<br>z. B. Finden und Formulieren von Problemen in inner- und außermathe-matischen Situationen | |
| **Wo findet sich der Gesamtwasserverbrauch in der graphischen Darstellung wieder?**<br>A.: Die einzelnen Messpunkte können als lineare oder als Treppenfunk-tionen verbunden werden. Bei der Treppenfunktion lässt sich das gesamte Wasservolumen mit der Maßzahl der Summe von 24 Rechtecken gleichsetzen.<br>Bei linearer Modellierung werden die Rechtecke durch Trapeze ersetzt. | **Modellieren,**<br>z. B. Beschreiben von Realsituationen durch mathematische Modelle (Funktionen)<br>**Argumentieren,**<br>z.B. Vergleichen und Bewerten von verschiedenen Begründungen | **Approximation**<br>z. B. Beschreiben der Integration als Aufsummierung von Änderungsraten und numerische Durch-führung am konkreten Beispiel |

## Beispiel 5: Fahrtenschreiber

**Quelle:** Stephan Hußmann: Mathematik – entdecken und erforschen, Cornelsen 2003

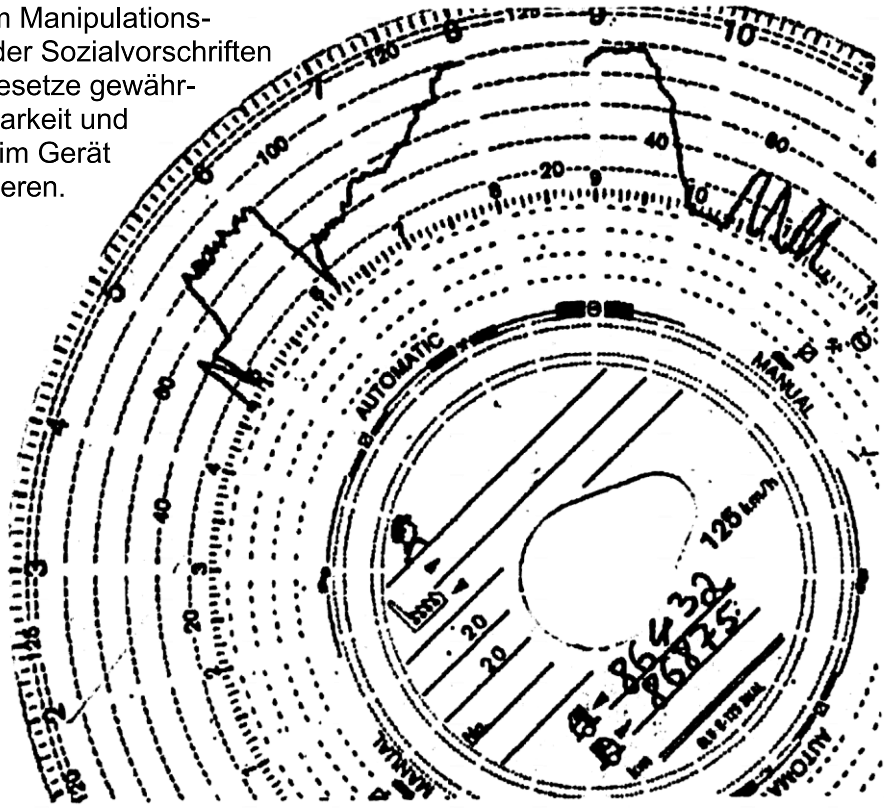
### Fahrtenschreiber

In einer Spedition sind mehrere Fahrerinnen und Fahrer angestellt, die täglich verschiedene Großmärkte in ganz Deutschland beliefern. Auf der Rückfahrt von München wird Frau Grat, eine Fahrerin der Spedition, von der Autobahnpolizei angehalten. Die routinemäßige Kontrolle gilt der Verkehrssicherheit des LKW. Bei der Überprüfung der Tachoscheibe entdecken die Polizeibeamten einen relativ großen Zeitraum, in dem auf der Scheibe keine Geschwindigkeit eingetragen ist. Auf der Tachoscheibe werden Geschwindigkeiten während der gesamten Fahrt in einem Zeit–Geschwindigkeit–Diagramm festgehalten. Auf Nachfragen gibt Frau Grat an, dass sie in dieser Zeit eine Pause an einer Raststätte gemacht habe.

In der Abbildung ist eine Tachoscheibe zu sehen, die in Bussen und Lastkraftwagen benutzt werden muss. Ein Grund für diese Maßnahme ist in der Erhöhung der Sicherheit auf den Straßen zu sehen. Diese wurde zunehmend durch Überschreitung von Fahrzeiten und Geschwindigkeitsmissachtungen der LKW– und Busfahrer gefährdet und führt auch heute noch zu erheblichen Personen- und Sachschäden.

Das Gerät soll bei erhöhtem Manipulationswiderstand die Einhaltung der Sozialvorschriften und der entsprechenden Gesetze gewährleisten sowie die Überprüfbarkeit und Gerichtsverwertbarkeit der im Gerät gesammelten Daten garantieren.

Formulieren Sie nach Analyse des Textes und der zugehörigen Abbildung sinnvolle Fragen und beantworten Sie diese.




Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

<table>
<tr><th>Lösungshinweise</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th></tr>
<tr><td>
Mögliche Fragen und Antworten könnten sein:<br><br>
„Wie lässt sich die zurückgelegte Strecke möglichst genau bestimmen?“<br>
- Unterteilung der Zeitachse, Ablesen der Durchschnittsgeschwindigkeiten in den individuell festgelegten Intervallen<br>
- $s = v \cdot t$<br>
- je kleiner die Intervalle, desto genauer das Ergebnis<br>
- Zerlegung in nichtäquidistante Intervalle ist sinnvoll<br>
- mögliche Intervalle:
<table>
<tr><th>Intervall</th><th>Zeit (min)</th><th>Geschwindigkeit (km/h)</th><th>Weg (km)</th></tr>
<tr><td>4.40 – 5.00</td><td>20</td><td>30</td><td>6,7</td></tr>
<tr><td>5.00 – 5.15</td><td>15</td><td>40</td><td>10,0</td></tr>
<tr><td>5.15 – 6.10</td><td>55</td><td>80</td><td>73,3</td></tr>
<tr><td>6.10 – 7.00</td><td>50</td><td>40</td><td>33,3</td></tr>
<tr><td>7.00 – 8.00</td><td>60</td><td>80</td><td>80,0</td></tr>
<tr><td>8.00 – 9.00</td><td>Lücke</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>9.00 – 9.30</td><td>30</td><td>95</td><td>47,5</td></tr>
<tr><td>9.30 – 10.00</td><td>30</td><td>45</td><td>22,5</td></tr>
<tr><td>10.00 – 10.25</td><td>25</td><td>5</td><td>2,1</td></tr>
<tr><td>10.25 – 11.25</td><td>60</td><td>20</td><td>20,0</td></tr>
</table>
- nachweisbare Gesamtstrecke (ohne Lücke): ≈ 295 km.
</td><td>
Kommunizieren/ Kooperieren,<br>
z. B. Erfassen, Interpretieren und Reflektieren von mathematik-haltigen Texten<br><br>
Mathematische Darstellungen verwenden,<br>
z. B. Verwenden verschiedener Darstellungen von Funktionen (Tabelle, Graph)<br><br>
Problemlösen,<br>
z. B. Finden und Formulieren von Problemen in inner- und außer-mathematischen Situationen
</td><td>
Approximation,<br>
z. B. Beschreiben der Integration als Aufsummierung von Änderungsraten und numerische Durchführung am konkreten Beispiel
</td></tr>
<tr><td>
„Wie groß ist die Differenz der auf dem Tacho angezeigten und der tatsächlich zurückgelegten Strecke?“<br>
- laut handschriftlichem Eintrag der Kilometerstände: 86875 – 86432 = 443 (km)<br>
- Zur nachgewiesenen Fahrtstrecke von 295 km besteht also eine Differenz von 148 km.<br><br>
„Kann Frau Grat zu der angegebenen Zeit eine Pause gemacht haben?“<br>
- Nein, da sie in dieser Zeit 148 km gefahren ist.<br><br>
„Hat Frau Grat die Geschwindigkeit übertreten?“<br>
- Ja sicher, da die fragliche Zeitspanne genau eine Stunde beträgt, liegt die Durchschnitts-geschwindigkeit bei v = 148 km/h.<br>
LKW dürfen aber nur 100 km/h fahren.
</td><td>
Argumentieren,<br>
z. B. Vergleichen und Bewerten von verschiedenen Begründungen<br><br>
Modellieren<br>
z. B. Beschreiben von Realsituationen durch mathematische Modelle
</td><td></td></tr>
</table>

## 5.2 Plausibilität des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Die **Beispiele (6) „Wachstum einer Hopfenpflanze“** und **(7) „Kontostand“** dienen der Festigung des Verständnisses des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Im Mittelpunkt steht der Grundgedanke der Verknüpfung von Differential- und Integralrechnung.

Bei der Behandlung der Integralrechnung lassen sich im Schwerpunkt „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ speziell folgende inhaltsbezogene Standards aus den zentralen Leitideen „Funktionaler Zusammenhang“ und „Approximation“ (Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe in den Ländern Berlin und Brandenburg, Mathematik, 2006) zuordnen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Integration als Umkehroperation zur Differentiation,
- nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zur Bestimmung von bestimmten Integralen,
- erläutern den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, indem sie in inner- und außermathematischen Situationen die Aufsummierung von lokalen Änderungsraten als einen Gesamteffekt interpretieren.

Die gezielte Planung prozessbezogener Kompetenzen sollte passend zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen erfolgen. Folgende Standards sind dabei besonders geeignet:

- Argumentieren: - in inner- und außermathematischen Situationen Zusammenhänge beschreiben,
- Problemlösen: - Probleme vereinfachen, Beispiele untersuchen,
- Modellieren: - Realsituationen durch mathematische Modelle beschreiben,
- Symbole, Verfahren und Werkzeuge verwenden:
  - algorithmische Verfahren ausführen und Ergebnisse überprüfen,
- Kommunizieren: - mathematische Zusammenhänge mit geeigneten Fachbegriffen erläutern.

Im Unterricht muss die Verknüpfung von Differential- und Integralrechnung im Hauptsatz an anschaulichen Beispielen plausibel gemacht werden. Das erfordert auch die Einbeziehung diskreter und kontinuierlicher Modelle, die eine selbstständige Argumentation durch die Schülerinnen und Schüler zulassen.

