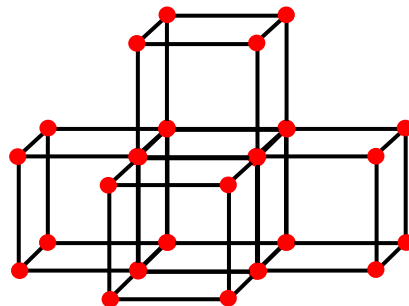


Kantenmodelle von Würfelmehrungen (LU 6)



Inhaltsverzeichnis

A Hinweise für die Lehrkraft (mit Bezug zum Rahmenlehrplan und mit Hinweisen zur Sprachbildung im Rahmen dieser Lernumgebung)	2
B Lernumgebung	10
C Materialien / Sprachliche Hilfen / Lösungen	11

1 Einordnung innerhalb des Themenbereichs

Die Idee zu dieser Lernumgebung basiert auf Hengartners Lernumgebung¹ „Mit Würfeln bauen“. In der vorliegenden Lernumgebung untersuchen die Schülerinnen und Schüler Zahlenfolgen, die sich durch die Fortsetzung von Würfelbauten ergeben. Anders als bei Hengartner wird nicht die Anzahl der Würfel sondern die Anzahl der Eckpunkte und Kanten von Würfelmehrlingen untersucht.

Durch den aktiven Umgang mit Kantenmodellen werden die Begriffe Ecke, Kante und Fläche wiederholt. Bei der Einführung muss thematisiert werden, dass in den genutzten Kantenmodellen die Ecken des Würfels durch Kugeln, die Kanten durch Stäbe dargestellt werden. Die Lehrkraft sollte die Möglichkeit nutzen, auf die Merkmale von Modellen (Übereinstimmung in wesentlichen Eigenschaften, Vereinfachungen, Idealisierung) hinzuweisen.

Beim Vorstellen und Bauen der Kantenmodelle von Würfelmehrlingen wird das räumliche Vorstellungsvermögen geschult. Um die Anzahl der Kanten (Stäbe) und Ecken (Kugeln) bestimmen zu können, müssen sich die Lernenden überlegen, welche Kanten bzw. Eckpunkte die einzelnen Würfel in einem Würfelmehrling gemeinsam haben.

Bei der Untersuchung der für Würfelschlangen benötigten Materialien untersuchen die Schülerinnen und Schüler Zahlenfolgen. Da durch die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten von vier und mehr Würfeln die Betrachtungen sehr komplex werden, wurde die Untersuchung von Bildungsregeln auf Würfelschlangen beschränkt.

Die Frage, wie man einen Würfelmehrling bauen muss, um möglichst wenig bzw. möglichst viel Material zu verwenden, fördert das mentale Operieren und das Argumentieren.

Mit dieser Lernumgebung werden Inhalte und Kompetenzen der Leitideen [L3] *Raum und Form* und [L4] *Gleichungen und Funktionen* vermittelt und entwickelt.

Niveaustufe D

2 Didaktisch-methodische Hinweise (praktische Hinweise zur Durchführung)

Zeitungsumfang: 2-3 Doppelstunden

Einführung:

In der Einführungsphase werden die Begriffe Würfel, Ecke, Kante, Kantenmodell und Würfelmehrling wiederholt. Dazu arbeiten die Kinder mit dem Kartenspiel ([M2](#)). Die Begriffszuordnung kann auch interaktiv als [Zuordnungsspiel](#)² oder [Merkspiel](#)³ erfolgen. Anschließend werden Würfel und Kantenmodell verglichen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede benannt. Dabei muss auf die Besonderheit der Darstellung der Eckpunkte durch Kugeln eingegangen werden. Im Gespräch wird erarbeitet, dass Modelle in wesentlichen Merkmalen mit dem Original über-

¹ Hengartner, Elmar, Hirt, Ueli, Wälti, Beat (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte.

Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Klett und Balmer-Verlag, Zug 2006, S. 117-121

² <https://learningapps.org/display?v=p1stqa87218>

Zum Aufrufen des Programms kann ein [QR-Code](#) genutzt werden.

³ <https://learningapps.org/display?v=p058sywvj19>

Zum Aufrufen des Programms kann ein [QR-Code](#) genutzt werden.

einstimmen, aber teilweise vereinfacht bzw. wie hier aus praktischen oder didaktischen Gründen von der Realität abweichen.

