

Handreichung zur Themenkiste

Inhaltsverzeichnis

1	Worum es geht	2
2	Lernumgebungen dieser Themenkiste - Bezug zum Rahmenlehrplan	9
3	Grundsätzliche didaktische und methodische Überlegungen für den Einsatz einer Lernumgebung	14
4	Umgang mit sprachlichen Hilfen.....	15
5	Materialliste	16
6	Evaluation.....	17
7	Literatur / Links	18

1 Worum es geht

Die Themenkiste „Formen und Flächen“ enthält sechs Lernumgebungen. Das Kernstück jeder Lernumgebung sind die vernetzten Aufgaben, die auf dem Aufgabenblatt (LU) zusammengestellt wurden. Sie sind mathematisch fundiert und reichhaltig genug, um alle Kinder zu Entdeckungen und neuen Erkenntnissen anzuregen. Die Einstiegsaufgabe in die Lernumgebung ist so konzipiert, dass alle Kinder sie bewältigen können; gleichzeitig hält die Lernumgebung auch anspruchsvollere Anforderungen bereit. Alle Kinder befassen sich mit demselben Themenkomplex und können ihrem unterschiedlichen Lern- und Arbeitstempo entsprechend arbeiten. Auch wenn am Ende nicht alle gleich weit sind, gibt es genügend gemeinsame Sprech- anlässe: Durch das Präsentieren und den Austausch über individuelle Lösungswege werden die Kinder angeregt, ihr eigenes Handeln zu reflektieren. Sie lernen von- und miteinander. Die Lernumgebungen stellen keine Abfolge einer Aufgabenreihe dar, sondern jede Lernumgebung steht für sich. Sie bereichern den Unterricht zum jeweiligen Thema.

Ebene geometrische Formen spielen im Mathematikunterricht der Grundschule eine bedeutende Rolle. Dabei stehen neben der Begriffsbildung und der Entwicklung kopfgeometrischer Fähigkeiten die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen wie Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren und Problemlösen im Mittelpunkt. Die Geometrie bietet viel Spielraum für motivierende, ästhetische und fächerverbindende Inhalte.

Der Erarbeitung elementarer geometrischer Begriffe und ihrer Festigung kommt bereits im Anfangsunterricht große Bedeutung zu. In den Lern- umgebungen LU 1, LU 2 und LU 5 steht die Erarbeitung und Festigung geometrischer Begriffe im Mittelpunkt.

Man kann vier Kategorien geometrische Begriffe unterscheiden¹:

- Objekte: Kreis, Dreieck, Viereck, Gerade, Strecke, Seite, Winkel,...
- Relationen: parallel, senkrecht, kongruent, ...
- Abbildungen: Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung, Streckung,...
- Maße: Länge, Flächeninhalt, Umfang, Winkelgröße²

Viele geometrische Begriffe sind den Kindern bereits aus dem Alltag bekannt. „In der Grundschule werden geometrische Begriffe zumeist ohne Definition oder genaue Beschreibung gebildet - vor allem dann, wenn die Begriffe den Kindern aus Ihrer Alltagserfahrung bekannt sind. Durch vielfältige Handlungen, Materialerkundungen oder Eigenproduktionen, deren Herstellung sprachlich begleitet oder im Anschluss an das eigene Tun kommentiert

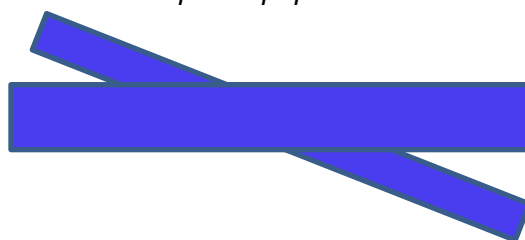
¹ Weigand, Hans-Georg et al.(2018): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1, Heidelberg, Springer, S. 11

² Im Rahmenlehrplan finden sich diese Begriffe in der L2: Größen und Messen, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin / Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.): Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik. Berlin, Potsdam 2023

wird, sammeln die Kinder weitere Erfahrungen und bauen ihre eigenen Begriffssysteme auf. Neu erworbene Begriffe binden sie in bereits bestehende semantische Netze ein und speichern neue Wissensinhalte in Bezug zu ihrem bisherigen Wissen.“³

Für die Einführung von Begriffen lassen sich verschiedene Vorgehensweisen unterscheiden. Grassmann et al.(2010)⁴ unterscheiden zwischen drei Arten der Begriffseinführung:

- induktives Erarbeiten geometrischer Begriffe: Die Kinder vergleichen Repräsentanten und Nichtrepräsentanten und bilden so Klassen.
- deduktives Erarbeiten geometrischer Begriffe: Eine Definition wird mit dem Oberbegriff und spezifischen Merkmalen vorgegeben.
Beispiel: *Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist eine Raute.*
- konstruktives Erarbeiten eines geometrischen Begriffs: Mit den Kindern wird ein Repräsentant des Begriffs hergestellt und daran die Merkmale erarbeitet, z. B. *Lege zwei Streifen aus Transparentpapier wie im Bild übereinander. Das Viereck, das entsteht, heißt Parallelogramm. Welche Eigenschaften hat es?*



Franke⁵ stellt das Van-Hiele-Modell zum Verständnis geometrischer Begriffe vor. Es unterscheidet fünf Niveaustufen, von denen die ersten drei im Mathematikunterricht der Grundschule besonders relevant sind.