Eine besondere Bedeutung kommt dabei der nachfolgend aufgeführten Interpretation des Hauptsatzes zu:

Ist von einer stetigen und differenzierbaren Funktion $f$ mit $y = f(x)$ nur die Ableitungsfunktion $f'$ auf einem Intervall $[a;b]$ bekannt, kann man mit $f(b)-f(a)$ die Gesamtänderung bestimmen. Dabei gilt:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a).$$

Genutzt wird diese Darstellung innermathematisch bei der Flächenberechnung, wenn die Ausgangsfunktion nicht so einfach zu integrieren ist, aber auch mithilfe des nachfolgend formulierten Satzes bei der Bearbeitung im Anwendungskontext.

Satz: Ist $m(t)$ mit $t \in [t_1;t_2]$ die momentane Änderungsrate einer Größe $G$, dann erhält man die Gesamtänderung der Größe $G$ im Intervall $[t_1;t_2]$ als Integral

$$G(t_2) - G(t_1) = \int_{t_1}^{t} m(t)dt\,.$$

Für die Ermittlung der Wachstumszunahme der Hopfenpflanze in **Beispiel (6)** ist ein Verständnis der Zusammenhänge zwischen Weg, Geschwindigkeit und Zeit auf Grundlage eines kontinuierlichen Modells (Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt im zu betrachtenden Intervall unendlich viele Werte an.) notwendig. Die Lösung wird durch die Berechnung bestimmter Integrale realisiert.

Der Anspruch im **Beispiel (7) Kontostand** besteht im Gewinnen der Erkenntnis, dass die Summation lokaler Änderungsraten (Summation aller Zwischensummen) als Gesamteffekt gedeutet werden kann. Der lokalen Änderungsrate der Differentialrechnung wird der globale Gesamteffekt der Integralrechnung gegenübergestellt. Das Beispiel basiert auf der Grundlage eines diskreten Modells. Die zu betrachtende Größe nimmt im vorgegebenen Intervall (Zeitraum vom 01.10. bis 14.10.) endlich viele Werte an.

## Beispiel 6: Wachstumsgeschwindigkeit

**Quelle:** Lambacher Schweizer, Mathematik für Gymnasien, Gesamtband Oberstufe mit CAS, Ausgabe C, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2007, S. 170, Aufgabe 11

**Wachstum einer Hopfenpflanze**

Für das Wachstum einer Hopfenpflanze wird folgende Modellannahme getroffen:

Die Wachstumsgeschwindigkeit *w(t)* in cm/Tag steigt innerhalb von 40 Tagen linear von 0 auf 25 cm/Tag. Anschließend nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit linear innerhalb von 30 Tagen wieder auf 0 cm/Tag ab.

Um wie viel Zentimeter wächst die Pflanze insgesamt?

Abb. mit KI erstellt

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| Gleichung für die Wachstumsgeschwindigkeit unter der Voraussetzung, dass das Wachstum linear verläuft:<br><br>$w(t)=\frac{s}{t}$; $s\ldots$ Länge der Pflanze; $t\ldots$ Zeit in Tagen<br><br>Funktionsterme unter Beachtung des unterschiedlichen Wachstums in den zwei Teilintervallen:<br><br>Intervall $[0;40]$: $w_1(t)=\frac{25}{40}t$<br><br>Intervall $[40;70]$: $w_2(t)=-\frac{25}{30}t+\frac{175}{3}$<br><br>Nutzung des Hauptsatzes:<br><br>$s_1=\int_0^{40} w_1(t)dt=\int_0^{40}\frac{25}{40}t\,dt=500$<br><br>$s_2=\int_{40}^{70} w_2(t)dt=\int_{40}^{70}\left(-\frac{25}{30}t+\frac{175}{3}\right)dt\approx 375$<br><br>**Ergebnis**: Die Pflanze wächst insgesamt um 875 $cm$. | **Symbole, Verfahren und Werkzeuge verwenden,**<br>z. B. Verwendung von Symbolen zum Strukturieren von Informationen und zum Modellieren, Arbeit mit Funktionstermen<br><br>**Kommunizieren und Kooperieren,**<br>z. B. Erfassen, Interpretieren und Reflektieren von Texten<br><br>**Modellieren,**<br>z. B. Beschreibung von Realsituationen durch mathematische Modelle<br><br>**Mathematische Darstellungen verwenden,**<br>z. B. Verwendung von Darstellungen von Funktionen, Nutzung von Termen | **Funktionaler Zusammenhang,**<br>z. B. Nutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur Bestimmung von bestimmten Integralen<br><br>**Approximation,**<br>z. B. Erläuterung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durch die Interpretation der Aufsummierung von lokalen Änderungsraten in inner- und außermathematischen Situationen als Gesamteffekt |

## Beispiel 7: Kontostand

**Quelle:** Duden, Lehrbuch Mathematik, Gymnasiale Oberstufe, Qualifikationsphase, 1. Kursjahr, DUDEN PAETEC GmbH, Berlin 2007, S. 210 Aufgabe 1

**Kontostand**

Herr Meier kontrolliert anhand eines Haushaltsbuches seine Einnahmen und Ausgaben (siehe Abbildung).

a) Wie groß ist der Gesamtsaldo im betrachteten Zeitraum?