Dann werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, mit Holzwürfeln (bzw. Steckwürfeln) verschiedene Würfeldrillinge und Würfelvierlinge zu bauen.

zu 1.:

Zunächst stellt jedes Kind das Kantenmodell eines Würfels her.

Als Material eignen sich neben den von Lehrmittelanbietern angebotenen Bausätzen für Kantenmodelle aus Kunststoff auch Magnetbausätze oder Erbsen und Zahnstocher. Die Erbsen⁴ müssen vor der Verwendung mindestens zwölf Stunden eingeweicht werden.



Das Material hat einen sehr motivierenden Charakter und wird die Lernenden zu weiteren Fragestellungen anregen. Wenn die Kinder bisher nicht mit diesem Material gearbeitet haben, sollte man Zeit für eigenes Experimentieren einplanen. Zum Abschluss dieser freien Experimentierphase stellen einzelne Kinder ihre Entdeckungen vor.

zu 2.:

Zur Bearbeitung der nächsten Aufgabe werden die Kinder aufgefordert, erst eine Vermutung über die Anzahl des benötigten Materials aufzustellen und diese anschließend handelnd zu überprüfen.

zu 3.:

Im Mittelpunkt dieser Aufgabe steht das Analysieren des Musters, das der Anzahl der für eine Würfelschlange benötigten Kugeln und Stäbe zugrunde liegt. In der Aufgabe wird der Begriff Würfelschlange verwendet, der auch durch Würfelstangen ersetzt werden könnte. Die Anzahl der Ecken und Kanten ist auch bei Würfelschlangen gleich, die nicht gerade sind.

Durch die Beschränkung des zur Verfügung gestellten Materials müssen die Lernenden die Bildungsregel für die Zahlenfolge ableiten. Bei Bedarf kann den Lernenden eine der Tabellenvorlagen (M1) zur Verfügung gestellt werden. Leistungsstarke Kinder können aufgefordert werden, die Anzahl der Würfel für die 20er-, 50er oder 100er Schlange zu berechnen und evtl. mit Hilfe von Variablen einen allgemeingültigen Term aufzustellen.

zu 4.:

Mit dieser Aufgabe wird insbesondere das mentale Operieren und das räumliche Vorstellungsvermögen gefördert: *Wie verändert sich die Anzahl der Ecken und Kanten des Würfelmehrlings, wenn ich einen Würfel an eine andere Stelle setze?*

Diese anspruchsvolle Aufgabe regt zum Experimentieren, zum Aufstellen und Überprüfen von Vermutungen und zum Argumentieren an. Für das Lösen der Aufgabe müssen den Lernenden neben den Materialien für den Bau der Kantenmodelle auch ausreichend Holz- oder Steckwürfel zur Verfügung gestellt werden. Als Herausforderung für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler kann die Frage aufgeworfen werden, warum sich die Anzahl der Kugeln und Stäbe bei verschiedenen Würfelmehrlingen unterscheidet.

Zur Dokumentation bauen die Kinder den untersuchten Vierling mit den Holz- oder Steckwürfeln und notieren die Anzahl der benötigten Kugeln und Stäbe. Leistungsstarken Schülerinnen und

⁴ Grüne, ungeschälte Erbsen eignen sich besonders. Im Kühlschrank können sie bis zu drei Tage aufbewahrt werden.

Schülern kann auch Rasterpapier (M5) für die Dokumentation zur Verfügung gestellt werden. Der Austausch mit einem anderen Paar dient der Korrektur eventuell auftretender Fehler, fördert die Kommunikation und das Argumentieren.

In einer kurzen Auswertungsphase werden die Ergebnisse zusammengefasst. Dazu kann die Lehrkraft die Abbildungen aller möglichen Würfelvierlinge (M4) zur Verfügung (vergrößert auf Papier oder an die Tafel projiziert) stellen und die Kinder notieren die Anzahl der Stäbe und Kugeln.

Die Bildkarten der Würfelvierlinge (Körper und Kantenmodell, M4) können zur Differenzierung z.B. für eine Zuordnungsübung oder als Merkspiel eingesetzt werden.

zu 5.:

Die Erkenntnis aus Aufgabe 4, dass man für kompakt gebaute Würfelmehrlinge weniger Material benötigt, übertragen die Schülerinnen und Schüler nun auf den Würfelachtling. Wenn genug Baumaterial zum Experimentieren zur Verfügung steht, können die Lernenden zusätzlich die Frage untersuchen, für welche Würfelachtlinge besonders viel Material benötigt wird.

zu 6.:

Für die Lösung dieser Aufgabe können die Lernenden ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3 nutzen. Diese Aufgabe soll nach Möglichkeit rechnerisch durch die Nutzung der Ergebnisse aus der Aufgabe 3 gelöst werden.