1. Niveaustufe: räumlich-anschauliches Denken
Die Objekte werden ganzheitlich erfasst, ohne bewusst auf Eigenschaften einzugehen. „*Das ist ein Rechteck.*“
2. Niveaustufe: analysierend-beschreibendes Denken
Die Kinder kennen die Eigenschaften und können die Klassifizierung begründen. „*Das Viereck ist eine Raute, weil es vier gleich lange Seiten hat.*“
3. Niveaustufe: abstrahierend-relationales Denken
Die Kinder können Beziehungen zwischen einzelnen Objekten herstellen. „*Jedes Rechteck ist auch ein Parallelogramm.*“
4. Niveaustufe: schlussfolgerndes Denken
5. Niveaustufe: strenges abstrakt-metamathematisches Denken

³ Franke, Marianne; Reinhold, Simone (2016): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 129

⁴ Grassmann et al. (2010), Mathematikunterricht: Kompetent unterrichten in der Grundschule. Hohengehren: Schneider-Verlag, S. 134ff

⁵ Franke, Marianne; Reinhold, Simone (2016): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 136ff

In der Mathematikdidaktik ist man sich darüber einig, dass das aktive Handeln grundlegend für den Erwerb geometrischer Begriffe ist, aber dabei stets ihre Eigenschaften betrachtet werden müssen.⁶ Die Auseinandersetzung mit geometrischen Inhalten bietet vielfältige Gelegenheiten zum Handeln mit Material (Legen, Schneiden, Falten, Zeichnen). Der Umgang mit konkretem Material und der ästhetische Gehalt erleichtern auch Kindern mit Schwierigkeiten im Rechnen den Zugang zu mathematischen Fragestellungen.

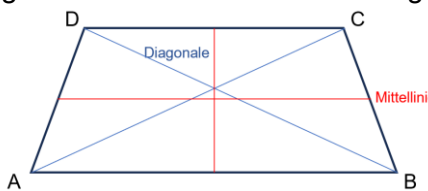
In diesem Sinne steht die Beschäftigung mit ebenen geometrischen Formen und ihren Eigenschaften im Mittelpunkt mehrerer Lernumgebungen dieser Themenkiste.

Im Bewusstsein, dass es sich beim handelnden Umgang mit Formen aus Papier oder Kunststoff immer um Körper handelt, wird im Folgenden aus Gründen der sprachlichen Vereinfachung und der didaktischen Reduktion der Begriff „Fläche“ genutzt.


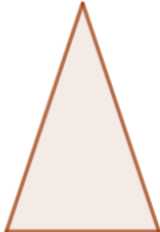


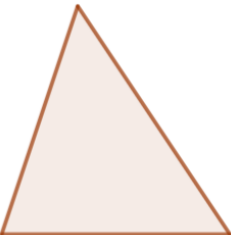


Definition wichtiger Begriffe, die in den Lernumgebungen dieser Themenkiste verwendet werden:

Dreieck	Ein Dreieck ist eine ebene geometrische Figur mit drei Ecken und drei Seiten.
Viereck	Ein Viereck ist eine ebene geometrische Figur mit vier Ecken und vier Seiten.
Trapez	Ein Trapez ist ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten.
Parallelogramm	Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten.
Drachenviereck	Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem jeweils zwei Nachbarseiten gleich lang sind.
Rechteck	Ein Rechteck ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln.
Raute	Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten.
Quadrat	Ein Quadrat ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln und vier gleich langen Seiten.
Kreis	Der Kreis ist eine ebene Figur, bei der jeder Punkt der Kreislinie den gleichen Abstand zum Mittelpunkt hat.
Seite	Eine Seite ist eine Strecke, die die Eckpunkte eines Polygons (Vielecks) verbindet.

⁶ Franke, Marianne; Reinhold, Simone (2016): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 144

<p>Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Eigenschaften von Vierecken:</p>  <p>Eigenschaft</p>	Unregelmäßiges Viereck	Trapez	gleichschenkliges Trapez	Drachenviereck	Parallelogramm	Rechteck	Raute (Rhombus)	Quadrat
Die ebene Figur hat vier Ecken und vier Seiten.	x	x	x	x	x	x	x	x
Es gibt mindestens ein Paar paralleler Seiten.		x	x		x	x	x	x
Es gibt zwei Paare paralleler Seiten.					x	x	x	x
Je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang.				x			x	x
Mindestens ein Paar gegenüberliegender Seiten ist gleich lang.			x		x	x	x	x
Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.					x	x	x	x
Alle Seiten sind gleich lang.							x	x
Die Figur ist achsensymmetrisch.			x	x		x	x	x
Anzahl der Spiegelachsen:			1	1		2	2	4
Die Figur ist punktsymmetrisch.					x	x	x	x
Die Diagonalen halbieren sich.				Eine Diagonale wird halbiert.	x	x	x	x
Die Diagonalen sind senkrecht zueinander.				x			x	x
Die Diagonalen sind gleich lang.						x		x
Die Mittellinien halbieren sich.		x	x	x	x	x	x	x
Die Mittellinien sind senkrecht zueinander.			x				x	x
Die Mittellinien sind gleich lang.								x
Alle benachbarten Seiten bilden rechte Winkel.						x		x
Die Figur hat mindestens ein Paar gleich großer Winkel.			x	x	x	x	x	x
Die Figur hat zwei Paare gleich großer Winkel.			x		x	x	x	x
Die Figur hat vier gleich große Winkel.						x		x

Dreiecke können anhand der Seitenlängen und / oder der Innenwinkel klassifiziert werden. Die innenliegenden Winkel werden Innenwinkel genannt. Die folgende Tabelle zeigt alle möglichen Kombinationen mit jeweils einem Beispiel.

