

Spirolaterale

(LU 6)

Inhaltsverzeichnis

A Hinweise für die Lehrkraft	2
B Lernumgebung	6
C Materialien / Sprachbildung / Lösungen.....	7

1 Einordnung innerhalb des Themenbereichs

Spirolaterale¹ sind geometrische Figuren zu einer festgelegten Zahlenfolge. Die Glieder der Zahlenfolge geben die Schrittweite der einzelnen Züge an. Nachdem ein Streckenzug der angegebenen Länge gezeichnet wurde, wird um eine festgelegte Gradzahl (hier zunächst 90°) im Uhrzeigersinn gedreht, dann der nächste Streckenzug gezeichnet und so weiter. Spirolaterale sind abhängig von der Zahl der Folgenglieder dreh- oder schubsymmetrisch.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen und beschreiben auf Kompetenzstufe D Kongruenzabbildungen (auch Verschiebungen und Drehungen). Sie untersuchen die Beziehungen zwischen Original- und Bildfigur.² Bereits auf Kompetenzstufe C zeichnen sie geometrische Figuren frei Hand oder mit Hilfe von Zeichengeräten.³ Sie analysieren und gestalten geometrische Muster nach vorgegebenen Bildungsregeln.⁴

Die Lernumgebung bietet die Möglichkeit, dass die Kinder sich aktiv mit einem einfachen Algorithmus auseinandersetzen. Sie untersuchen den Zusammenhang zwischen der Zahlenfolge und dem Spirolateral und beschäftigen sich so mit dem Zusammenhang arithmetischer und geometrischer Muster. Durch die Veränderung der Zahlenfolge betrachten sie funktionale Zusammenhänge.

Gleichzeitig erleben sie, wie wichtig es ist, sich genau an den vorgegebenen Algorithmus zu halten. Beim Freihandzeichnen müssen sie möglichst genau arbeiten. Mit relativ einfachen Mitteln lassen sich schöne Figuren erstellen.

Wenn PCs zur Verfügung stehen, können die Kinder mithilfe der Programme experimentieren und vielfältige Betrachtungen durchführen.

Niveaustufe D

2 Didaktisch-methodische Hinweise (praktische Hinweise zur Durchführung)

Zeitdauer: zwei bis drei Doppelstunden

Einführung:

Die Lehrkraft zeigt den Schülerinnen und Schülern einige Beispiele für Spirolaterale, anschließend wird das Herstellen erarbeitet:

Variante A: (Interaktives Board und Beamer stehen zur Verfügung): Ein kurzer [Film](#)⁵ wird zur Demonstration gezeigt und die Kinder erklären anschließend schrittweise das Vorgehen.

¹ Die Idee, Symmetriebetrachtungen an Spirolateralen durchzuführen geht auf einen Artikel von Eichler zurück.

Siehe: Eichler, Klaus-Peter: Kinder erkunden die Drehsymmetrie. In: Mathematik differenziert (2013) 3, S. 36-39

² vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik, S. 49, Berlin, Potsdam 2015

³ ebenda S. 46

⁴ ebenda S. 53

⁵ Bitte laden Sie zum Anzeigen der Filme die gesamte Themenkiste Symmetrie vom Server und extrahieren Sie sie.

Variante B: (Das Abspielen des Films ist nicht möglich): Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten in Partnerarbeit mit Hilfe der Bilder auf dem Arbeitsbogen [LU](#) die Vorgehensweise.

In einer kurzen Reflexionsphase wird gesichert, dass alle Kinder die Regel zum Zeichnen eines Spirolaterals verstanden haben.

Zu 1.:

Jedes Kind zeichnet das Spirolateral 1-2-5 und kontrolliert mit einer zur Verfügung gestellten Lösungsfolie [M3](#).

Zu 2.:

Anschließend zeichnen die Kinder einige Spirolaterale frei Hand. Dabei erfahren sie, dass es wichtig ist, den Algorithmus genau einzuhalten. Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit einem anderen Kind und stellen gemeinsam Betrachtungen zur Symmetrie an.