b) Ermitteln Sie Zeitintervalle, in denen Herr Meier mehr eingenommen als ausgegeben hat, und solche, in denen der umgekehrte Fall eintritt.

c) Gibt es einen Zeitraum, in dem sich Einnahmen und Ausgaben ausgleichen?

d) Begründen Sie Ihr Vorgehen und ziehen Sie Parallelen zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Einnahmen und Ausgaben**

| | | |
|---|---|---|
| 01.10. | Miete | - 567,00 € |
| 01.10. | Versicherung PKW | - 45,12 € |
| 02.10. | Barabhebung | - 400,00 € |
| 03.10. | Krankenkasse | - 412,12 € |
| 04.10. | Gehalt | 2634,12 € |
| 05.10. | Einkauf Drogerie | - 25,23 € |
| 06.10. | Zeitschriften-Abo | - 12,00 € |
| 07.10. | Telefonrechnung | - 35,14 € |
| 08.10. | Internet-Gebühren | - 9,90 € |
| 10.10. | Autoreparatur | - 245,60 € |
| 10.10. | Honorar für Vortrag | 100,00 € |
| 12.10. | Abrechnung Kreditkarte | - 260,90 € |
| 13.10. | Supermarkt | - 34,70 € |
| 14.10. | Barabhebung | - 100,00 € |

Kopiervorlage

**Kompetenzbezug und Lösungshinweise**

| Lösungshinweise | Prozessbezogene Kompetenzen | Inhaltsbezogene Kompetenzen |
|---|---|---|
| **a)** Zur Ermittlung des Saldos in einem bestimmten Intervall sind alle Zwischensummen im betrachteten Intervall zu summieren.<br>Somit erhält man für den Gesamtsaldo vom 01.10. – 14.10. den Wert 586,33 €.<br>**b)** Mögliche Zeitintervalle mit Einnahme-überschuss sind z. B. 04.10. – 10.10. ; 01.10. – 05.10. ; …<br>Mögliche Zeitintervalle, in denen die Ausgaben höher als die Einnahmen sind, sind z. B. 01.10. – 03.10.; 07.10. – 10. 10.; …<br>**c)** Es treten nur zwei positive Beträge auf, die sich nicht durch Ausgaben in der näheren Umgebung exakt ausgleichen lassen. Somit gibt es keinen Zeitraum, in dem sich Einnahmen und Ausgaben ausgleichen.<br>**d)** Für die Ermittlung des Gesamtsaldos in einem konkreten Zeitraum ist die Summation aller Zwischensummen notwendig (sehr aufwändig je nach Vorgabe). | **Kommunizieren/ Kooperieren,**<br>z. B. Erfassen, Interpretieren und Reflektieren von Texten<br><br>**Modellieren,**<br>z. B. Beschreibung von Realsituationen durch mathematische Modelle | **Approximation,**<br>z. B. Erläuterung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durch die Interpretation der Aufsummierung von lokalen Änderungsraten in inner- und außermathematischen Situationen als Gesamteffekt |
| Wenn der Kontostand zu Beginn des zu betrachteten Zeitraums bekannt ist, ist es möglich, den Endkontostand mit Hilfe der Einzelumsätze zu bestimmen. Eine Aussage zum Gesamtsaldo erhält man, in dem man die Differenz des Endkontostandes mit dem Ausgangskontostand bildet. Dabei entspricht der Ausgangsstand der Ausgangssumme bzw. der Endstand der Endsumme.<br>Das Bilden der Differenz aus Endsumme und Ausgangssumme entspricht dem durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung festgelegten Vorgehen. | **Argumentieren,**<br>z. B. Entwicklung von Begründungen für mathematische Sachverhalte, Beschreibung von Zusammenhängen in inner- und außermathematischen Situationen | |

# 6 Methodische Anregungen

## 6.1 „Lerntempoduett“

(vgl: Kleines Methodenlexikon, Wilhelm H. Peterßen, Verlag Oldenbourg, 2. Auflage 2001)

### 1 Ziele/Voraussetzungen

Voraussetzung für den Einsatz der Methode „Lerntempoduett“ ist das Vertrautsein der Schülerinnen und Schüler mit der Partnerarbeit. Das Tempoduett ist eine wirksame Methode der Binnendifferenzierung, welche überall (z. B. in Wiederholungs- oder Einführungsphasen) einsetzbar ist. Die Dauer ist hierbei abhängig von der Aufgabenstellung. Das Lerntempoduett ist bei der Erarbeitung/Bearbeitung von Texten/Aufgaben einsetzbar. Die Lösung der gestellten Aufgabe kann selbst das Lernziel oder ein Zwischenschritt zu einem umfassend gesetzten Lernziel darstellen.

Als Methode ist das Tempoduett vor allem dort einzusetzen, wo Schülerinnen und Schüler lernen sollen, sich über ein Problem eigene Gedanken zu machen, diese an andere heranzutragen und verständlich zu erklären.

Der Grundsatz des Tempoduetts besteht darin, dass die Aufgaben in Einzelarbeit gelöst und dann paarweise verglichen werden.

Allen Schülerinnen und Schülern soll Gelegenheit gegeben werden, sich eigenständig mit den entsprechenden Aufgaben in einem Tempo zu beschäftigen, welches ihren individuellen Voraussetzungen entspricht.