Winkel \ Seitenlängen	spitzwinklig alle drei Innenwinkel sind spitze Winkel	rechtwinklig ein Innenwinkel ist ein rechter Winkel	stumpfwinklig ein Innenwinkel ist ein stumpfer Winkel
gleichseitig alle drei Seiten sind gleich lang		-	-
gleichschenkelig zwei Seiten sind gleich lang			
verschiedenseitig alle drei Seiten sind unterschiedlich lang			

Im Mittelpunkt der Lernumgebungen dieser Themenkiste steht neben der Begriffsbildung (LU 1, LU 2 und LU 5) die Ermittlung von Flächeninhalten (LU 3, LU 4, und LU 6).

Ausgehend von Werken von Urs Wehrli⁷ knüpft die **Lernumgebung 1 „Aufräumen!“** (Niveaustufen A und B) an die Alltagserfahrungen der Kinder an. Ziel ist es, eine Kategorisierung für die ebenen geometrischen Grundformen Kreis, Dreieck und Viereck sowie die Spezialfälle Rechteck und Quadrat zu erarbeiten. Ausgangspunkt ist ein Bild, das die Kinder aus verschiedenen geometrischen Formen legen und anschließend aufräumen. Dabei werden verschiedene Sortierkriterien erarbeitet und die geometrischen Formen und ihre Eigenschaften benannt. In weiteren Aufgaben werden die geometrischen Begriffe gefestigt. Mit den Formen legen die Kinder vereinfachte Sudoku-Formen, die „Magischen Regale“.

Die **Lernumgebung 2 „Flächen-Familien“** für die Niveaustufen A und B knüpft an vorschulische Grunderfahrungen im Klassifizieren und Sortieren an. Die Kinder sortieren unterschiedliche Flächenformen nach selbst gewählten Kriterien z. B. nach der Anzahl der Ecken oder nach der Farbe. Weil die Kinder aufgefordert sind, über ihre Sortierungen zu kommunizieren und zu argumentieren, z. B. warum eine Fläche nicht zur „Familie“ gehört, kann die Lernumgebung sowohl zur Einführung geometrischer Grundbegriffe als auch zur Vertiefung genutzt werden. Durch den offenen Ansatz ist sie für den Einsatz in jahrgangsgemischten Lerngruppen besonders geeignet.

In der **Lernumgebung 3 „Schulgarten-Wettbewerb“** für die Niveaustufe C wenden die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über den Flächeninhalt in einem Sachkontext an. Sie bestimmen den Flächeninhalt des Schulgartens mithilfe von Einheitsquadraten. Anschließend planen sie für die vorgegebene Fläche einen Schulgarten. Im Anschluss treffen sie anhand der Wettbewerbskriterien eine Entscheidung für den besten von drei Schulgartenentwürfen.

In der **Lernumgebung 4 „Vierecke am Geobrett“** für die Niveaustufen C und D erzeugen die Kinder unterschiedliche Vierecke auf dem Geobrett und berechnen ihren Flächeninhalt in Einheitsquadraten. Sie wiederholen und festigen ihr Wissen über Vierecke und ihre Eigenschaften. Zur Bestimmung des Flächeninhalts müssen die Vierecke in Teilflächen zerlegt und diese mitunter neu zusammengesetzt werden. Dabei wird das räumliche Vorstellungsvermögen geschult. Die Lernenden rechnen mit ganzen Einheitsquadraten und Bruchteilen davon.

Das räumlich-visuelle Vorstellungsvermögen wird auch in der **Lernumgebung 5 „Quadrate in Dreiecke zerlegen“** (Niveaustufen C und D) gefördert. Die Kinder entdecken, dass sich aus einer Flächenform andere Flächenformen entwickeln lassen. Handelnd erfahren sie Zusammenhänge zur Unterscheidung von Dreiecken (Seitenlänge, Winkelgröße). Die Kinder lernen verschiedene Begriffe zur Beschreibung von Dreiecken kennen. Um das Begriffslernen zu unterstützen, stehen sowohl Wortkarten als auch Übungen in einer LearningApp zur Verfügung. Das Geobrett oder die entsprechende App wird von den Kindern benutzt, um Quadrate in Dreiecke zerlegen. Die gefundenen Dreiecke werden mit Hilfe der Seitenlängen und/oder den Innenwinkeln klassifiziert. Die Figur-Grund-Wahrnehmung und die Raumvorstellung der Kinder werden durch eine herausfordernde Aufgabe gefördert, denn zum Finden der Lösung müssen auch kleinere Dreiecke zu einem großen Dreieck zusammengefasst werden.

⁷ <https://www.kunstaufraeumen.ch/de/>

In der **Lernumgebung 6 „Nach dem Hochwasser“** (Niveaustufe D) wenden die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über den Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken und aus Rechtecken zusammengesetzten Flächen in einem Sachkontext an. Sie agieren als Expertinnen und Experten und beraten eine Familie zur Auswahl eines neuen Weidegrundstücks. Der Sachkontext bezieht sich auf die Überschwemmungen im Ahrtal aus dem Sommer 2021. Die Lernumgebung bietet somit eine Verknüpfung zu den übergreifenden Themen nachhaltige Entwicklung und Klimawandel.

Die Lernumgebungen leisten einen Beitrag zur Sprach- und Medienbildung. Empfohlene digitale Anwendungen wurden im Hinblick auf die angestrebte Kompetenz ausgewählt. Die Apps dienen der Unterstützung der Begriffsbildung. Die haptischen Erfahrungen sind allerdings unabdingbar für die Entwicklung räumlichen Denkens und nicht durch Apps zu ersetzen.