Das Spirolateral 1 – 2 – 3 – 4 ist nicht geschlossen. Es ist schubsymmetrisch, wie alle Spirolaterale zu vier-, acht-, zwölf-, ... stelligen Zahlenfolgen (bei einem Drehwinkel von 90°). Spirolaterale zu Zahlenfolgen mit nur zwei Zahlen sind Rechtecke.

Zu 3.:

Die Kinder experimentieren mit eigenen Zahlenfolgen. Sie gestalten ein Muster farbig. Kinder, die schnell gearbeitet haben, können auch Spirolaterale auf isometrischem Rasterpapier ([M1](#)) zeichnen. Zum Zeichnen auf Rasterpapier gibt es einen [Anleitungsfilm](#)⁶. Die Doppelstunde endet mit der Präsentation der farbig gestalteten Spirolaterale.

zu 4. und 5. :

In der zweiten Doppelstunde beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe 4. Sie untersuchen, wie sich eine Veränderung der Zahlenfolge auf die Spirolaterale auswirkt. Dazu sind auf dem Arbeitsbogen einige Beispielfragen vorgegeben, die eine Vielzahl von Untersuchungsmöglichkeiten eröffnen. Anschließend können die Kinder Untersuchungen zu eigenen Fragen anstellen. Mögliche Fragen wären z.B.:

- Wie wirkt sich die Anzahl der Zahlenfolgenglieder auf die Spirolaterale aus?
- Wann ist ein Spirolateral geschlossen?
- Warum sind Spirolaterale zu viergliedrige Zahlenfolgen offen?
- Was verändert sich, wenn man ein Spirolateral auf Karo- und auf isometrischem Rasterpapier zeichnet und warum ist das so?
- Wie verändern einzelne Folgenglieder die Form des Spirolaterals?
- Wie verändert der Winkel die Form des Spirolaterals?

Steht den Schülerinnen und Schülern ein PC zur Verfügung, können sie die Untersuchungen mithilfe von Scratch-Programmen (Übersicht unten) durchführen. Durch die Arbeit am PC wird den Lernenden eine Vielzahl von Entdeckungen ermöglicht. Sie können so leicht mit unterschiedlichen Werten experimentieren. Ein kleiner [Film](#)⁶ zeigt ihnen, wie sie mit dem ihre Ergebnisse dokumentieren können.

⁶ Bitte laden Sie zum Anzeigen der Filme die gesamte Themenkiste Symmetrie vom Server und extrahieren Sie sie.

Beispiele für von Schülern entwickelte Fragestellungen zu Spirolateralen zeigt eine im Rahmen des PRIMAS-Projektes aufgezeichnete [Unterrichtsstunde](#)⁷. Auch das hier verwendete [Programm](#)⁸ kann genutzt werden.

Die von den Schülern untersuchten Fragestellungen werden auf Postern dokumentiert und anschließend der Lerngruppe vorgestellt. Dabei kann die Vorlage im Material [M2](#) zur Dokumentation (auch direkt am PC) genutzt werden. Dazu eignet sich eine Präsentation vor der Gruppe oder ein Galerierundgang.

Überblick über die Scratch-Programme, die genutzt werden können:

1. Spirolaterale zu Folgen mit maximal vier Folgengliedern: [Spiro4](#)
2. Spirolaterale zu Folgen mit maximal sieben Folgengliedern: [Spiro7](#)
3. Spirolaterale auf Rasterpapier: [Spiro Raster](#)
4. Spirolaterale mit frei wählbarem Drehwinkel: [Spiro Winkel](#)

Zum Aufrufen der Programme können [QR-Codes](#) genutzt werden.

