

Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2011/2012

Fach	Mathematik (B)
<h1 style="color: blue;">Nur für die Lehrkraft</h1>	
Prüfungstag	25. April 2012
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichnete Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

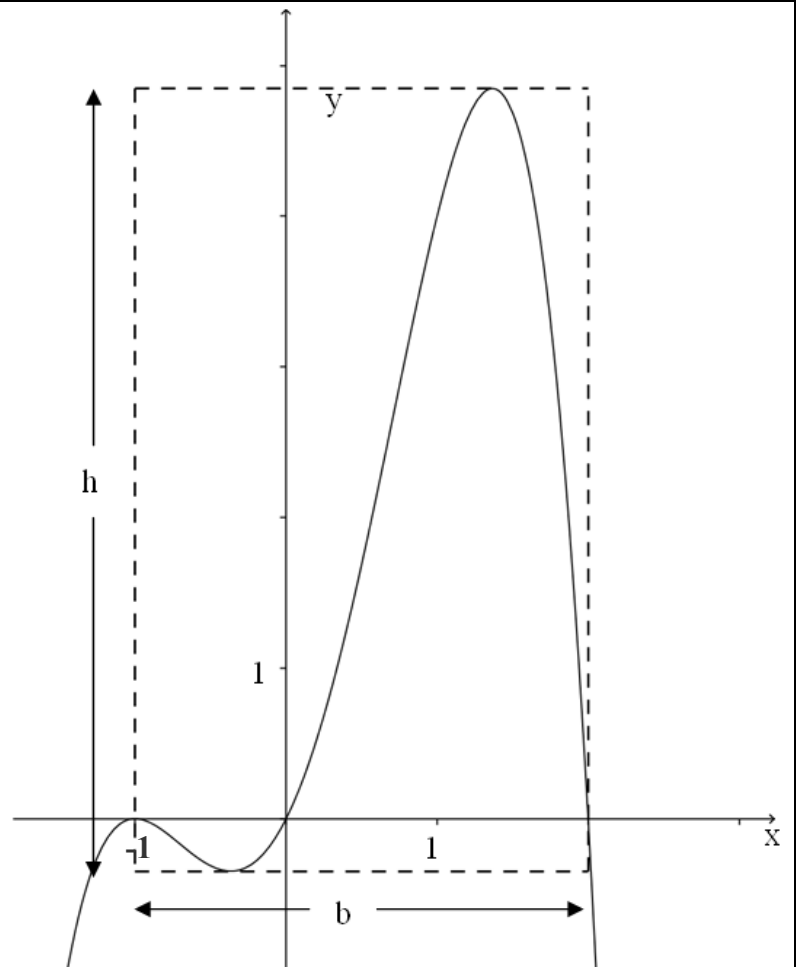
Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift):

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote¹:

Aufgabe Nr.	Soll % = BE	Ist % = BE	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	___ Punkte	___ Punkte
Maluspunkt	-1	___ Punkt	___ Punkt
Insgesamt:		___ Punkte = Note ¹ : ___	___ Punkte = Note ¹ : ___
Datum, Unterschrift:			

¹ gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung
 $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$.
 Dazu ist ein Rechteck gegeben, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Seiten enthalten jeweils eine Nullstelle bzw. einen Extremalpunkt.



- 1.1 Geben Sie das Symmetrieverhalten von f begründet an! / 2
- 1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f ! / 5
- 1.3 Berechnen Sie die Extremalpunkte des Graphen von f ! / 15
- 1.4 Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von f ! / 7
- 1.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks!
 (Falls Sie 1.2 bzw. 1.3 nicht lösen können, lesen Sie die entsprechenden Werte näherungsweise in der Zeichnung ab!) / 4
- 1.6 Stellen Sie die Gleichung der Normalen n von f im Koordinatenursprung auf!
 Tragen Sie die Normale in die Skizze ein! / 4
- 1.7 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Normalen n mit den Rechteckseiten! (Falls Sie 1.2 bzw. 1.3 nicht lösen können, beschreiben Sie den Lösungsweg, um die Schnittpunkte zu finden, schrittweise als Text!) / 3

2

/15

Eine punktsymmetrische ganzrationale Funktion f fünften Grades verläuft durch den Punkt $P_1(-1|-3,5)$. Die Tangente von f an der Stelle $x_1 = -1$ verläuft durch den Punkt $P_2(2|13)$. Die zweite Ableitung an der Stelle $x_1 = -1$ ist gleich 2.

Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion. *Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.*

Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ der Funktion f .

$$\begin{aligned} 52a + 14b + 2c &= -7 \\ -5a + 3b + 3c &= 18,5 \\ -32a - 8b - 2c &= 5 \end{aligned}$$

3

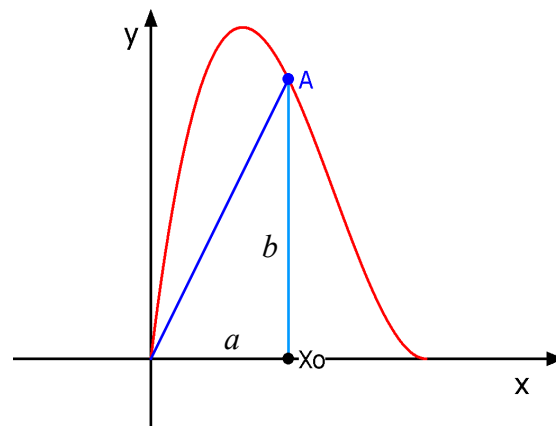
/ 15

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x \quad ; x \in [0; 4].$$

(siehe Zeichnung)

In die vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossene Fläche soll ein möglichst großes Dreieck einbeschrieben werden. Die untere Seite des Dreiecks liegt auf der x -Achse vom Ursprung bis zur Stelle x_0 . Die rechte Seite ist eine Parallele zur y -Achse mit dem Punkt A auf dem Graphen von f .



3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Zielfunktion zur Bestimmung des Flächeninhaltes wie folgt lautet:

/ 5

$$A(x) = x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right)$$

3.2 Wie groß sind die Seiten a und b des Dreiecks mit dem größten Flächeninhalt?

/ 7

3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

/ 3

4 Runden Sie alle Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma. / 30

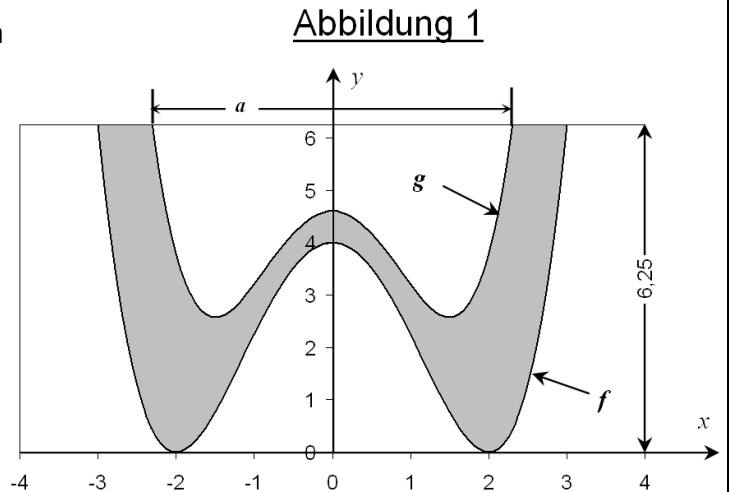
Eine Werbeagentur hat für einen Kunden ein Firmenlogo entworfen, das den Buchstaben W darstellt und an der Fassade der Firmenzentrale des Kunden angebracht werden soll.

In der Abbildung 1 ist das Logo durch die grau gefärbte Fläche dargestellt, deren Ränder die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = 0,25x^4 - 2x^2 + 4 \quad \text{und}$$

$$g(x) = 0,4x^4 - 1,8x^2 + 4,6$$

sind. ($1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$)



Das Logo ist 6,25 m hoch und ganz oben 6 m breit.

4.1 Berechnen Sie das Integral $I = \int_{-3}^3 f(x) dx$ und markieren Sie die entsprechende Fläche durch eine Schraffur in der Abbildung 1. / 7

4.2 Am oberen Ende des Logos soll in der Weihnachtszeit der Zwischenraum durch eine Lichterkette überbrückt werden, die mindestens die Länge a haben muss (siehe Abbildung 1). Berechnen Sie a . / 8

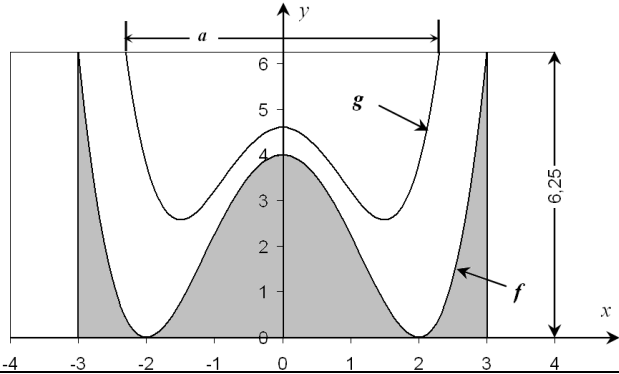
4.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Firmenlogos. / 15