Die Lernumgebungen der Themenkiste „Formen und Flächen“ sind für die Niveaustufen A bis D konzipiert.

2 Lernumgebungen dieser Themenkiste - Bezug zum Rahmenlehrplan

Das Kapitel 3 jeder Lernumgebung nimmt detailliert Bezug zum Rahmenlehrplan.

Lernumgebung/Lernangebot	Bezug zum Rahmenlehrplan	Inhalte	Niveau
LU 1 „Aufräumen!“	Raum und Form	<ul style="list-style-type: none"> • Gestalten von Bildern aus geometrischen Formen • Klassifizierung geometrischer Flächen • Begriffsbildung • Legen „Magischer Regale“ 	A/B
LU 2 „Flächen-Familien“	Raum und Form	<ul style="list-style-type: none"> • Finden und Vergleichen von Eigenschaften geometrischer Flächenformen • Klassifizierung geometrischer Flächen • Begriffsbildung 	A/B
LU 3 „Schulgarten-Wettbewerb“	Raum und Form Größen und Messen	<ul style="list-style-type: none"> • Ermitteln des Flächeninhalts durch Auszählen von Einheitsquadraten • Messen von Längen mit verschiedenen Messgeräten (Vorübung) • Beschreiben die Lagebeziehungen von Objekten • Bewerten von Schulgartenentwürfen nach vorgegebenen Kriterien 	C
LU 4 „Vierecke am Geobrett“	Raum und Form Größen und Messen	<ul style="list-style-type: none"> • Spannen unterschiedlicher Vierecke auf dem Geobrett • Bestimmen des Flächeninhalts von Vierecken • Herstellen von Vierecken mit einem vorgegebenen Flächeninhalt 	C/D
LU 5 „Quadrate in Dreiecke zerlegen“	Raum und Form	<ul style="list-style-type: none"> • Zerlegen von Quadraten durch Falten in gleich große rechtwinklige Dreiecke • Begründen mathematischer Aussagen • möglichst viele verschiedene Zerlegungen eines Quadrates auf dem Geobrett in Dreiecke finden und dann ausgewählte Dreiecke bestimmen 	C/D
LU 6 „Nach dem Hochwasser“	Größen und Messen	<ul style="list-style-type: none"> • Bestimmen von Flächeninhalt und Umfang rechteckiger und aus Rechtecken zusammengesetzter Flächen • Berechnungen der Kosten für ein Grundstück • Bewertung von Grundstücken auf der Grundlage selbst entwickelter Kriterien • Begründen der Entscheidung 	D

Prozessbezogene mathematische Kompetenzbereiche ⁸			
Die Schülerinnen und Schüler:			Lernumgebungen
K1 Mathematisch argumentieren	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> • hinterfragen mathematische Aussagen und prüfen diese auf Korrektheit • stellen Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen auf • formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach 	LU 2, LU 3 LU 4, LU 5
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> • geben vertraute Argumentationen wieder (wie Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze) • formulieren typische Fragen, die auf Argumentationen zielen („Wie verändert sich ...?“, „Ist das immer so ...?“) • begründen angemessen auf Basis von Alltagswissen 	LU 5
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> • entwickeln und erläutern überschaubare mehrschrittige Argumentationen • erläutern Lösungswege und prüfen sie u. a. auf Konsistenz • bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes • erläutern mathematische Zusammenhänge, Ordnungen und logische Strukturen 	LU 6
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> • entwickeln und erläutern komplexe Argumentationen • bewerten verschiedene Argumentationen (z. B. in Texten und Darstellungen aus digitalen Medien) • stellen selbstständig Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und äußern begründet Vermutungen 	
K2 Probleme mathematisch lösen	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> • entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind • entwickeln Lösungsstrategien (z. B. systematisches Probieren, Analogien nutzen), wählen heuristische Hilfsmittel aus und nutzen diese (z. B. Tabellen) • überdenken Vorgehensweisen und passen diese gegebenenfalls an 	LU 1, LU 2, LU 3, LU 5, LU 6
	Niveau D - H	<ul style="list-style-type: none"> • Reproduzieren • geben Heurismen an (z. B. Skizze erstellen, systematisch probieren) • lösen einfache Probleme mit bekannten Heurismen (z. B. systematisches Probieren) 	LU 4
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> • formulieren Problemstellungen • wählen geeignete Heurismen zur Lösung entsprechender Probleme aus • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen 	
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> • lösen anspruchsvolle, komplexe oder offen formulierte Probleme • reflektieren das Finden von Lösungsideen, vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege 	LU 6

⁸ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik, S. 21ff, Berlin, Potsdam 2023

