

Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Herbst 2012

Fach	Mathematik (A)
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	19.11.2012
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichnete Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung). Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): _____ **Blätter**

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte und Gesamtnote¹:

Aufgabe Nr.:	Soll %	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	_____ Punkte	_____ Punkte
Maluspunkt	-1	_____ Punkt	_____ Punkt
Insgesamt:		_____ Punkte Note: _____	_____ Punkte Note: _____
Datum, Unterschrift:			

¹ gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1

/40

Die Flugbahn eines Basstölpels (s. Bild), der von seinem Nistplatz auf einem 20m hohen Felsplateau über die Klippe fliegt, um im Wasser nach Fischen zu jagen, kann annähernd durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10,24x + 20,48; x \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden. Dabei gilt für die x -Achse: 1 LE $\hat{=}$ 10m, die Felskante liegt bei $x = 0$. Gütig ist die Funktion vom Nistplatz bei $x \approx -2,4$ bis $x = 4$.

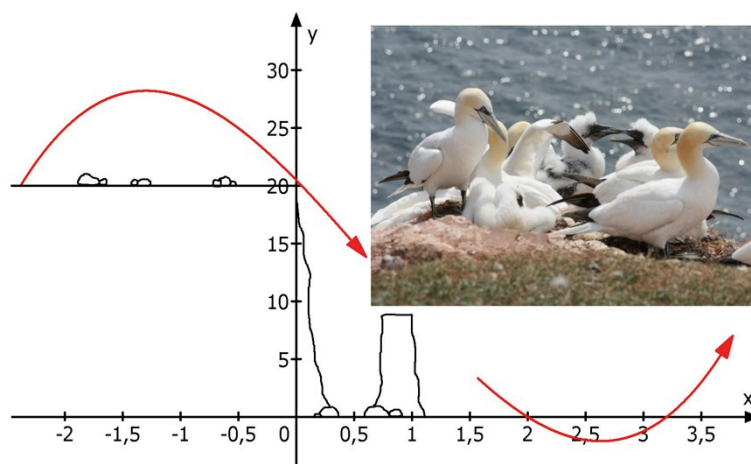


Foto: H. Niebel/J. Lehnen

- 1.1 Ermitteln Sie rechnerisch, wie weit von der Felskante entfernt der Vogel ins Wasser ein-, und wo er wieder auftaucht. /8
- 1.2 Bestimmen Sie die Höhe, in der der Vogel die Felskante überfliegt. /2
- 1.3 Berechnen Sie, wie tief der Tölpel ins Wasser eintaucht und wie groß seine maximale Flughöhe bezogen auf den Meeresspiegel ist. /10
- 1.4 Bestimmen Sie den Punkt, in dem die Flugbahn des Vogels während des Sinkfluges am steilsten ist. /5
- 1.5 Ein einzelner Fels ragt 10m von der Felskante entfernt 9m hoch aus dem Wasser. Prüfen Sie, ob der Vogel den Fels überfliegen kann, ohne ihn zu berühren. /3
- 1.6 Berechnen Sie den Winkel α , unter dem der Vogel ins Wasser eintaucht. /5
Hinweis: Achten Sie hierbei auf die Skalierung.
- 1.7 Der Vogel ist direkt aus seinem Nest heraus gestartet. Berechnen Sie den Abstand des Nestes von der Felskante mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens (z. B. Newtonsches Näherungsverfahren). Führen Sie zwei Iterationsschritte durch und runden Sie Ihr Ergebnis entsprechend der gefundenen Genauigkeit. /7

2

/15

Der Graph der ganzrationalen Funktion vierten Grades besitzt bei $W(0|0)$ einen Wendepunkt. Die x -Achse ist Wendetangente in diesem Wendepunkt. Ein weiterer Wendepunkt des Graphen der Funktion f ist $W(1|-1)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f .

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad x \in \mathbb{R}$$

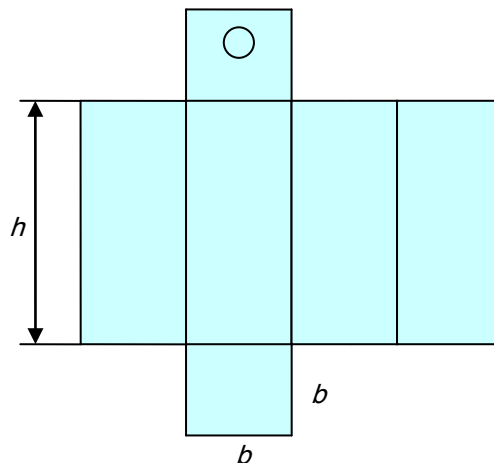
$$\begin{aligned} 0 &= &&&&&&&&& a_0 \\ 0 &= &&&&&&&& a_1 \\ 0 &= &&&& 2 a_2 \\ -3 &= & 3 a_4 & + & 3 a_3 & + & 3 a_2 & + & 3 a_1 \\ 0 &= & 24 a_4 & + & 12 a_3 & + & 4 a_2 \end{aligned}$$

3**/15**

Das Volumen eines Fruchtsafts beträgt 1 Liter (1000 cm^3). Um das Aufschütteln des Saftes zu ermöglichen, liegt das Volumen der Verpackung (Tetra Pack[®]) 10% über dem Volumen des Saftes.