3 Prozessbezogene mathematische Kompetenzbereiche (siehe Handreichung, Punkt 2)

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen	Mathematisch kommunizieren
1.1.1, 1.1.2,	2.1.1, 2.1.3, 2.3.1		4.2.1, 4.3.1,	5.3.1	6.1.2, 6.1.3, 6.4.1

4 Sprachbildung

4.1 Sprachliche Stolpersteine in der Aufgabenstellung

Es muss sichergestellt werden, dass die Lernenden folgende Begriffe/Wörter verstehen:

experimentieren, gestalten, die eigene Zahlenfolge, das Rasterpapier

⁷ <http://www.primas-project.eu/artikel/de/1380/PD+Module+1%3A+Video/view.do?lang=en> [28.12.2015]

⁸ <http://www.primas-project.eu/artikel/de/1381/PD+Module+1%3A++Applet/view.do?lang=en>, [28.12.2015]

4.2 Wortliste zum Textverständnis

Die Lehrkraft muss sich vergewissern, dass die Schülerinnen und Schüler folgenden Fachwortschatz verstanden haben, bevor sie die Lernumgebung bearbeiten.

Nomen	Verben	Sonstige
das Spirolateral die Zahlenfolge	vergrößern	

4.3 Fachbezogener Wortschatz und themenspezifische Redemittel

Im Rahmen dieser Lernumgebung wenden die Schülerinnen und Schüler folgende Sprachmittel aktiv an. Diese dienen als Grundlage für die gemeinsame Erarbeitung eines Wortspeichers während der Ergebnissicherung.

die Zahlenfolge, die Glieder einer Zahlenfolge
 das Spirolateral, das geschlossene Spirolateral, das offene Spirolateral
 der rechte Winkel, im Uhrzeigersinn
 symmetrisch, drehsymmetrisch, punktsymmetrisch, schubsymmetrisch

4.4 Sprachliche Hilfen zur Darstellung des Lösungsweges
 (siehe Kapitel C, Sprachliche Hilfen für den Lösungsbogen [SP](#))

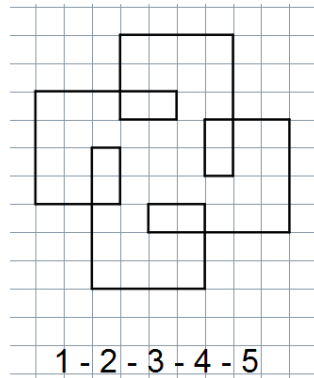
Erst nachdem die Schülerinnen und Schüler ihren eigenen Denkweg entwickelt und den Lösungsweg mit ihrem eigenen Fachwortschatz formuliert und präsentiert haben, kann es sinnvoll sein, den Arbeitsbogen zusätzlich zur weiteren Unterstützung für die Formulierung eines Rechenweges auszuhändigen.

5 Material für den Einsatz dieser Lernumgebung

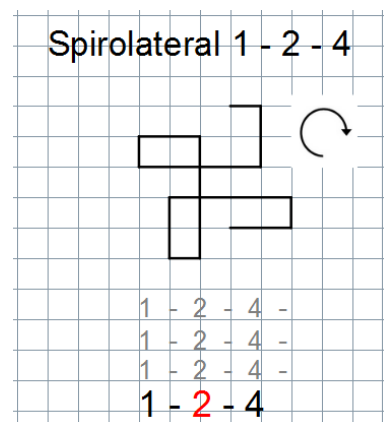
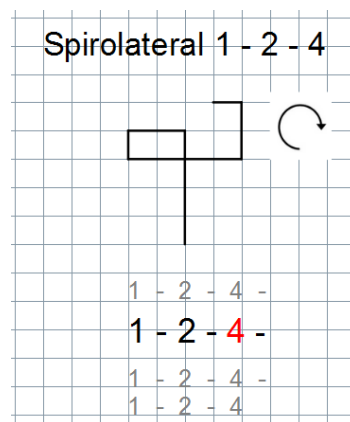
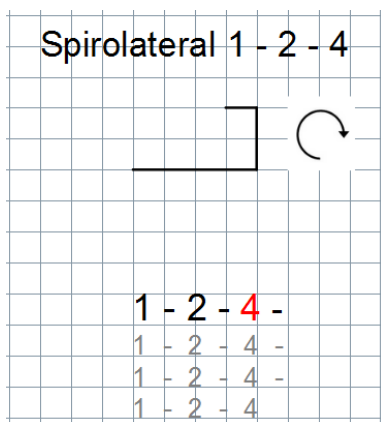
Anzahl	Name des Materials
pro Kind	Lernumgebung (LU)
pro Kind	kleinkariertes Papier
pro Kind	isometrisches Rasterpapier M1
pro Paar	evtl. PC oder Tablet
evtl.	QR-Codes zum Aufruf der Scratch-Programme M4