K3 Mathematisch modellieren	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> entnehmen die für die mathematische Bearbeitung einer Fragestellung relevanten Informationen u. a. aus Texten, Darstellungen, der Lebenswirklichkeit übersetzen Sachprobleme in die Sprache der Mathematik und prüfen und interpretieren die mathematische Lösung in Bezug auf die Ausgangssituation formulieren zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben 	LU 6
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> ordnen einfachen Realsituationen aus dem Alltag mathematische Objekte zu nutzen bekannte und direkt erkennbare Modelle (z. B. Proportionalität bzw. Dreisatz) prüfen die Passung der Resultate zur Aufgabenstellung 	LU 6
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> wählen ein geeignetes mathematisches Modell aus nehmen Mathematisierungen vor, die mehrere Schritte erfordern interpretieren Ergebnisse einer Modellierung prüfen Ergebnisse einer Modellierung auf Plausibilität in Bezug auf die Ausgangssituation ordnen einem mathematischen Modell passende Situationen zu 	
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> modellieren komplexe oder unvertraute Situationen und entwickeln ggf. eigene Modelle reflektieren und beurteilen verwendete mathematische Modelle kritisch, z. B. in Bezug auf die Realsituation entscheiden, ob der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen werden sollten 	
K4 Mathematische Darstellungen verwenden	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> wählen geeignete Darstellungsformen für das Bearbeiten mathematischer Fragestellungen aus und nutzen und entwickeln diese übertragen eine Darstellungsform in eine andere vergleichen Darstellungsformen miteinander und bewerten diese 	LU 4
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen interpretieren vertraute Darstellungen 	
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> wählen eine Darstellung passend zur Problemstellung aus wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt 	LU 5
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> entwickeln eigene Darstellungen analysieren und beurteilen verschiedene Formen der Darstellung entsprechend ihres Zwecks interpretieren nicht vertraute Darstellungen und beurteilen ihre Aussagekraft 	

K5 Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen umgehen	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> übersetzen symbolische und formale Sprache in Alltagssprache und umgekehrt verwenden mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden mathematische Objekte (z. B. Zahldarstellungen, Terme, Ecken, Kanten, Tabellen, Diagramme) bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben- und Problemstellungen sicher und flexibel setzen mathematische Werkzeuge (z. B. Zeichenwerkzeuge, digitale Werkzeuge) sachgerecht ein 	LU 1, LU 2, LU 3, LU 4, LU 5, LU 6
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung) gehen mit vertrauten mathematischen Objekten (z. B. Strecken, Termen, Gleichungen) um 	
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> führen komplexere Lösungs- und Kontrollverfahren aus beschreiben die innere Struktur mathematischer Objekte (z. B. von Termen) und gehen flexibel und sicher mit ihnen um 	
K6 Mathematisch kommunizieren	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht erläutern mathematische Zusammenhänge vollziehen Lösungen und Lösungswege anderer nach, hinterfragen und entwickeln diese gemeinsam weiter 	LU 1, LU 2, LU 3
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> formulieren einfache mathematische Sachverhalte mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe mündlich und schriftlich entnehmen Informationen aus einfachen mathematikhaltigen Texten und Abbildungen reagieren sach- und adressatengerecht auf Fragen und Kritik zu eigenen Lösungen 	LU 6
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> stellen Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse und Verfahren verständlich dar erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathematikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen Verwenden die mathematische Fachsprache situationsangemessen und erklären ihre Bedeutung gehen fachbezogen auf Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten ein (z. B. konstruktiver Umgang mit Fehlern, Weiterführen mathematischer Ideen) 	LU 4, LU 5, LU 6
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> präsentieren sachgerecht komplexe mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich interpretieren und beurteilen komplexe mathematische Texte sinnentnehmend vergleichen und bewerten Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten sachlich und fachlich angemessen 	

K7 Mit Medien mathematisch arbeiten	Niveau A - C	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen digitale Medien (z. B. Videos, Textverarbeitung, Präsentationsmedien) unter Anleitung • nutzen analoge und digitale mathematikspezifische Werkzeuge (z. B. zum räumlichen Vorstellungsvermögen, zur Darstellung von Daten), um mathematische Sachverhalte zu veranschaulichen • wenden Algorithmen und das Zerlegen und Lösen von Problemen im Sinne der informatischen Grundbildung an • strukturieren Informationen, stellen sie in unterschiedlichen Repräsentationen dar und interpretieren sie kritisch 	LU 2, LU 4
	Niveau D - H	Reproduzieren <ul style="list-style-type: none"> • verwenden allgemeine Medien zur Kommunikation (z. B. Recherche in Fachliteratur oder Internet, Nutzung von Lernplattformen) und zur Präsentation mathematischer Inhalte in Situationen, in denen der Einsatz geübt wurde • nutzen analoge und digitale Lernumgebungen zum Lernen von Mathematik • nutzen analoge und digitale Mathematikwerkzeuge (z. B. wissenschaftlichen Taschenrechner), die aus dem Unterricht vertraut sind • ziehen Informationen aus mathematikhaltigen Darstellungen in Alltagsmedien 	LU 6
		Zusammenhänge herstellen <ul style="list-style-type: none"> • nutzen analoge und digitale Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, Stochastiktool) zum Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren und Darstellungswechseln etc. • nutzen weitere mathematikspezifische Medien (z. B. Apps zur Lernstandsbestimmung, Erklärvideos zum Verstehen, Programme zum Üben) zum selbstgesteuerten Lernen und Anwenden von Mathematik • nutzen bekannte Algorithmen mit digitalen Mathematikwerkzeugen • vergleichen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten wählen analoge und digitale Medien kriteriengeleitet je nach Zielsetzung bewusst aus	
		Verallgemeinern und Reflektieren <ul style="list-style-type: none"> • reflektieren Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung mathematikspezifischer Medien, auch im Vergleich zwischen analogem und digitalem Medium • konzipieren und erstellen selbst analoge und digitale Medien um mathematische Sachverhalte darzustellen oder zu bearbeiten und stellen ihre Ergebnisse vor (z. B. Präsentation, Videos) • beurteilen analoge und digitale Medien kriteriengeleitet je nach Zielsetzung • beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten • setzen bekannte mathematische Verfahren mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (z. B. Tabellenkalkulation) als Algorithmus um nutzen Algorithmen mit Hilfe digitaler Werkzeuge, um den jeweils zugrundeliegenden mathematischen Inhalt zu untersuchen	

3 Grundsätzliche didaktische und methodische Überlegungen für den Einsatz einer Lernumgebung

1. Struktur von Lernumgebungen:

Unter einer Lernumgebung verstehen wir eine Arbeitssituation, bei der alle Kinder dieselbe Aufgabe bearbeiten, die aus mehreren Teilaufgaben besteht. Die Aufgabenstellung berücksichtigt die Heterogenität der Lernenden, bietet nach einer niedrigen Eingangsschwelle vertiefende Teilaufgaben auf unterschiedlichem Verständnis- und Abstraktionsniveau. Damit bietet sie allen Lernenden einen individuellen Lernzuwachs und begünstigt das aktiv-entdeckende Lernen.