Die Verpackung wird aus einem Stück beschichteten Karton (Kantenlängen: b , h) hergestellt (siehe Abbildung).

Zur Vereinfachung werden die Falzungen vernachlässigt und nur die Außenflächen betrachtet.



3.1 Berechnen Sie das Volumen V der Fruchtsaftpackung in cm^3 . **/1**

3.2 Zeigen Sie, dass O eine Zielfunktion ist, mit der der Oberflächeninhalt des Fruchtsaftkartons berechnet werden kann: **/6**

$$O(b) = 2b^2 + \frac{4400}{b} ; D_o =]0; \infty[$$

$$(1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 1 \text{ VE} \hat{=} 1 \text{ cm}^3)$$

3.3 Ermitteln Sie diejenigen Werte für h und b , für die der Materialverbrauch bei der Verpackung minimal wird. **/6**

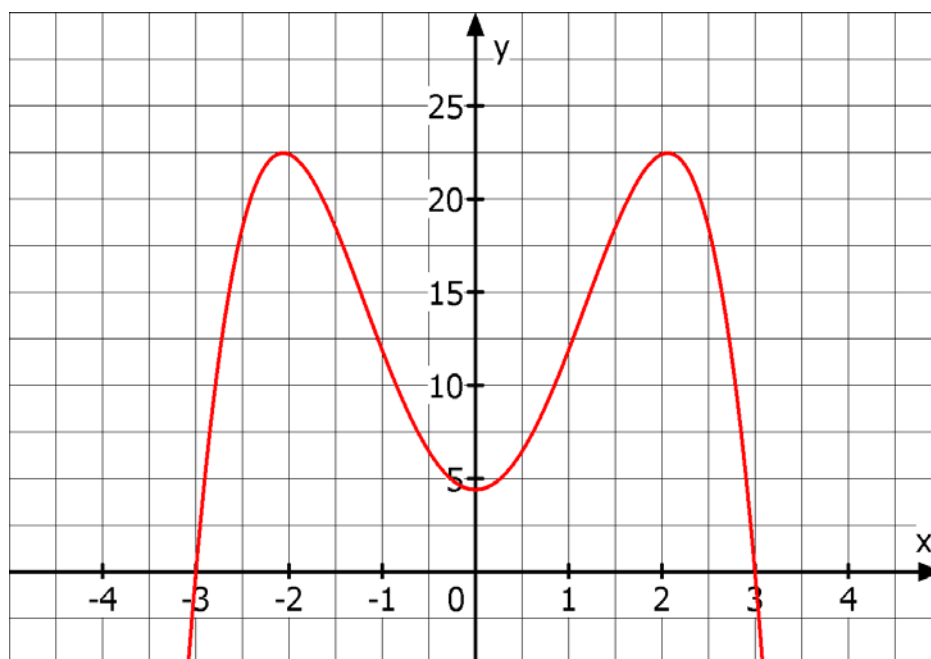
3.4 Berechnen Sie den Oberflächeninhalt für diese optimierte Verpackung. **/2**

4

/30

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^4 + 8,5x^2 + 4,5 ; x \in \mathbb{R} \text{ und den Nullstellen } x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 3.$$