6 Evaluation (siehe Handreichung)

Das ist ein Spirolateral.



1. Betrachte die Zeichnung. Überlege: Wie zeichnet man ein Spirolateral?
Berate mit einem anderen Kind!



Zeichne das Spirolateral 1 – 2 – 5!

2. Zeichne folgende Spirolaterale.
 - a) 2 – 3 – 7
 - b) 1 – 2 – 3 – 4
 - c) 4 – 2 – 4 – 5 – 6
 - d) 3 – 5

- Vergleiche deine Muster mit einem anderen Kind.
- Sind die Muster symmetrisch? Notiert die Ergebnisse!

3. Experimentiere mit eigenen Zahlenfolgen! Wähle ein Muster. Gestalte das Muster farbig!

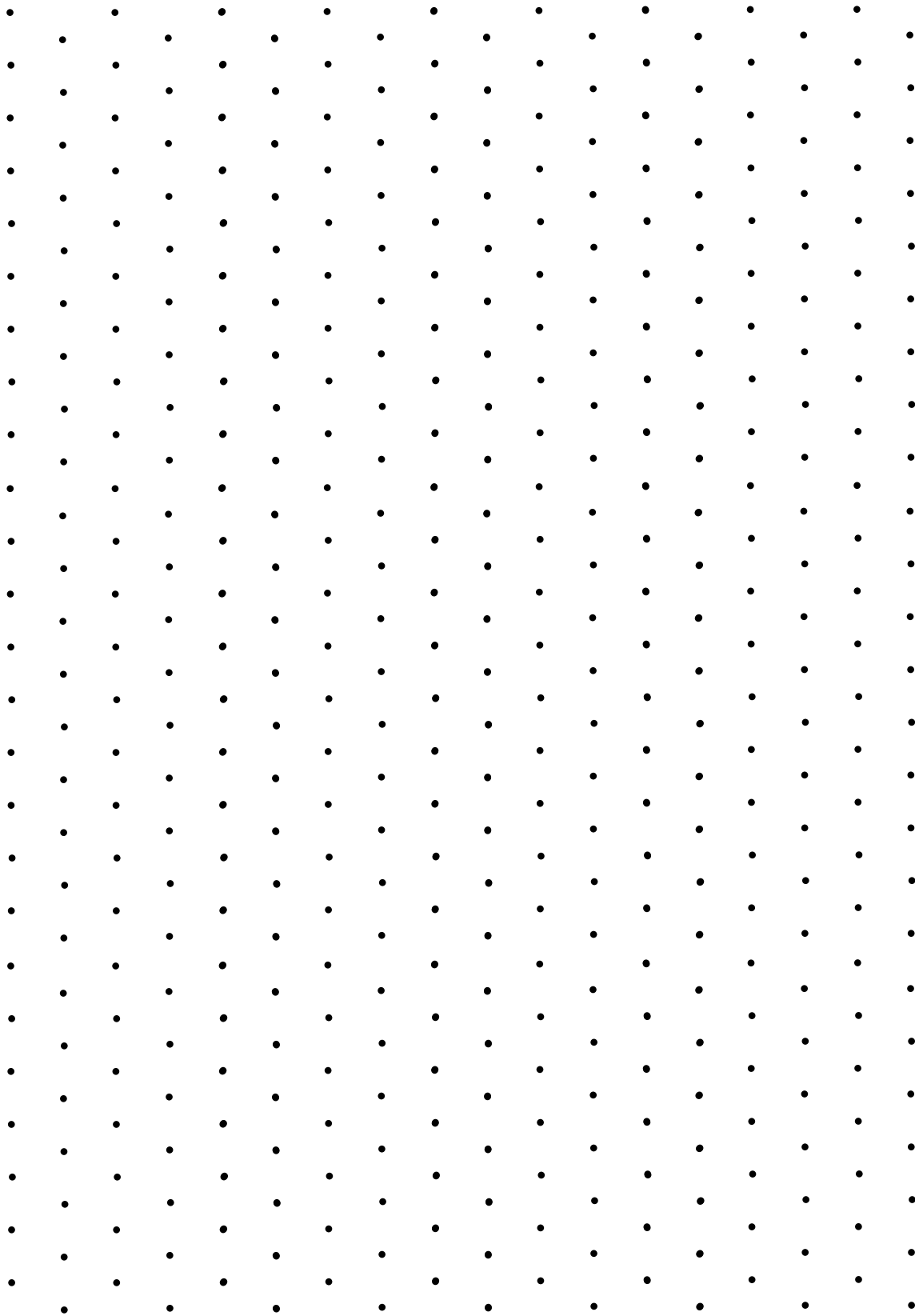
4. Arbeite mit einem anderen Kind gemeinsam! (Experimentiert am PC!)