### 2 Ablauf

In der Regel werden von den Schülerinnen und Schülern beim Lerntempoduett folgende Phasen durchlaufen:

1. Die Schülerinnen und Schüler setzen sich in zwei Reihen einander gegenüber.
2. Jede Schülerreihe erhält einen eigenen Text bzw. eine eigene Aufgabenstellung.
3. Die Aufgabenstellung wird durch die Lehrkraft erläutert (z. B. Text lesen, Fragen beantworten, Aufgaben lösen...).
4. Schüler und Schülerinnen befassen sich, entsprechend ihrem individuellen Lerntempo, mit der Aufgabenstellung/dem Text.
5. Wer die erste Aufgabe gelöst hat, deutet dies an und wartet auf eine Schülerin oder einen Schüler der 2. Gruppe.
6. Das Schülerpaar sucht sich eine Arbeitsecke und erläutert sich gegenseitig die jeweilige Lösung.
7. Nach dem Informationsaustausch kehren die Schülerinnen und Schüler auf ihre Plätze zurück und bearbeiten die nächste Aufgabe.

Es gibt verschiedene Abwandlungsmöglichkeiten des Lerntempoduetts. So kann man z. B. an Schritt 7 anschließen und alle Schülerinnen und Schüler gleiche Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad (beginnend mit den leichteren) lösen lassen. Der Schüler bzw. die Schülerin, welcher mit der ersten Aufgabe fertig ist, signalisiert dies und wartet auf den nächsten, um die Aufgabe zu vergleichen. Der Dritte vergleicht dann mit dem Vierten, der Fünfte mit dem Sechsten u.s.w.

Um nicht unnötig viel Unruhe entstehen zu lassen, ist es möglich, vorher Karten zu laminieren (siehe Anlage), welche jeder vor sich aufstellt und kennzeichnet, welche Aufgabe gelöst wurde. Um einen reibungslosen Ablauf der Partnerarbeit zu realisieren, ist es wichtig, die Schülerinnen und Schüler darauf hin zu weisen, dass die Aufgaben in der vorgegebenen Reihenfolge (mit 1 beginnend) zu bearbeiten sind.

## 3 Lerntempoduett zu weiterführenden Integrationsmethoden

Bei einer komplexen Übung- bzw. Wiederholungsphase zu weiterführenden Integrationsmethoden am Beispiel der Integration durch Substitution und der partiellen Integration kann das Tempoduett Anwendung finden.

Ausgewählt wurden zehn Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Die Aufgaben 1 und 2 beinhalten die lineare Substitution, welche den Schülerinnen und Schülern im Allgemeinen auch schon vor der Behandlung der weiterführenden Integrationsmethoden bekannt ist. Die Aufgaben 3 bis 5 haben die Integration durch nichtlineare Substitution in unterschiedlichen Niveaustufen zum Gegenstand. Bei den Beispielaufgaben zur partiellen Integration wurden im Wesentlichen zwei Aufgabentypen genutzt. Zum einen solche, bei denen die Ergebnisse Grundintegrale (Aufgaben 6 bis 8) sind. Außerdem solche Aufgabentypen, bei denen durch geschicktes Integrieren das Ausgangsintegral entsteht, welches mit diesem zusammengefasst werden kann.

Beispiel für das in den Aufgaben 9 und 10 anzuwendende Verfahren:

Zu bestimmen ist $\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx$.

Mit der Wahl von $u(x)=\sin(x)$ und $v'(x)=\cos(x)$ ergeben sich $u'(x)=\cos(x)$ und $v(x)=\sin(x)$.

Damit gilt $\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \sin(x)\cdot\sin(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x)dx$.

Das Zusammenfassen derselben Integrale führt zur folgenden Lösung:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \sin^2(x) \Rightarrow \int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

**Arbeitsblatt zum Lerntempoduett:** Integration durch Substitution und partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

**1.** $\int (3x-8)^4 dx$ **2.** $\int_1^2 \sqrt[3]{(4x+2)^5}dx$ **3.** $\int 2x\sqrt{x^2-3}dx$

**4.** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx$ **5.** $\int \frac{x^2}{2+x^3}dx$ **6.** $\int x\cdot\sin(x)dx$

**7.** $\int_0^1 x^2\cdot e^x dx$ **8.** $\int_1^e x\cdot\ln(x)dx$ **9.** $\int (\sin^2 x)dx$

**10.** $\int_0^\pi e^x\cos(x)dx$

Kopiervorlage

**Anlage** (Kopiervorlage zum Lerntempoduett)

| | |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 7 |
| 3 | 8 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10 |

## 6.2 Lernkarten zum Thema Integralrechnung (Leistungskurs)

Ausgewählte Lernkarten sind auch im Grundkurs einsetzbar. Sie dienen zur Anregung für die Unterrichtsarbeit und können beliebig erweitert und ergänzt werden.

### 1 Fachliche Einordnung

Die Lernkartei enthält in konzentrierter Form die wichtigsten Inhalte des Basiswissens aus dem Bereich Analysis/Integralrechnung. Wichtige Begriffe, aber auch grundlegende Verfahren, werden gezielt und strukturiert mit einem Beispiel gekoppelt dargestellt.