Ende der Aufgabenstellung

		Zwischensumme:	11	11	0		Aufgaben 1.1.bis 1.3
1.4	Notwendige Bed. $f''(x) = -12x^2 + 6 = 0$ Wendestellen $x_{W1} \approx 0,7071$ und $x_{W2} \approx -0,7071$ berechnet Hinreichende Bed. $f'''(x) = -24x \neq 0$ geprüft $f'''(0,7071) < 0 \Rightarrow$ Links-Rechts-Wendepunkt $f'''(-0,7071) > 0 \Rightarrow$ Rechts- Links-Wendepunkt y-Koordinaten berechnet und Punkte angegeben $WP_1(0,7071;2,644)$ $WP_2=(-0,7071;-0,1642)$	1		2			
1.5	Breite = 3 LE Höhe = 5,196 LE A =15,588 FE	2		2			
1.6	Normalensteigung $m_N = \frac{-1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$ Normalengleichung $n(x) = -\frac{1}{2}x$ Einzeichnen der Normalen	1		2			
1.7	Schnittpunkt mit der senkrechten Seite $n(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(-1 \frac{1}{2})$ Schnittpunkt mit der waagerechten Seite $n(x_s) = -0,348 \Leftrightarrow x_s = 0,696 \Rightarrow Q(0,696 -0,348)$ Alternative: Lösungsweg beschrieben Möglichkeit von Schnittpunkten der Normalen mit der senkrechten bzw. waagerechten Rechtecksseite formuliert y_P als Funktionswert von n beschrieben x_Q als Nullstelle von n beschrieben				1		
		15	24	1			
Mögliche BE:			40				Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
2	Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$ Bedingungsgefüge: 1. $f(-1) = -3,5$ Punkt $P(-1 -3,5)$ 2. $f'(-1) = m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Anstieg bei $x_1 = -1$ $= \frac{13 - (-3,5)}{2 - (-1)} = 5,5$ 3. $f''(-1) = 2$ 2. Ableitung bei $x_1 = -1$ Gleichungssystem: $-a - b - c = -3,5$ $5a + 3b + c = 5,5$ $-20a - 6b = 2$ Lösungen des gegebenen Gleichungssystems $a = -1; b = 3; c = 1,5$ Funktionsgleichung: $f(x) = -x^5 + 3x^3 + 1,5x$	1	1			
	Summe:	2	12	1	▼	
Mögliche BE:		15				Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung HB: Flächeninhalt eines Dreieckes: $A = \frac{1}{2}gh$ $A(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = \frac{1}{2}x(x^3 - 8x^2 + 16x)$ $= \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2 = x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right)$	1		2		
3.2	$A'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x$ $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2x^3 - 12x^2 + 16x$ $0 = x^3 - 6x^2 + 8x$ $0 = x(x^2 - 6x + 8)$ $x_1 = 0 \Rightarrow \text{Flächeninhalt Null}$ $x_{2/3} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} = 3 \pm 1$ $x_2 = 4 \Rightarrow \text{Flächeninhalt Null}$ $x_3 = 2 \quad f(2) = 8$ $a = 2 \text{ und } b = 8$		1 1 1 1			
3.3	$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$ Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von 8 FE.			3		
	Summe:	4	7	4	▼	
	Mögliche BE:	15				Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
4.1	$I = \int_{-3}^3 f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2(F(3) - F(0))$ wegen Symmetrie F ist Stammfunktion von f $F(x) = 0,05x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x$ $F(3) = 6,15 \text{ und } F(0) = 0 \Rightarrow I = 12,3$		2			
				1		
4.2	Ansatz: $g(x) = 6,25 \Leftrightarrow 0,4x^4 - 1,8x^2 - 1,65 = 0$ Substitution $x^2 = z$ führt zu der Gleichung $0,4z^2 - 1,8z - 1,65 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4,5z - 4,125 = 0$ Lösungen: $z_1 = -0,78109$ (nicht sinnvoll) und $z_2 = 5,28109$ Resubstitution ergibt $x_{1/2} = \pm\sqrt{5,28109} = \pm 2,29806$ Also ist $a = 4,59612 m \approx 4,596 m$		2			
		2				
		2				
			1			
			1			
Zwischensumme:		8	6	1		Aufgaben 4.1 bis 4.2

		Zwischensumme:	8	6	1		Aufgaben 4.1 bis 4.2
4.3	<p>Der gesuchte Flächeninhalt ist $A_{ges} = A_1 - A_2 - A_3$, wobei</p> <p>$A_1 =$ Flächeninhalt des Rechtecks von -3 bis 3 der Höhe $6,25$ $= 37,5$</p> <p>$A_2 = \int_{-3}^3 f(x) dx = 12,3$ (s.o.) und</p> <p>$A_3 =$ Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von g und der Gerade h mit $h(x) = 6,25$</p> <p>$A_3 \approx 2 \left \int_0^{2,298} d(x) dx \right = 2 D(2,298) - D(0)$</p> <p>$d$ ist die Differenzfunktion von g und h $d(x) = h(x) - g(x) = -0,4x^4 + 1,8x^2 + 1,65$</p> <p>$D$ ist die Stammfunktion von d $D(x) = -0,08x^5 + 0,6x^3 + 1,65x$</p> <p>$D(2,297) \approx 5,946$ und $D(0) = 0 \Rightarrow A_3 \approx 11,892$ $\Rightarrow A_{ges} \approx 13,308$</p> <p>Das Logo hat einen Flächeninhalt von ca. $13,308 \text{ m}^2$.</p>						
			4	3	1		
						2	
			1				
			3				
			1				
							15 BE
		Summe:	17	11	2	▼	
		Mögliche BE:	30				Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4