Kinder, für die diese Aufgabe zu abstrakt ist, können mit dem vorhandenen Material Körper bauen oder eigene Fragestellungen untersuchen.

3 Bezug zum Rahmenlehrplan

3.1 Prozessbezogene mathematische Standards der Lernumgebung⁵

(siehe Handreichung, Punkt 2)

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen	Mathematisch kommunizieren
1.1.2, 1.2.2	2.1.1, 2.3.1		4.1.1	5.1.1	6.1.1, 6.4.1

3.2. Inhaltsbezogene mathematische Standards der Lernumgebung⁶

Themenbereich	Standards	Niveau
Raum und Form	Die Schülerinnen und Schüler können <ul style="list-style-type: none"> • ausgewählte geometrische Objekte qualitativ beschreiben • Beziehungen zwischen ausgewählten geometrischen Objekten beschreiben 	C

⁵ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik, S. 19-21, Berlin, Potsdam 2015

⁶ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik, S. 22-31, Berlin, Potsdam 2015

	<ul style="list-style-type: none"> • Modelle ausgewählter Körper herstellen und weitere ebene geometrische Figuren zeichnen • Lage- und Größenveränderungen bei geometrischen Figuren ausführen 	C
	<ul style="list-style-type: none"> • Beziehungen zwischen geometrischen Objekten (auch Winkel) beschreiben und zur Systematisierung nutzen⁷ • geometrische Körper (auch Prismen) darstellen und ebene geometrische Figuren zeichnen 	D
Gleichungen und Funktionen	<p>Die Schülerinnen und Schüler können</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bildungsregeln für Zuordnungen und Muster beschreiben • Zuordnungen und Muster verschieden darstellen • einzelne Werte zu Zuordnungen ermitteln 	C

3.3 Themen und Inhalte der Lernumgebung⁸

Themenbereich	Inhalte	Niveau
Raum und Form	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erkennen, benennen und beschreiben geometrische Körper (Kugel, Würfel, Quader) in der Umwelt und am Modell unter Verwendung wesentlicher Merkmale • beschreiben die Lage- und Größenbeziehungen gegenüberliegender bzw. angrenzender Seiten oder Flächen bei ebenen oder räumlichen geometrischen Objekten (auch Erkennen von Würfel- und Quadernetzen) • stellen Modelle von Quadern und Würfeln (auch Kantenmodelle) her 	C
	<ul style="list-style-type: none"> • erkennen, benennen und beschreiben gerade geometrische Körper (auch Zylinder, Prismen, Kegel, Pyramiden) in der Umwelt und am Modell unter Verwendung wesentlicher Merkmale • stellen Modelle von geometrischer Körpern (auch Prismen) her 	D

⁷ Die inhaltsbezogenen mathematischen Standards sind unverändert aus dem Rahmenlehrplan übernommen worden. Kompetenzen, die mit dieser Lernumgebung nicht entwickelt werden, sind grau gedruckt.

⁸ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil C Mathematik, S. 31ff, Berlin, Potsdam 2015

Gleichungen und Funktionen	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • analysieren und beschreiben die Bildungsregeln von arithmetischen und geometrischen Mustern • stellen Folgen geometrischer Muster (z. B. durch Zahlenfolgen) dar • stellen Zuordnungen (auch mit Tabellen) dar • verwenden die Bildungsregeln von arithmetischen und geometrischen Mustern zum Finden von weiteren Elementen 	C
-----------------------------------	---	---

3.4 Bezüge zum Basiscurriculum Sprachbildung⁹

Standards des BC Sprachbildung	Die Schülerinnen und Schüler können	
Produktion/ Sprechen	<ul style="list-style-type: none"> • Sachverhalte und Abläufe beschreiben • Beobachtungen wiedergeben • Vermutungen äußern und begründen • Arbeitsergebnisse aus Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit präsentieren 	
Interaktion	<ul style="list-style-type: none"> • sprachliche Handlungen wie Vermutung, Behauptung, Kritik etc. unterscheiden 	

3.5 Bezüge zum Basiscurriculum Medienbildung¹⁰

Standards des BC Medienbildung	Die Schülerinnen und Schüler können	
Präsentieren	<ul style="list-style-type: none"> • Einzel- und Gruppenarbeitsergebnisse vor einem Publikum präsentieren 	