Im Bereich der Integralrechnung lassen sich viele Aufgaben und Probleme mit festen Algorithmen und Lösungsschemata bearbeiten, die folgende fachliche Schwerpunkte beinhalten:

- Stammfunktion F einer Funktion f
- Ermitteln von Stammfunktionen
- bestimmtes Integral und Rechenregeln für bestimmte Integrale
- unbestimmte Integrale
- Anwendungen der Integralrechnung bei der Flächen- und Volumenberechnung
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Integrationsverfahren

### 2 Methodische Hinweise

Die Lernkartei ist im Unterricht an vielen Stellen einsetzbar. Denkbar ist die Nutzung am Ende eines Themengebietes, in Wiederholungs- und Festigungsphasen im Rahmen von Gruppenarbeit oder Partnerabfrage, im Anschluss an eine Erarbeitungsphase und zur Selbstkontrolle.

Für die Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe können die Lernkarten eine gute Hilfe für das zielgerichtete selbstständige Üben zu Hause sein. Für eine effektive Lernarbeitsgestaltung in Vorbereitung auf Klausuren und die schriftliche bzw. mündliche Abiturprüfung gestaltet sich die Lernkartei als gut handhabbare Lernhilfe. Bereits vorhandene Karteien können von der Lehrkraft dem Niveau des Kurses angepasst und ergänzt werden. Sinnvoll ist aber auch ein selbstständiges Erarbeiten von zusätzlichen Karten zu Begriffen und Arbeitsschritten für Verfahren durch die Schülerinnen und Schüler. Das bewusste Darstellen mathematischer Inhalte in komprimierter Form führt dabei zu einem besseren Verständnis und die Inhalte bleiben länger im Gedächtnis haften.

Erfahrungen bei der Verwendung der Lernkartei haben gezeigt, dass damit nicht nur leistungsschwache Schülerinnen und Schüler erfolgreich arbeiten.

Für die Handhabung empfiehlt es sich, die Karten nach dem Ausschneiden und Falten zu laminieren.

Was versteht man unter einer **Nullstelle** einer Funktion f und wie bestimmt man diese?

**Beispiele:**
Ermittle die Nullstellen folgender Funktionen.

**a**) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

**b**) $f(x) = \dfrac{x^4 - 7x^2 - 18}{\sqrt{x+7}}$

Nullstellen von f sind diejenigen x-Werte, denen durch f der Funktionswert (y-Wert) Null zugeordnet wird.

→ Für y bzw. f(x) in die Funktionsgleichung Null einsetzen und die Gleichung nach x lösen.

Ist der Funktionsterm ein Polynom höheren Grades als zwei, muss man entweder:

- Faktorisieren (mithilfe der Polynomdivision),
- Substituieren oder
- Probieren bzw. numerische Verfahren nutzen.

**Beispiel**:

**a**) $x_1=1$ durch Probieren → $f(x) : (x-1)$ ergibt
$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)\cdot(x^2-4)$ → $x_2=-2$; $x_3=2$

**b**) $x_1=-3$; $x_2=3$ (Zähler=0; Substitution $x^2=z$)

---

Was versteht man unter einer **Stammfunktion F** einer Funktion f und welcher Zusammenhang besteht zwischen F und f?

**Beispiel:**

Gib Eigenschaften der zur Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$ gehörenden Stammfunktion F an.

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f (im Intervall I), wenn gilt: **F'(x) = f(x)** (falls f und F im Intervall I definiert sind). Da eine Konstante beim Ableiten wegfällt, gibt es zu einer Funktion f stets unendlich viele Stammfunktionen F.

Es gelten z.B. folgende Zusammenhänge zwischen den Graphen von f und F:

- dort, wo der Graph von f eine Nullstelle hat, besitzt der Graph von F eine waagerechte Tangente (evtl. Extrem- oder Sattelstelle)
- wenn der Graph von F monoton steigend (fallend) verläuft, sind die Funktionswerte von f größer (kleiner) als 0.

**Beispiel**: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

Der Graph von F hat waagerechte Tangenten an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ (vermutlich Extremstellen).

---

Wie lauten die Aussagen folgender **Rechenregeln für bestimmte Integrale:**

- Intervalladditivität,
- Faktorregel,
- Summenregel?

**Beispiele:** Vereinfache folgende Integrale.

a) $\int_3^7 \left(x^4 - 2x^3 + x - 4\right)dx - \int_3^7 \left(-2x^4 - 2x^3 + x\right)dx$

b) $\int_0^a \left(3e^{x+1} - 6xe^{x+2}\right)dx + \int_a^k \left(3e^{x+1} - 6xe^{x+2}\right)dx$

Für bestimmte Integrale gelten unter anderem die folgenden Regeln:

Intervalladditivität: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Faktorregel: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

Summenregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx$$

**Beispiele**: a) $\ldots = \int_3^7 \left(3x^4 - 4\right)dx$

b) $\ldots = 3e \cdot \int_0^k \left(e^x - 2xe^{x+1}\right)dx$

| | |
|---|---|
| Es ist eine **Fläche** zu berechnen, die vom **Graphen einer Funktion f und der x-Achse im Intervall** $[a;b]$ vollständig eingeschlossen wird. Wie kann man dabei vorgehen?<br><br>**Beispiel:**<br><br>Berechne in Abhängigkeit vom Scharparameter k die Größe der Flächen, die die Graphen der Funktionen<br>$f_k : f_k(x) = x^4 + kx^2 + 3 \; ; k \in R, \; k > 0$<br>mit der x-Achse im Intervall $[-1; \; 2]$ einschließen. | Man prüft, ob die Funktion im vorgegebenen Intervall Nullstellen besitzt.<br>– Falls ja, ist die Fläche als Summe von Teilflächen zu berechnen.<br>– Liegt die Fläche vollständig oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse, so gilt:<br>$A = \lvert \int_a^b f(x)dx \rvert .$<br><br>**Bsp.**: – es existieren im vorgegebenen Intervall keine Nullstellen von f,<br>$A = \left\lvert \int_{-1}^{2} (x^4 + kx^2 + 3)dx \right\rvert = \left\lvert \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{k}{3}x^3 + 3x \right]_{-1}^{2} \right\rvert = 3k + 15{,}6$ |
| Wie kann eine **Fläche** berechnet werden, **die von zwei Funktionsgraphen vollständig begrenzt wird**, wenn diese Fläche nur aus einer Teilfläche besteht.<br><br>**Beispiel:**<br>Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen<br>$f : f(x) = x^2 + 2x$ und $g : g(x) = x + 2$<br>vollständig eingeschlossen wird. | Die Schnittstellen $x_1$ und $x_2$ der beiden Funktionen werden berechnet, diese sind die Integrationsgrenzen für die Flächenberechnung.<br>**Unbedingt** sollte die Summenregel genutzt werden, d.h. man integriert eigentlich die Differenzfunktion.<br>Der Graph von f begrenze die Fläche „oben“. Dann gilt:<br>$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]dx$<br>**Beispiel:** $A = \int_{-2}^{1} \left[ (x+2) - (x^2 + 2 \cdot x) \right] dx$<br>$= \int_{-2}^{1} \left[ -x^2 - x + 2 \right] dx = 4{,}5 \text{ FE}$ |
| Warum ist es für die Berechnung egal, ob die von **zwei Graphen** eingeschlossene **Fläche über, unter oder zum Teil über/unter der x-Achse** liegt? | Jede von zwei Graphen eingeschlossene Fläche lässt sich so verschieben, dass sie über der x-Achse liegt.<br>Dazu müssten beide Graphen um den gleichen Summanden (z. B. c) in Richtung der y-Achse verschoben werden.<br>Da sich dieser Summand beim Bilden der Differenzfunktion ohnehin wieder aufhebt, kann gleich mit den beiden Ausgangsfunktionen gerechnet werden.<br>$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$<br>$= \int_a^b [f(x) + c - (g(x) + c)]dx$ |

Was ist zu beachten, wenn die von zwei oder mehr Funktionsgraphen **eingeschlossene Fläche aus mehreren Teilflächen** besteht?

**Beispiel:**

Berechne die Fläche, die von den Graphen der Funktionen

$f:\ f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$ und

$g:\ g(x) = 3x$

eingeschlossen wird.

Die Gesamtfläche ist als Summe der einzelnen Teilflächen zu ermitteln.

Man kann alle Teilflächen mit der gleichen Differenzfunktion bilden und setzt grundsätzlich Betragsstriche.

Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen.

**Beispiel:**

Schnittstellen: $x_1 = 4;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2$

$$A = \left| \int_{-4}^{0} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right)dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right)dx \right|$$

$$= \frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3}\ \text{FE}$$

---

Wie kann man für eine Funktion überprüfen, ob ihr **Graph** zwischen zwei Nullstellen **über oder unter der x-Achse** verläuft?

Wie kann man feststellen, welcher von zwei Graphen eine eingeschlossene Fläche „oben“ bzw. „unten“ begrenzt?

**Beispiel**:

Prüfe, welcher der Graphen die eingeschlossene Fläche „oben“ begrenzt:

$f:\ f(x) = 2x + 1$ und

$g_a : g_a(x) = 2x^2 - 4ax - 2a - 0{,}5$ ; $a \in R,\ a > 0$

Vorausgesetzt die Funktionen seien alle stetig, dann kann man für einen x-Wert zwischen den Nullstellen den Funktionswert berechnen.

Ist dieser kleiner (größer) als Null, so liegt der Graph unter (über) der x-Achse.

Analog kann man für eine Stelle x zwischen den Schnittstellen zweier Graphen die Funktionswerte vergleichen. Gilt $f(x) > g(x)$, begrenzt der Graph von f die Fläche „oben“, anderenfalls unten.

**Beispiel**:

Schnittstellen sind $x_1 = 2a + 1{,}5$ und $x_2 = -0{,}5$

Wegen $x_2 < 2a + 1{,}5$ für alle $a > 0$ und

$f(2a) > g(2a)$ begrenzt der Graph von f „oben“.

---

Was besagt (vereinfacht) der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**?

**Beispiel:**

Berechnen Sie die Fläche, die von der x-Achse, den Geraden $x = 3$ und $x = 12$ und der Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{3x} + x^2$ vollständig begrenzt ist.

Der Hauptsatz stellt den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung her.

Ist f über einem Intervall I=[a;b] stetig, so gilt:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, wobei $F'(x) = f(x)$ ist.

**Beispiel**:

$$A = \int_3^{12} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_3^{12} = (6 + 144) - (3 + 9)$$

= 138 FE

Ist die folgende Aussage **wahr** oder **falsch**?
**„Ein bestimmtes Integral ist ein Flächeninhalt.“**

Die Aussage ist falsch.