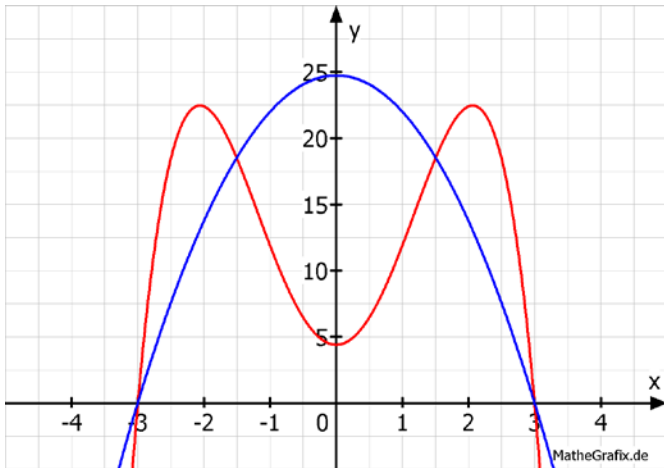


- 4.1 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-3}^3 (-x^4 + 8,5x^2 + 4,5) dx$ und erläutern Sie, ob **/4**
 der gefundene Wert mit dem Inhalt der vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche übereinstimmt. Begründen Sie Ihre Aussage.
- 4.2 Gegeben sei nun außerdem die Funktion g mit $g(x) = -2,75x^2 + 24,75 ; x \in \mathbb{R}$. **/12**
 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen sowie dem Graphen von f und zeichnen Sie ihn in das obige Koordinatensystem ein.
- 4.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g vollständig **/9**
 eingeschlossen wird.
- 4.4 Bestimmen Sie den jeweiligen prozentualen Anteil der einzelnen Teilflächen an der **/5**
 von den beiden Graphen eingeschlossenen Gesamtfläche.

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	Nullstellen: $f(x_N) = 0$ Die erste Lösung kann der Zeichnung entnommen oder geraten werden: $x_1 = 2$ Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - 10,24x + 20,48) : (x - 2) = x^2 - 10,24$; $\Rightarrow x_2 = 3,2$; $x_3 = -3,2$. Im Wasser liegen nur x_1 und x_2 , wegen der Skalierung $1LE = 10m$ taucht der Vogel also bei $20m$ unter und bei $32m$ wieder auf.	1 1 1	4 1	
1.2	$f(0) = 20,48$; bezogen auf den Meeresspiegel also $20,48m$; bezogen auf die Felskante $0,48m$.	2		
1.3	Gesucht sind die Extrema der Bahnkurve. Notw. und hinr. Bed.: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$; $f'(x_E) = 3x^2 - 4x - 10,24 = 0$; daraus ergeben sich die Extremstellen $x_{E1} \approx -1,31$ und $x_{E2} \approx 2,65$; $f''(x) = 6x - 4$ $f''(-1,31) = -11,86 < 0 \Rightarrow HP$ $f''(2,65) = 11,9 > 0 \Rightarrow TP$ Flughöhe und Tauchtiefe entsprechen den Funktionswerten der Extremstellen: $f(-1,31) \approx 28,21$; $f(2,65) \approx -2,09$ Die maximale Flughöhe beträgt $28,21m$, die max. Tauchtiefe beträgt $2,09m$.	2 2	1 1 1 2 1	
1.4	Gesucht ist hier der Wendepunkt; notw. und hinr. Bed.: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$. $f''(x_W) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x_W = \frac{2}{3}$ $f'''(\frac{2}{3}) = 6 > 0 \Rightarrow$ rechts-links-Wechsel $f(\frac{2}{3}) \approx 13,06 \Rightarrow P(\frac{2}{3} 13,06)$ bzw. bei Berücksichtigung der Skalierung: $P(6,67m 13,06m)$	1 1	2 1	
1.5	$f(1) = 9,24m$; der Vogel überfliegt den Fels.	2	1	
1.6	$m_t = \tan \alpha \Rightarrow \arctan(m_t) = \alpha$ $f'(2) = -6,24$ die x-Achse ist um Faktor 10 gestaucht, gesucht ist also $\arctan(-0,624) = -31,96^\circ$, der Vogel taucht unter einem Winkel von etwa 32° ins Wasser ein.		1 1 1	2
1.7	Die Höhe des Nestes entspricht dem Funktionswert $f(x_0) = 20$, zu lösen ist also die Gleichung $20 = x^3 - 2x^2 - 10,24x + 20,48$ bzw. $0 = x^3 - 2x^2 - 10,24x + 0,48$	1		

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
	Newtonsche Näherungsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit}$ $x_0 = -2,4 \text{ (s. Einleitung),}$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10,24x + 0,48 \quad \text{sowie}$ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 10,24$ Damit wird $x_1 \approx -2,38269$ und $x_2 \approx -2,38252$; die ersten drei Nachkommastellen stimmen überein, entsprechend gerundet ergibt sich $x \approx -2,383$; das Nest ist also etwa 23,38m von der Felskante entfernt.	1	1 1 1	1 1
	Summe	15	21	4
	mögliche BE		40	