2. Differenzierung:

Entsprechend dem Prinzip der natürlichen Differenzierung (vgl. Wittmann 2017)⁹ ist die Aufgabenstellung so gewählt, dass sie von Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen auf verschiedenem Lernniveau bearbeitet werden kann.

3. Eigenaktivität:

Der individuelle Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler steht im Mittelpunkt. Sie entscheiden selbst über den Einsatz von Arbeitsmitteln und die Art der Dokumentation. So können Lösungswege als Rechnung, Skizze oder in beschreibenden Formulierungen festgehalten werden. Dabei gelingt es einigen Kindern auch, zu begründen bzw. Erklärungen für ihren Denk- und Lösungsweg zu finden.

4. Rolle der Lehrkraft:

Aufgabe der Lehrkraft ist es, die Kinder zu beobachten, anzuregen und gegebenenfalls zu beraten. Das kleinschrittige Vormachen und Nachahmen von Verfahren treten in den Hintergrund. Die Lehrkraft muss zulassen, dass am Ende nicht alle Kinder im gleichen Umfang die Aufgabenstellung bewältigt haben. Die unterschiedlichen Denkwege der Kinder, ihre Darstellung und Reflexion treten ins Zentrum. Fehler werden zum Ausgangspunkt, um Lösungswege genauer zu betrachten und erfahren somit Wertschätzung. Ziel ist es, dass alle Kinder Einsicht in mathematische Strukturen gewinnen können, dabei wird das individuelle Arbeits- und Lern-tempo respektiert. Eine Einführung muss sicherstellen, dass jedes Kind die Problemstellung verstanden und einen Zugang zur Aufgabe gefunden hat. Bei der Präsentation der Lösungswege unterstützt die Lehrkraft durch aktives Zuhören und durch adressatengerechtes Übersetzen der Alltagssprache in die Fachsprache. Schülerinnen und Schüler, die keinen Lösungsansatz finden, kann die Lehrkraft mit den angebotenen Tipp-Karten unterstützen.

5. Sprachbildung

Zur Entwicklung der (Fach-)Sprache werden sprachliche Mittel wie z.B. Wortkarten und Satzbausteine angeboten, die auch für die Erstellung von Sprachspeichern genutzt werden können. Sie sollen es den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihre Denk- und Lösungswege zu beschreiben, zu begründen und zu argumentieren.

6. Präsentation:

Der gemeinsame Austausch über die unterschiedlichen Bearbeitungswege einer Aufgabe, mit der sich alle Kinder beschäftigt haben, begünstigt das Lernen voneinander. Ein Vorstellen der Arbeitsergebnisse (z.B. Plakat, Modell, Erklärvideo, Vortrag) in der Gruppe, bei einem Museumsrundgang, in einer Mathekonferenz ist wichtig, damit die Lernenden ihre unterschiedlichen Denkwege reflektieren können. In der Reflexion vertieft sich das mathematische Verständnis. Hier ist das Argumentieren gefragt: Was unterscheidet meinen Weg von dem der anderen Kinder? Worin liegen seine Stärken und Schwächen? Dadurch wird eine Anerkennungskultur etabliert.

⁹ vgl. Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (2017): Handbuch der produktiven Rechenübungen, Band 1. Stuttgart: Ernst Klett, S.180

4 Umgang mit sprachlichen Hilfen

Die Sprachförderung ist Bestandteil des Mathematikunterrichts, der alle Schülerinnen und Schüler beim Aufbau einer flexiblen und sicheren Sprachkompetenz unterstützt. Dabei wird adressatengerecht eine fachbezogene Sprache vermittelt, damit sie sich mündlich wie schriftlich über Entdeckungen und Vorgehensweisen, Strategien und Lösungswege austauschen können.¹⁰

Das **Kapitel 4 jeder Lernumgebung** befasst sich aus diesem Grund mit der Sprachbildung. Unter 4.1 sind Hinweise auf „Sprachliche Stolpersteine“, unter 4.2 eine „Wortliste zum Textverständnis“ und unter 4.3 „Fachbezogener Wortschatz und themenspezifische Redemittel“ aufgeführt.

Die „sprachlichen Stolpersteine“ sind Formulierungen des Aufgabentextes, die durch die Struktur der deutschen Sprache (z. B. die Verwendung zusammengesetzter Nomen, trennbarer Verben, Personal- und Reflexivpronomen, Präpositionen, schwierige Satzkonstruktionen, Genitivbildung etc.) für Schülerinnen und Schüler schwer verständlich sein können.