Nach Definition ist das bestimmte Integral eine reelle Zahl, die nur von der Funktion f und den Integrationsgrenzen abhängt.

---

Welche der Aussagen sind **wahr** und welche sind **falsch**?

**1.** $f(x) = f(-x) \Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

**2.** $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx$

**3.** $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx$

**1.** Die Aussage ist falsch.
Richtig muss es heißen:

$f(x) = -f(-x))$ oder $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

**2.** Die Aussage ist falsch.
Richtig muss es heißen:

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$

**3.** Die Aussage ist richtig, und gilt für beliebige Anordnungen von a, b, und c.

---

Wie integriert man eine Funktion f, bei der der Funktionsterm (Integrand) linear verkettet vorkommt? **(Integration durch lineare Substitution)**

**Beispiele:**

a) $\int (3x-1)^4\,dx$

b) $\int 2e^{-0,5x+1}dx$

c) $\int \sqrt{3-8ax}\;dx$

Man integriert die äußere Funktion und behält die innere (lineare) Funktion bei. Zusätzlich ist durch den Anstieg der linearen (inneren) Funktion zu dividieren bzw. mit dem Reziproken des Anstiegs zu multiplizieren.
**Beispiele:**

$$a)\ \int (3x-1)^4\,dx = \frac{1}{5}(3x-1)^5 \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{1}{15}(3x-1)^5 + C$$

$$b)\ \int 2e^{-0,5x+1}dx = 2e^{-0,5x+1} \div (-0,5) + C = -4e^{-0,5x+1} + C$$

$$c)\ \int \sqrt{3-8ax}\;dx = \int (3-8ax)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(3-8ax)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{-8a} + C$$

$$= -\frac{1}{12a}\sqrt{(3-8ax)^3} + C$$

| | |
|---|---|
| Wie bestimmt man das **Volumen eines Rotationskörpers**, der durch **Rotation** einer Fläche **um die x-Achse** entsteht?<br><br>**Beispiel**:<br>Der Graph der Funktion $f(x)=e^{x+1}-1$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche.<br>Berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht. | Für das Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse gilt:<br>$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$.<br>Dabei sind a und b die x-Werte, die die rotierende Fläche „links“ und „rechts“ begrenzen.<br>**Beispiel**: Nullstelle von f: $x_0=-1$<br>$V=\pi\int_{-1}^{0}(e^{2x+2}-2e^{x+1}+1)\,dx$<br>$=\pi\left[0{,}5e^{2x+2}-2e^{x+1}+x\right]_{-1}^{0}=\pi\,(0{,}5e^2-2e+2{,}5)\approx 3{,}9\,VE$ |
| Was versteht man unter **partieller Integration (Produktintegration)**?<br>Wie geht man dabei vor?<br><br>**Beispiel:**<br><br>Berechne $\int(5x\cdot\ln(2x))\,dx$. | Mithilfe der partiellen Integration kann man die Stammfunktion eines Produktes ermitteln. Dabei bildet man von einem Faktor die Ableitung und von dem anderen eine Stammfunktion mit dem Ziel, das „neue Produkt“ aus diesen beiden dann integrieren zu können.<br>Es gilt:<br>$\int(u(x)\cdot v'(x))dx=u(x)\cdot v(x)-\int(u'(x)\cdot v(x))dx$<br>**Beispiel**<br>$u(x)=\ln(2x)\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ ; $v'(x)=5x\Rightarrow v(x)=\frac{5}{2}x^2$<br>$\int(5x\cdot\ln(2x))\,dx=\frac{5}{2}x^2\ln(2x)-\int\left(\frac{5}{2}x\right)dx$<br>$=\frac{5}{2}x^2\left(\ln(2x)-\frac{1}{2}\right)$ |
| Wie lässt sich die **Kettenregel für die Differentiation** zur Berechnung von **Integralen** nutzen **(Substitution)**?<br><br>**Beispiel:**<br><br>Berechne $\int(5x^2\sqrt{-x^3+1})dx$. | Differentiationsregel für verkettete Funktionen: wenn **f(x) = h(g(x)) → f’(x) = h’(g(x))·g’(x)**.<br>Lässt sich der **Integrand** in die Form **f(x)=h(g(x))·g’(x)** bringen, so kann man durch Rückwärtsarbeiten anhand der Kettenregel der Differentiation auf die Stammfunktion **F(x) = H(g(x))** schließen.<br>Es muss also nur die Stammfunktion der „äußeren“ Funktion h(z), mit z=g(x), gebildet werden. Die „innere“ Funktion g(x) wird dadurch berücksichtigt, dass ihre zuvor vorhandene Ableitung „verschwindet“.<br>**Beispiel:**<br>$h(g(x))=\sqrt{-x^3+1}$; $z=g(x)=-x^3+1$; $g'(x)=-3x^2$<br>$h(z)=\sqrt{z}$ ; $H(z)=\frac{2}{3}\sqrt{z^3}$<br>$\int 5x^2\sqrt{-x^3+1}\;dx=-\frac{5}{3}\cdot\int\left(-3x^2\sqrt{-x^3+1}\right)dx$<br>$=-\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(-x^3+1)^3}\;=-\frac{10}{9}\sqrt{(-x^3+1)}$ |