3.6 Bezüge zu übergreifenden Themen¹¹

<ul style="list-style-type: none"> • Mobilitätsbildung und Verkehrserziehung (<i>hier: Orientierung im Raum</i>)

⁹ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B Fachübergreifende Kompetenzentwicklung, S. 6-10, Berlin, Potsdam 2015

¹⁰ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B Fachübergreifende Kompetenzentwicklung, S. 15-22, Berlin, Potsdam 2015

¹¹ vgl. Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10, Teil B Fachübergreifende Kompetenzentwicklung, S. 24ff, Berlin, Potsdam 2015

3.7 Bezüge zu anderen Fächern

- Deutsch
- Naturwissenschaften

4 Sprachbildung

4.1 Sprachliche Stolpersteine in den Aufgabenstellungen

Aufgabe	Originaltext	Sprachliche Alternativen
1	Wie viele Kugeln und Stäbe hast du verwendet?	Wie viele Kugeln und Stäbe brauchst du?
3	Untersucht Würfelschlangen.	Untersucht Würfelstangen.

Es muss sichergestellt werden, dass die Lernenden folgende Begriffe/Wörter verstehen:
LU: die Kugeln, die Stäbe

4.2 Wortliste zum Textverständnis

Die Lehrkraft muss sich vergewissern, dass die Schülerinnen und Schüler folgenden Fachwortschatz verstanden haben, bevor sie die Lernumgebung bearbeiten.

Nomen	Verben	Sonstige
das Kantenmodell	benötigen – man benötigt	besonders wenig Material
die Kante	verwenden – du verwendest	jeder Würfeldrilling
die Ecke	anfertigen: eine Tabelle	
die Fläche	anfertigen	
der Würfelmehrung		
der Würfelzwilling (Würfeldrilling, Würfelvierling, Würfelachtling)		
die Würfelschlange		
die 10er-Schlange		

4.3 Fachbezogener Wortschatz und themenspezifische Redemittel

Im Rahmen dieser Lernumgebung wenden die Schülerinnen und Schüler folgende Sprachmittel aktiv an. Diese dienen als Grundlage für die gemeinsame Erarbeitung eines Wortspeichers während der Ergebnissicherung.

das Kantenmodell eines / des Würfels / des Würfelmehrlings

Der Körper hat ___ Ecken und ___ Kanten.

Man benötigt ___ Kugeln und ___ Stäbe für das Kantenmodell.

Es werden ___ Kugeln und ___ Stäbe für das Kantenmodell benötigt.

Für einen Würfelzwilling (Würfel...) benötige ich ___ Kugeln und ___ Stäbe.

Um einen ... zu bauen, benötige ich ___ Kugeln und ___ Stäbe.

Die 4er-Schlange besteht aus ___ Kugeln und ___ Stäben.

Um einen weiteren Würfel anzubauen, benötige ich ___ Kugeln und ___ Stäbe.

Mit ___ Kugeln / Stäben kann man eine Würfelschlange / einen Würfelmehrling aus ___ Würfeln bauen.

Die Anzahl der Kugeln steigt um ___.

Die Anzahl der Stäbe wächst um ___ / verändert sich um ___.

Die Zahl der Stäbe / der Kugeln erhöht sich mit jedem weiteren Würfel um ___

der Würfelzwilling / der Würfelzwilling / der Würfelmehrling

der 2x2x2-Würfel

man benötigt / wir benötigen besonders viel / besonders wenig Material

4.4 Sprachliche Hilfen zur Darstellung des Lösungsweges (*entfällt*) (siehe Kapitel C, Sprachliche Hilfen für den Lösungsbogen)

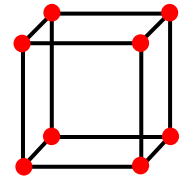
5 Material für den Einsatz dieser Lernumgebung

Anzahl	Name des Materials
pro Kind	Lernumgebung (LU)
einige	Vorlagen für die Tabelle (M1)
pro Paar	Merkspiel (M2)
evtl.	Tippkarten (M3)
evtl.	Bildkarten der Würfelvierlinge vergrößert (M4)
evtl.	als Differenzierungsmaterial: Bildkarten der Würfelvierlinge laminiert (M4)
evtl.	Rasterpapier zur Darstellung (M5)
	Wortkarten für den Sprachspeicher (M6)
pro Paar	Material zum Bau von Kantenmodellen: <ul style="list-style-type: none"> • Steckbausystem, • Magnetbaumaterial oder • Erbsen und Zahnstocher ca. 20 Kugeln und 40 Stäbe
400	Holzwürfel oder Steckwürfel

6 Evaluation (siehe Handreichung, Punkt 7)



1. Baue aus Kugeln und Stäben das Kantenmodell eines Würfels.
Wie viele Kugeln und Stäbe hast du verwendet?



2. Überlegt: Wie viele Kugeln und Stäbe benötigt ihr für einen Würfelzwilling?