Untersucht, z.B.:

- Was passiert, wenn ihr die Zahlen in der Zahlenfolge vertauscht?
- Wie verändert sich die Figur, wenn ihr eine Zahl oder alle Zahlen vergrößert?
- Wählt eine Zahlenfolge mit drei oder vier Zahlen. Zeichnet das Spirolateral auf Karo- und auf Rasterpapier!

5. Überlegt euch eigene Forscherfragen. Gestaltet ein Plakat zu euren Entdeckungen!

Vorlage: Isometrisches Rasterpapier



Untersuchungen zu Spirolateralen

Unsere Forscherfrage:

Vermutung:

Ihr könnt für eure Untersuchungen die Programme [Spiro4](#) (Spirolaterale zu Folgen mit maximal vier Folgengliedern), [Spiro7](#) (Spirolaterale zu Folgen mit maximal sieben Folgengliedern), [Spiro Raster](#) (Spirolaterale auf Rasterpapier) und [Spiro Winkel](#) (Spirolaterale mit frei wählbarem Drehwinkel) nutzen.

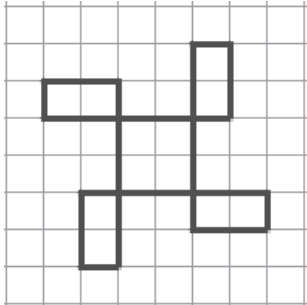
Spirolaterale (Fügt die Bilder der Spirolaterale ein!)

Untersuchungsergebnis:

Vorlage für Kontrollfolie

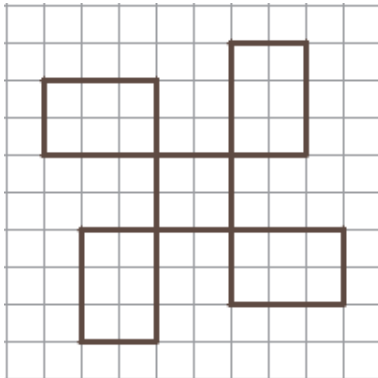
Aufgabe 1

Spirolateral 1 – 2 – 5



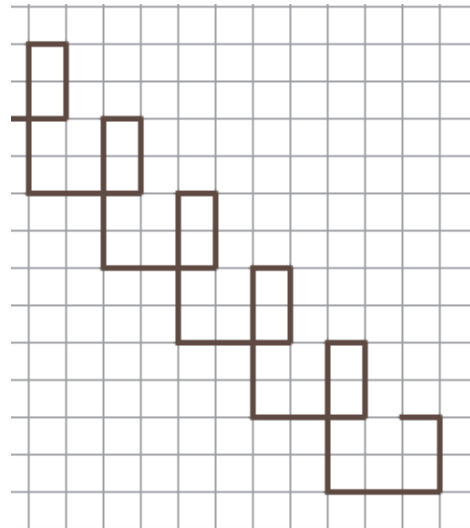
Aufgabe 2

Spirolateral 2 – 3 – 7



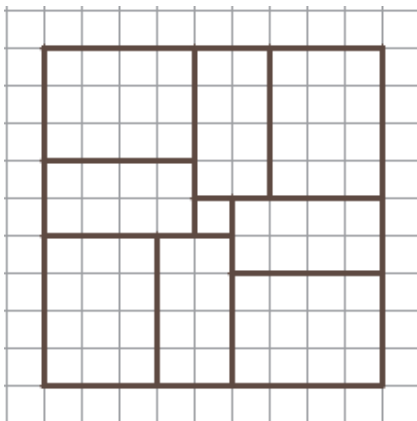
drehsymmetrisch

Spirolateral 1 – 2 – 3 – 4



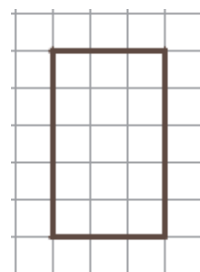
schubsymmetrisch

Spirolateral 4 – 2 – 4 – 5 – 6



drehsymmetrisch

Spirolateral 3 – 5



drehsymmetrisch

Mit Hilfe dieser Scratch-Programme kannst du Spirolaterale darstellen.

Stelle dazu die Folgenglieder an den Schiebereglern ein.

<p>Spiro 4 – Folgen mit bis zu 4 Folgengliedern https://scratch.mit.edu/projects/92661967</p> 	<p>Spiro 7 - Folgen mit bis zu 7 Folgengliedern https://scratch.mit.edu/projects/92696167</p> 
<p>Spiro Raster - Folgen mit bis zu 7 Folgengliedern Darstellung auf isometrischem Rasterpapier https://scratch.mit.edu/projects/92662095</p> 	<p>Spiro Winkel – Darstellung von Spirolateralen mit frei wählbarem Drehwinkel https://scratch.mit.edu/projects/92694286</p> 

Sprachliche Hilfen zur Darstellung der Lösung:

Folgende Satzbausteine können dir helfen:

das Spirolateral
 die Figur
 das Muster

punktsymmetrisch
 drehsymmetrisch
 schubsymmetrisch

Zahlenfolge mit ____ Gliedern
 Zahlenfolge mit ____ Zahlen

geschlossen
 offen

Wenn man..., dann ist das Spirolateral...
 Wenn ich..., dann ist das Spirolateral...

die Zahlen der Folge
 die Glieder der Folge
 die ... Zahl
 die ... und die ... Zahl

tauschen
 vergrößern
 verdoppeln
 halbieren
 auf Rasterpapier zeichnen

gedreht
 gespiegelt
 identisch/gleich
 verschoben

zu 1. Siehe Vorlage Lösungsfolie

zu 2. Siehe Vorlage Lösungsfolie

zu 4.

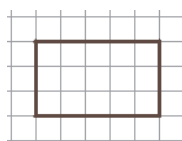
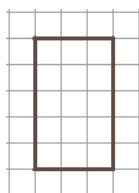
Was passiert, wenn ihr die Zahlen in der Zahlenfolge vertauscht?

Die Antwort auf diese Frage, ist abhängig von der Anzahl der Folgenglieder, der Stelle der vertauschten Folgenglieder in der Folge und ihrem Verhältnis zueinander.