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB																																																											
		I	II	III																																																									
2	<p>Ansatz:</p> $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ $f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$ <p>Bedingungsgefüge:</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(0) = 0$ ($a_0 = 0$) $f'(0) = 0$ (Steigung der Tangente) $f''(0) = 0$ (Wendepunkt bei $W_1(0 0)$) $f(1) = -1$ (Wendepunkt bei $W_2(1 -1)$) $f''(1) = 0$ (Wendepunkt bei $W_2(1 -1)$) 	<p>1 1 1</p> <p>1</p>	<p>1 1 1 1</p>																																																										
	<p>Gleichungssystem:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>I.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_0</td> </tr> <tr> <td>II.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_1</td><td></td> </tr> <tr> <td>III.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>IV.</td><td>-1</td><td>=</td><td>a_4</td><td>+</td><td>a_3</td><td>+</td><td>a_2</td><td>+</td><td>a_1</td><td>+</td><td>a_0</td> </tr> <tr> <td>V.</td><td>0</td><td>=</td><td>$12a_4$</td><td>+</td><td>$6a_3$</td><td>+</td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </table> <p>Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)</p> <p>Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a_4 = 1; a_3 = -2; a_2 = 0; a_1 = 0; a_0 = 0$</p>	I.	0	=								a_0	II.	0	=							a_1		III.	0	=				$2a_2$					IV.	-1	=	a_4	+	a_3	+	a_2	+	a_1	+	a_0	V.	0	=	$12a_4$	+	$6a_3$	+	$2a_2$						<p>5</p>	
I.	0	=								a_0																																																			
II.	0	=							a_1																																																				
III.	0	=				$2a_2$																																																							
IV.	-1	=	a_4	+	a_3	+	a_2	+	a_1	+	a_0																																																		
V.	0	=	$12a_4$	+	$6a_3$	+	$2a_2$																																																						
	<p>Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x) = x^4 - 2x^3$</p>	1																																																											
	Summe	6	9	0																																																									
	mögliche BE	15																																																											

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.1	$\int_{-3}^3 (-x^4 + 8,5x^2 + 4,5) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{17}{6}x^3 + 4,5x \right]_{-3}^3 \approx 82,8$ <p>Der Wert des Integrals entspricht dem Flächeninhalt, da die Grenzen des Integrals mit den Nullstellen übereinstimmen (s. Skizze) und auf dem betrachteten Intervall keine Vorzeichenwechsel zu finden sind.</p>		3	1
4.2	<p>Achsenschnittpunkte des Graphen von g:</p> <p>y-Achse: $g(0) = 24,75 \Rightarrow S_y(0 24,75)$</p> <p>x-Achse: $f(x_N) = 0 = -2,75x_N^2 + 24,75$ $\Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$ $\Rightarrow S_{x1}(-3 0) ; S_{x2}(3 0)$</p> <p>Schnittpunkte der Graphen von f und g: $f(x_S) = g(x_S)$ $-x^4 + 8,5x^2 + 4,5 = -2,75x^2 + 24,75$ $0 = x^4 - 11,25x^2 + 20,25$</p> <p>Substitution liefert $x_{1,2} = \pm 3$ und $x_{3,4} = \pm 1,5$; mit $f(\pm 3) = 0$ und $f(\pm 1,5) = 18,5625 \approx 18,56$ ergibt sich $S_{1,2}(\pm 3 0)$ und $S_{3,4}(\pm 1,5 18,6)$.</p> <p>Skizze:</p> 	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>2</p>	

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.3	<p>Zu berechnen ist unter Berücksichtigung der Symmetrie: $A_{ges} = 2 \cdot (A_1 + A_2)$ wobei</p> $A_1 = \int_0^{1,5} (x^4 - 11,25x^2 + 20,25) dx$ $= \left[\frac{1}{5}x^5 - 3,75x^3 + 20,25x \right]_0^{1,5}$ $= 19,2375 FE \quad \text{und}$ $A_2 = \left \int_{1,5}^3 (x^4 - 11,25x^2 + 20,25) dx \right $ $= \left \left[\frac{1}{5}x^5 - 3,75x^3 + 20,25x \right]_{1,5}^3 \right $ $= -11,1375 = 11,1375 FE$ $A_{ges} = 2 \cdot (19,2375 + 11,1375) = 2 \cdot 30,375 = 60,75 FE$	1 1 1 1	 1 1 1	1 1
4.4	<p>Die drei Teilflächen haben einen Flächeninhalt von $2 \cdot 19,2375 = 38,475 FE$ bzw. $11,1375 FE$.</p> $60,75 \hat{=} 100\%$ $38,475 \hat{=} x\%$ <p>per Dreisatz ergibt sich für die mittlere Fläche ein Anteil von 63,33%, die Differenz zu 100% beträgt 36,67%; d.h. für die beiden Außenflächen bleiben jeweils 18,33%.</p>	1 1 1	 1 1	
	Summe	13	14	3
	mögliche BE	30		