Kugeln: _____ Stäbe: _____

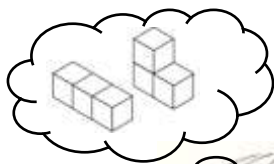
Baut und kontrolliert.

3. Untersucht Würfelschlangen.



- a) Wie viele Kugeln und Stäbe benötigt ihr? Fertigt eine Tabelle an.
b) Beschreibt eure Entdeckungen.
c) Überlegt: Wie viel Material benötigt man für eine 10er-Schlange?

4.



Für jeden Würfeldrilling
benötigt man
16 Kugeln und 28 Stäbe.

Ist die Anzahl auch
bei jedem Würfel-
vierling gleich?



- a) Untersucht mehrere Würfelvierlinge.
b) Dokumentiert eure Ergebnisse und notiert die Anzahl der Kugeln und Stäbe.
c) Vergleicht mit einem anderen Paar.
5. Clara möchte einen Würfelachtling bauen, für den sie besonders wenig Material benötigt.
Überlegt: Wie sieht er aus? Wie viel Material benötigt sie?
6. Clara und Jannik haben 100 Stäbe. Sie wollen alle Stäbe verwenden.
Können sie daraus das Kantenmodell eines Würfelmehrlings bauen? Wie viele Kugeln benötigen sie dafür?

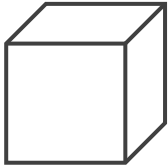
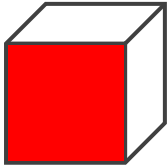
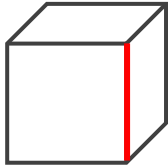
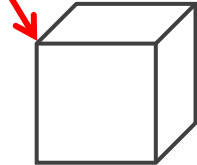

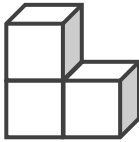
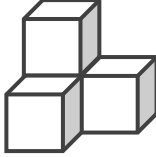
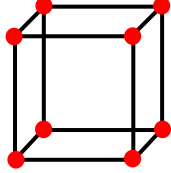
Differenzierte Vorlagen für die Tabelle in Aufgabe 2

Würfel										
Kugeln										
Stäbe										

Würfel	1	2	3							
Kugeln										
Stäbe										

Würfel	1	2	3							
Kugeln	8									
Stäbe	12									

Merkspiel zur Wiederholung der Fachbegriffe

			
der Würfel	die Fläche	die Kante	die Ecke
			
der Würfel- zwilling	der Würfel- drilling	der Würfel- vierling	das Kanten- modell

Die Begriffe können mithilfe der folgenden interaktiven Spiele gefestigt werden:

[Zuordnungsspiel](https://learningapps.org/display?v=p1stqa87218)

<https://learningapps.org/display?v=p1stqa87218>

[Merkspiel](https://learningapps.org/display?v=p058sywvj19)