Bei Folgen aus zwei Zahlen ist das Rechteck gedreht.

Spirolateral 3 – 5

Spirolateral 5 – 3

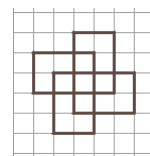
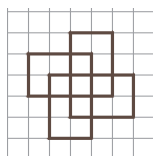
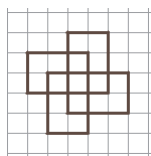


Bei Folgen mit drei Zahlen sind die Spirolaterale gespiegelt.

Spirolateral 2 – 3 – 4

Spirolateral 3 – 4 – 2

Spirolateral 4 – 2 – 3

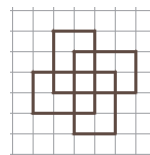
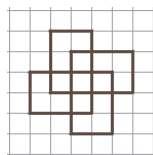
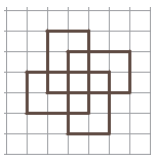


Die Reihenfolge der Zahlen in der Folge ist gleich, deshalb sind die Spirolaterale identisch.

Spirolateral 2 – 4 – 3

Spirolateral 3 – 2 – 4

Spirolateral 4 – 3 – 2

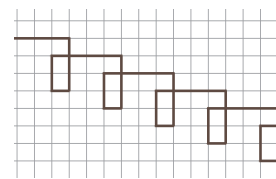
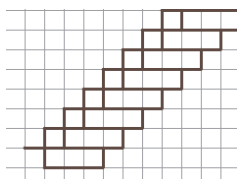
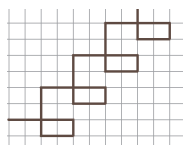


Bei Folgen mit vier und mehr Zahlen ist eine Vielzahl von Varianten denkbar, z.B.

Spirolateral 4 – 1 – 2 – 3

Spirolateral 4 – 1 – 3 – 2

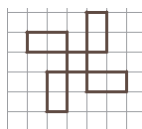
Spirolateral 4 – 3 – 2 – 1



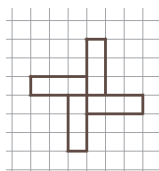
Wie verändert sich die Figur, wenn ihr eine Zahl oder alle Zahlen vergrößert?

Der Einfachheit halber werden hier nur Folgen mit drei Gliedern untersucht.

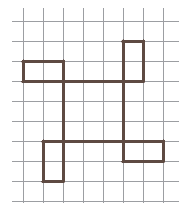
Spirolateral 1 – 2 – 4



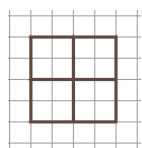
Spirolateral 1 – 3 – 4



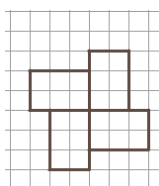
Spirolateral 1 – 2 – 6



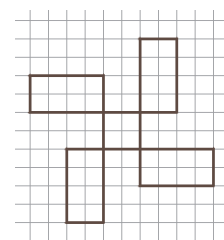
Spirolateral 2 – 2 – 4



Spirolateral 2 – 3 – 5



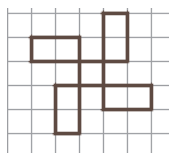
Spirolateral 2 – 4 – 8



Bei Verdoppelung aller Folgeglieder ist das Spirolateral doppelt so groß.

Wählt eine Zahlenfolge mit drei oder vier Gliedern aus und zeichnet das Spirolateral auf Karo- und auf Rasterpapier!