In einer Tabelle werden bei Bedarf zu den Aufgaben im Originaltext mögliche sprachliche Stolpersteine bewusst gemacht und sprachliche Alternativen vorgeschlagen. Die Lehrkraft hat somit die Möglichkeit, die Aufgabe sprachlich zu vereinfachen und ihrer Lerngruppe anzupassen. Außerdem werden Begriffe und Wörter aufgelistet, die den Lernenden bekannt sein müssen. Der Lehrkraft muss bewusst sein, dass das Verstehen des Textes (Lesekompetenz) die unabdingbare Voraussetzung dafür ist, die Aufgabenstellung der Lernumgebung zu verstehen und zu bearbeiten.

Um eine nachhaltige Sprachförderung zu erzielen, muss eine Wortschatzanalyse erfolgen. Die „Wortliste zum Textverständnis“ führt den fachbezogenen Wortschatz zum Thema auf, der in der Aufgabenstellung vorkommt und dessen Bedeutung zum Verstehen der Aufgabe grundlegend ist. Für die Lernenden kann es hilfreich sein, einen Sprachspeicher (z. B. als Plakat) zu erarbeiten. Hier werden der fachbezogene Wortschatz, themenspezifische Redemittel, Satzmuster und Formulierungshilfen zum Thema sichtbar gemacht. Für die Entwicklung eines Sprachspeichers sind in den Lernumgebungen Anregungen und Materialien enthalten. Um die Lesbarkeit auch für Kinder mit Schwierigkeiten im Lesen zu verbessern, sind die Silben auf den Wortkarten zweifarbig eingefärbt. Die Kennzeichnung der Silben orientiert sich an den Phonemen.

Der Sprachspeicher sollte gemeinsam im Unterrichtsgespräch entwickelt werden.

Sprachsensibler Fachunterricht arbeitet mit dem Sprachstand, den die Lernenden in den Unterricht aktuell mitbringen. Die Schülerinnen und Schüler benutzen anfangs bei der Beschreibung ihres Lösungsweges ihren individuellen (alltagssprachlichen) Wortschatz. Bei der Präsentation der Lösungswege unterstützt die Lehrkraft durch ein aktives Zuhören und durch adressatengerechtes Übersetzen der Alltagssprache in die Fachsprache. Dabei kann sie (z. B. im Sprachspeicher) weitere sprachliche Mittel zur Verfügung stellen und die Lernenden auffordern, mit diesen Mitteln ihre Aussagen zu wiederholen.

Der Abschnitt „Sprachliche Hilfen“ enthält Textbausteine zur Darstellung der Lösung für die Hand der Schülerinnen und Schüler, sofern die Aufgabe dies verlangt. Der Einsatz dieses Arbeitsbogens sollte nicht zu früh erfolgen. Erst nachdem die Schülerinnen und Schüler einen Lösungsansatz entwickelt und den Fachwortschatz im Kontext verstanden haben, kann der Arbeitsbogen „Sprachliche Hilfen zur Darstellung der Lösung“ eingesetzt werden.

¹⁰ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B, S. 4, Berlin, Potsdam 2015

5 Materialliste

Diese Übersicht soll die Verantwortlichen dabei unterstützen, sich schnell einen Überblick zu verschaffen, ob alle Materialien in der Themenkiste vorhanden sind, sodass sie jederzeit einsatzbereit ist. Neben den in digitaler Form vorliegenden Materialien werden für die Durchführung der Lernumgebung folgende Materialien benötigt.

Lernumgebung	Weitere Materialien
LU 1 „Aufräumen!“	pro Paar: <ul style="list-style-type: none"> • mindestens 20 Flächenformen (z. B. Kreise, verschiedene Dreiecke und Vierecke) aus Kunststoff, alternativ: Flächenformen aus farbigem Papier für die „Magischen Regale“: <ul style="list-style-type: none"> • drei verschiedene Formen je dreimal (z. B. je drei gleiche Kreise, Dreiecke und Quadrate)
LU 2 „Flächen-Familien“	pro Kind: <ul style="list-style-type: none"> • verschiedene Flächenformen aus Kunststoff, alternativ: Flächenformen aus farbigem Papier • Notizzettel
LU 3 „Schulgarten-Wettbewerb“	pro Gruppe: Messinstrumente und Zubehör für Vorübung (Zollstock, Maßband, evtl. Tafellineal, Schnur, Messrad, Maßband-App), evtl. Pack- oder Zeitungspapier
LU 4 „Vierecke am Geobrett“	pro Kind: <ul style="list-style-type: none"> • ein Geobrett (5x5), verschieden große Gummibänder Tablets, wenn die LearningApps eingesetzt werden
LU 5 „Quadrate in Dreiecke zerlegen“	pro Kind: <ul style="list-style-type: none"> • ein Geobrett (5x5), verschieden große Gummibänder • ca. 10 Blätter quadratisches Faltpaper/Notizzettel Tablets, wenn die LearningApps eingesetzt werden
LU 6 „Nach dem Hochwasser“	Tablets, wenn die Argumentationswippe eingesetzt wird

6 Evaluation

Die Entwicklung einer Themenkiste ist ein Prozess, zu dem Sie beitragen können. Ihre Erfahrungen aus der Praxis sind uns sehr wichtig, um die Lernumgebungen zu aktualisieren.

Schreiben Sie uns eine E-Mail: Solveg.Schlinske@senbjf.berlin.de oder füllen Sie den Reflexionsbogen aus und senden Sie ihn an die oben angegebene E-Mail-Adresse.

Vielen Dank!