<https://learningapps.org/display?v=p058sywvj19>



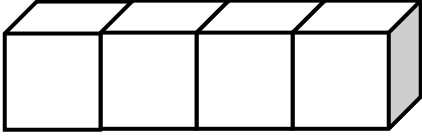
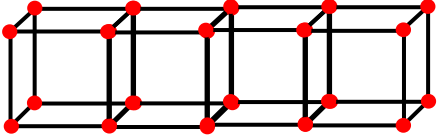
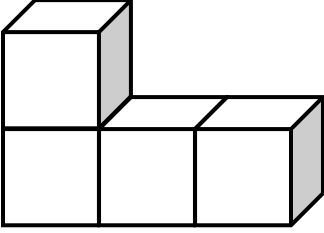
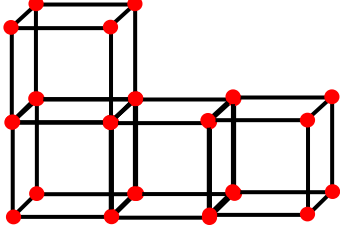
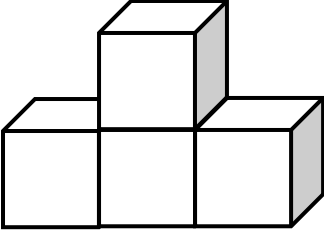
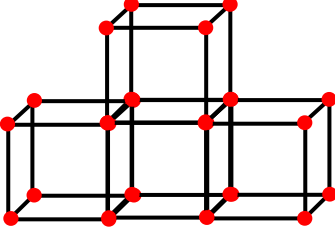
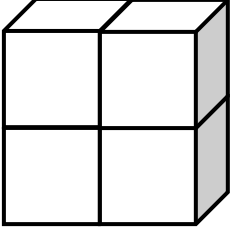
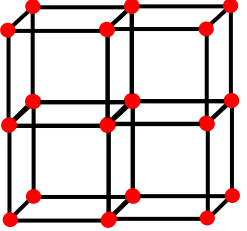
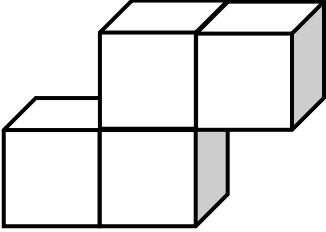
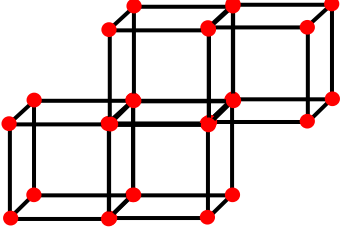
Tippkarten für Aufgabe 3 (Nur bei Bedarf ausgeben.)

Tipp:

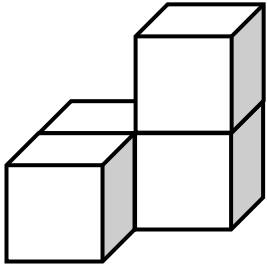
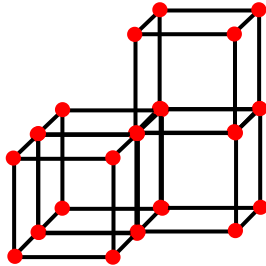
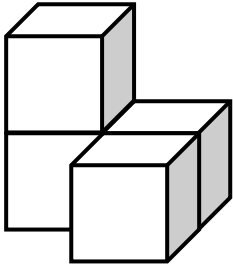
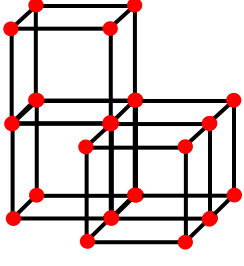
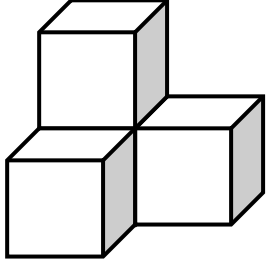
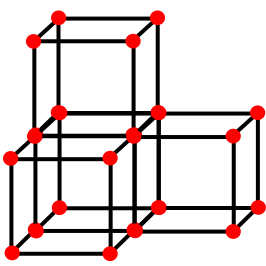


- Überlegt: Wie verändert sich die Anzahl der Kugeln?
Könnt ihr eine Zahlenfolge erkennen?
- Wie verändert sich die Anzahl der Stäbe?
Könnt ihr eine Zahlenfolge erkennen?