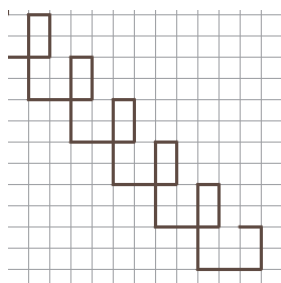
Spirolateral 1 – 2 – 4



Spirolateral 1 – 2 – 4



Spirolateral 1 – 2 – 3 – 4



Spirolateral 1 – 2 – 3 – 4



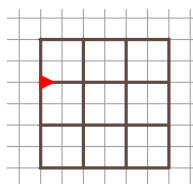
Bei viergliedrigen Folgen und einem Winkel von 90° ist das Spirolateral nur geschlossen, wenn alle Zahlen gleich sind. Dasselbe gilt für dreigliedrige Folgen auf isometrischem Rasterpapier bei 60° (siehe M).

zu 5. Es ist eine Vielzahl von Fragen denkbar.

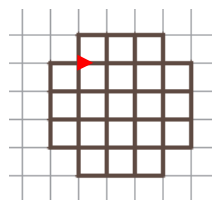
Hier einige Beispiele:

Wie kann man ein Schachbrettmuster zeichnen?

Spirolateral 6 – 4 – 4



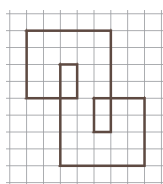
Spirolateral 4 – 2 – 5 – 4 – 2



Wie verhalten sich Folgen mit 6, 7 oder 8 Gliedern?

6 Folgenglieder:

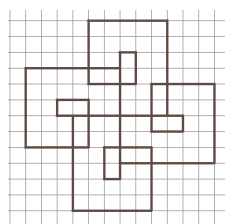
Spirolateral
1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6



punktsymmetrisch (zweifach drehsymmetrisch)

7 Folgenglieder:

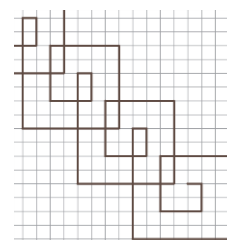
Spirolateral
1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7



vierfach drehsymmetrisch

8 Folgenglieder:

Spirolateral
1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8



sind wie 4er-Spirolaterale im Allgemeinen nicht geschlossen, schubsymmetrisch

Wovon ist die Breite eines Spirolaterals abhängig.

Die Breite ergibt sich aus der Summe der beiden größten Zahlenfolgenglieder verringert um das kleinste Folgenglied.

Wann ist ein Spirolateral geschlossen?

Ein Spirolateral ist dann geschlossen, wenn die Länge der nach oben und unten sowie der nach links und rechts gezeichneten Strecken übereinstimmt.

Spirolateral a – b

	nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
	a	b	a	b

Das Spirolateral ist nach zwei Durchläufen geschlossen. Es entsteht ein Rechteck.

Spirolateral a – b – c

	nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
	a	b	c	a
	b	c	a	b
	c	a	b	c
Summe	a+b+c	a+b+c	a+b+c	a+b+c

Das Spirolateral ist nach vier Durchläufen geschlossen.

Spirolateral a – b – c – d

	nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
	a	b	c	d
	a	b	c	d
	a	b	c	d
	a	b	c	d
Summe	4 · a	4 · b	4 · c	4 · d

Das Spirolateral ist im Allgemeinen nicht geschlossen. Nur wenn $a=c$ und $b=d$ entsteht nach einem Durchlauf ein Rechteck.

Spirolateral a – b – c – d – e

	nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
	a	b	c	d
	e	a	b	c
	d	e	a	b
	c	d	e	a
	b	c	d	e
Summe	a+b+c+d+e	a+b+c+d+e	a+b+c+d+e	a+b+c+d+e

Das Spirolateral ist nach vier Durchläufen geschlossen.

Spirolateral a – b – c – d – e – f

	nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
	a	b	c	d
	e	f	a	b
	c	d	e	f
Summe	a+c+e	b+f+d	a+c+e	b+f+d

Das Spirolateral ist nach zwei Durchläufen geschlossen.

Ein 7er-Spirolateral schließt sich nach vier Umläufen, ein 8er im Allgemeinen nicht.

Weitere Beispiele für von Schülern entwickelte Fragestellungen findet man in einem [Video](#) auf der PRIMAS-Seite.