Reflexionsbogen zur Lernumgebung _____ aus der Themenkiste _____			
geführt in Klassenstufe: _____		Datum: _____	
War die Einführung so konzipiert, dass jedes Kind wusste, worum es geht, und selbständig arbeiten konnte?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	Kamen die Schülerinnen und Schüler über die Aufgaben und ihre Lösungen miteinander ins Gespräch?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Konnten alle Kinder die Einstiegsaufgabe lösen?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	Waren die didaktisch-methodischen Hinweise für die Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsdurchführung hilfreich?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Wurden die Schülerinnen und Schüler durch die Aufgaben zum selbstständigen Arbeiten angeregt?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	Waren die sprachlichen Hilfen für den Einsatz in Ihrer Lerngruppe hilfreich?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Waren die Schülerinnen und Schüler durch die Lernumgebung motiviert?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	Haben Sie die Learning Apps im Unterricht eingesetzt?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Waren die Aufgaben verständlich formuliert?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	War der zeitliche Rahmen angemessen?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Bot die Lernumgebung Differenzierungsmöglichkeiten an?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein	Würden Sie die Lernumgebung noch einmal einsetzen?	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Diese Tipps und Anmerkungen habe ich noch:			

7 Literatur / Links

Titel / Autor
Bundesanstalt für Landwirtschaft und Ernährung (2018): Lernort Schulgarten. Projektideen aus der Praxis. Bonn.
Demann, Sina Marie: Ganz schön schief. In: Mathematik differenziert, (2022) 4, S. 30-33
Die Sendung mit der Maus - Herr Wehrli räumt auf: Seurat https://www.wdrmaus.de/filme/sachgeschichten/herr_wehrli_raeumt_auf_seurat.php5 [06.02.2023]
Franke, Marianne; Reinhold, Simone (2016): Didaktik der Geometrie: In der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer
Grassmann et al. (2010), Mathematikunterricht: Kompetent unterrichten in der Grundschule. Hohengehren: Schneider-Verlag
Grundschule Mathematik (2011) 30, Ebene Formen
Grundschule Mathematik (2013) 36, Geometrie und Kunst
Grundschule Mathematik (2017) 52, Kombinatorik trifft Geometrie
Grundschule Mathematik (2020) 67, Dreiecke
Hübner, Katrin, Kögel, Juliane und Wunder, Stephanie (2014): Mathematik 1/2. München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (2022) (Hrsg.) 2022: Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Raum und Form. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Mathe-Ordner_3_-_Gesamtdatei.pdf [28.1.2023]
Jacobey, Sara: Ein Quadrat ist auch ein Trapez. In Grundschule Mathematik (2022) 74, S. 20-23
Maar, Paul, Muggenthaler Eva (2021): Paulas Reisen. München: Tulipan Verlag
Mathematik differenziert (2014) 3, Kunst und Mathematik
Schipper, Wilhelm, Ebeling, Astrid und Dröge, Rotraut: Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr. Bildungshaus Schulbuchverlage 2015
Schipper, Wilhelm, Ebeling, Astrid und Dröge, Rotraut: Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Bildungshaus Schulbuchverlage 2015
Pöhls-Stöwesand, Arne: Das Geobrett. In Grundschule Mathematik (2022) 74, S. 2-3
Rasch, Renate: Falten von Anfang an. In: Grundschule Mathematik, (2014) 40, S. 6-9
Reinhold, Simone: Dreiecke. In: Grundschule Mathematik, (2020) 67, S. 32-35
Reinhold, Simone: Ganz schön spannend! In Grundschule Mathematik (2022) 74, S. 4-7
Roos, Sabrina: Raumvorstellung fördern. In Grundschule Mathematik (2022) 74, S. 24-27

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin / Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.): Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B. Berlin, Potsdam 2015
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin / Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.): Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik. Berlin, Potsdam 2023
Unterhauser, Elisabeth: Ein Dreieck ist dreieckig. In: Grundschule Mathematik, (2020) 67, S. 4-7
Walther, Gerd, van den Heuvel-Panhuizen, Marja., Ganzer, Dietlinde und Köller, Olaf (2008). Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen. 7. Auflage 2016
Weigand, Hans-Georg et al. (2018): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1, Heidelberg, Springer
Weiß, Ben: Aus Vierecken werden Dreiecke. In: Grundschule Mathematik, (2020) 67, S. 14-17
Wehrli, Ursus (2004): Kunst aufräumen. Zürich: Kein & Aber Verlag
Wehrli, Ursus (2006): Noch mehr Kunst aufräumen. Zürich: Kein & Aber Verlag
Wehrli, Ursus: Die Kunst aufzuräumen, das Memospiel. Verlag MeterMorphosen. Frankfurt am Main
Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (2017): Handbuch der produktiven Rechenübungen, Band 1. Stuttgart: Ernst Klett, S.180
https://www.mathlearningcenter.org/apps/geoboard [06.02.2024]
https://www.talu.de/abrisskosten-fuer-nebengebaeude/ [06.02.2024]
https://www.fenceconfigurator.com/berechnungsgrundlage.asp?nocache=1427361748909&mandantID=1&custNo=0 [06.02.2024]
https://kinder.wdr.de/tv/neuneinhalb/neuneinhalb-lexikon/lexikon/u/lexikon-ueberflutungen-100.html [25.11.2022]
https://kinder.wdr.de/tv/neuneinhalb/sendungen/umwelt-und-klima/neuneinhalb-kompakt-ueberschwemmungen-104.html [09.02.2023]
https://argumentationswippe.de/# [24.03.2023]
https://www.berlin.de/special/sharing/urban-gardening/7867848-7854814-schulgaerten.html [09.03.2023]
https://naturdetektive.bfn.de/lexikon/zum-lesen/pflanzen/wildblumen.htm [13.01.2024]
https://www.zdf.de/kinder/logo/hochwasser-deutschland-108.html [01.02.2024]