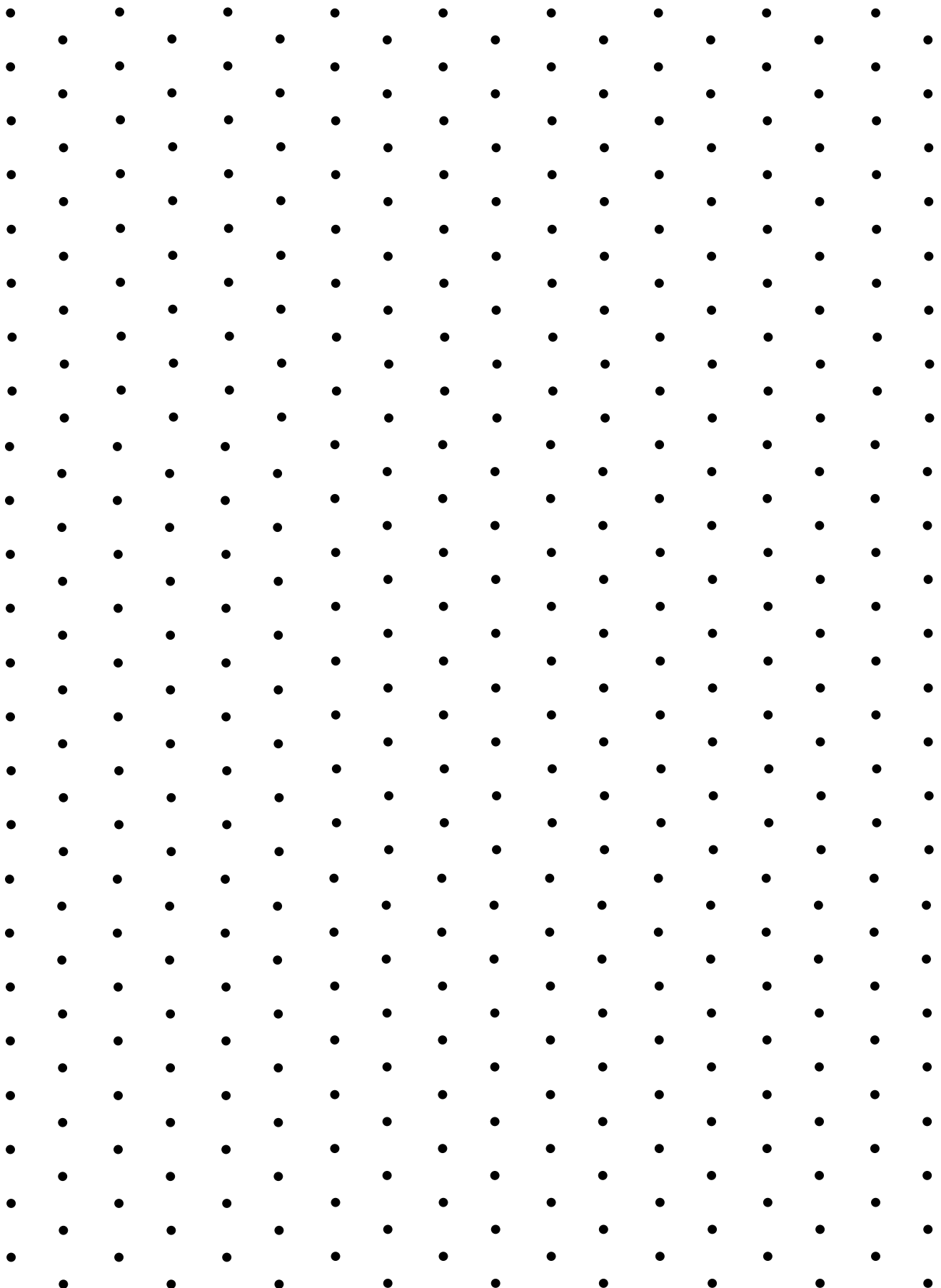
Bildkarten Würfelvierlinge

C Material: Kantenmodelle von Würfelmehrlingen
(TK Würfel – LU 6/M4)

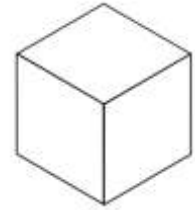
	
	
	

Isometrisches Rasterpapier



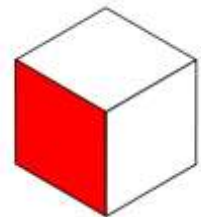
Wortkarten für den Sprachspeicher

der **Würfel**

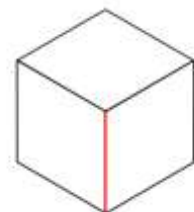


das **Würfelgebäude**

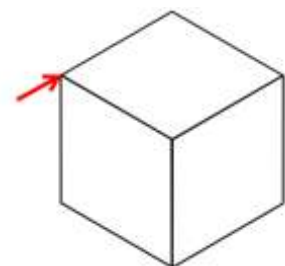
die **Fläche**



die **Kante**

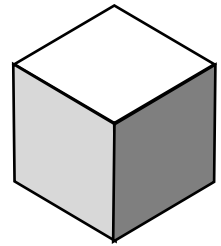


die **Ecke**



das **Kantenmodell**

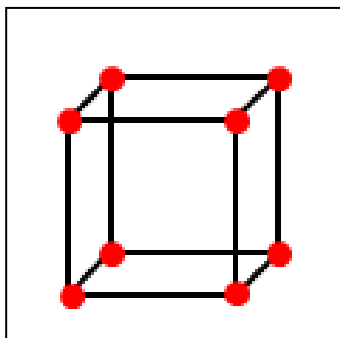
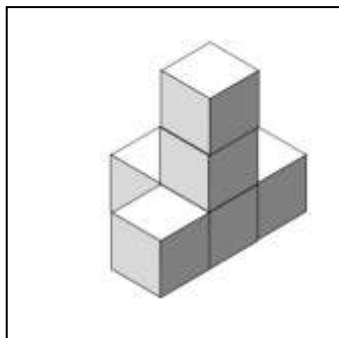
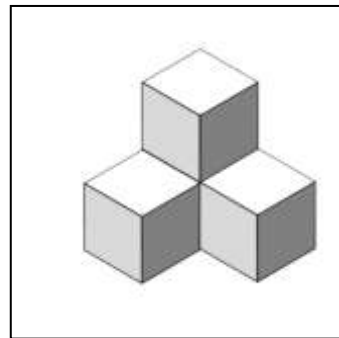
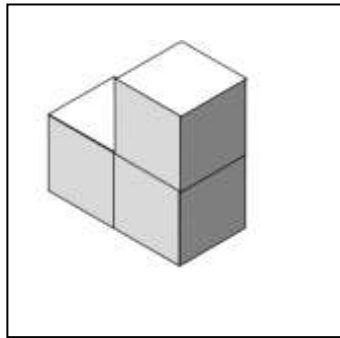
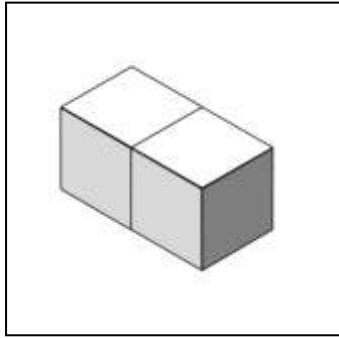
das **Schrägbild**



der **Würfelzwilling**

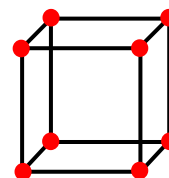
der **Würfeldrilling**

der **Würfelvierling**



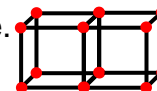
zu 1.

Für einen Würfel benötigt man 8 Kugeln und 12 Stäbe.



zu 2.

Für einen Würfelzwilling benötigt man 12 Kugeln und 20 Stäbe.

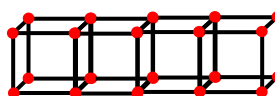


zu 3.

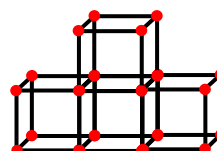
Würfel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	n
Kugeln	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	84	$4n+4$
Stäbe	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	164	$8n+4$

zu 4.

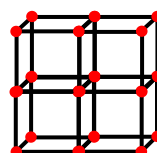
Würfelschlange: 20 Kugeln und 36 Stäbe



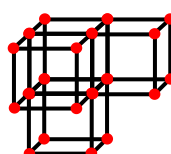
Siegerpodest: 20 Kugeln und 36 Stäbe



„Würfelquadrat“: 18 Kugeln und 33 Stäbe



Würfel-Eck: 20 Kugeln und 36 Stäbe



Alle anderen Würfelvierlinge: 20 Kugeln und 36 Stäbe

zu 5.

Besonders wenig Material benötigt man für einen kompakten Würfelmehrling, also den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel. Für ihn benötigt man 27 Kugeln und 54 Stäbe.

Zusatzaufgabe für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler:

Besonders viel Material benötigt man z.B. für die 8er-Schlange: 36 Würfel und 68 Stäbe.

zu 6.

Aus der Fortsetzung der Tabelle in Aufgabe 3 ergibt sich, dass man aus 100 Stäben eine 12er-Schlange bauen kann. Dafür benötigt man 52 Kugeln.

Bildtitel	Seite	Bildquelle
Abbildungen		erstellt von iMINT Grundschule Mathematik
Zeichnungen der Kinder	10	erstellt von iMINT Grundschule Mathematik
Symbole Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit	10	erstellt von iMINT Grundschule Mathematik
Symbol Tippkarte	13	gemeinfrei https://pixabay.com/de/idee-licht-gl%C3%BChbirne-lampe-birne-153974/ [05.01.2018]