Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Herbst 2012

Fach	**Mathematik (B)**
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	03.12.2012
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus- Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ____ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	**Soll %**	**Ist**	**Ist (ggf. Zweitkorrektur)**
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		______ **Punkte** **Note:**______	______ **Punkte** **Note:**______
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 /40

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\,;\ x \in \mathrm{IR}.$$

1.1 Überprüfen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie die Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. **/2**

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. **/5**

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und bestimmen Sie die Art der Extrema. **/12**

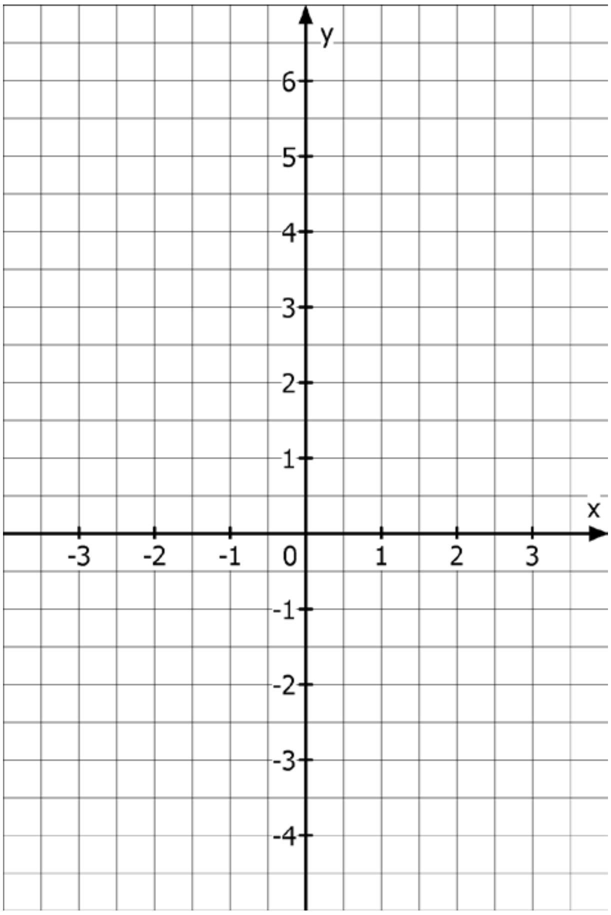
1.5 Ermitteln Sie die Wendepunkte/Sattelpunkte des Graphen von f und stellen Sie die Gleichung der Wendetangente t_W auf. **/11**

1.6 Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Wendetangente t_W und der x-Achse. **/2**

1.7 Skizzieren Sie den Graphen von f und den Graphen der Tangente t_W im Intervall $[-2; 2{,}5]$ in das nachfolgende Koordinatensystem. **/6**

→ Fortsetzung nächste Seite →

graphische Darstellung zu 1.7



2 **/15**

Der Graph der ganzrationalen Funktion f 3. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und hat an der Stelle $x = 2$ eine waagerechte Tangente. Die Tangente im Wendepunkt $W(4 \mid y_W)$ hat die Steigung $m = -4$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad ; x \in \mathrm{IR}$$

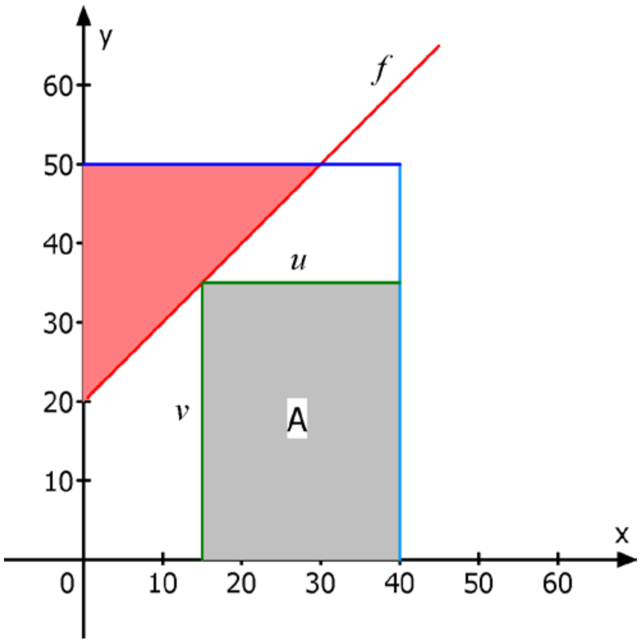
$$\begin{array}{rcrcrcrr}
0 & = & & & & & & a_0 \\
0 & = & 24\,a_3 & + & 8\,a_2 & + & 2a_1 & \\
-2 & = & 24\,a_3 & + & 4\,a_2 & + & 0{,}5a_1 & \\
0 & = & 12\,a_3 & + & a_2 & & &
\end{array}$$

3 /15

Aus einer rechteckigen Glasplatte mit den Seiten $a = 40\,\text{cm}$ und $b = 50\,\text{cm}$ ist das in der Abbildung dargestellte dreieckige Stück herausgebrochen. Die Bruchkante kann mit der Funktion:

$$f(x) = x + 20\,;\; x \in \mathrm{IR} \wedge 0 < x < 40$$

beschrieben werden. Aus dem Reststück soll eine rechteckige Platte mit dem Flächeninhalt A herausgeschnitten werden.



3.1 Zeigen Sie, dass A eine Zielfunktion ist, mit der der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte berechnet werden kann: **/5**

$$A(x) = -x^2 + 20x + 800\,;\; x \in D_A$$

3.2 Berechnen Sie die Maße u und v der Seiten der Platte, sodass der Flächeninhalt maximal wird. **/8**

3.3 Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt A der rechteckigen Platte, die aus dem Reststück herausgeschnitten werden soll. **/2**

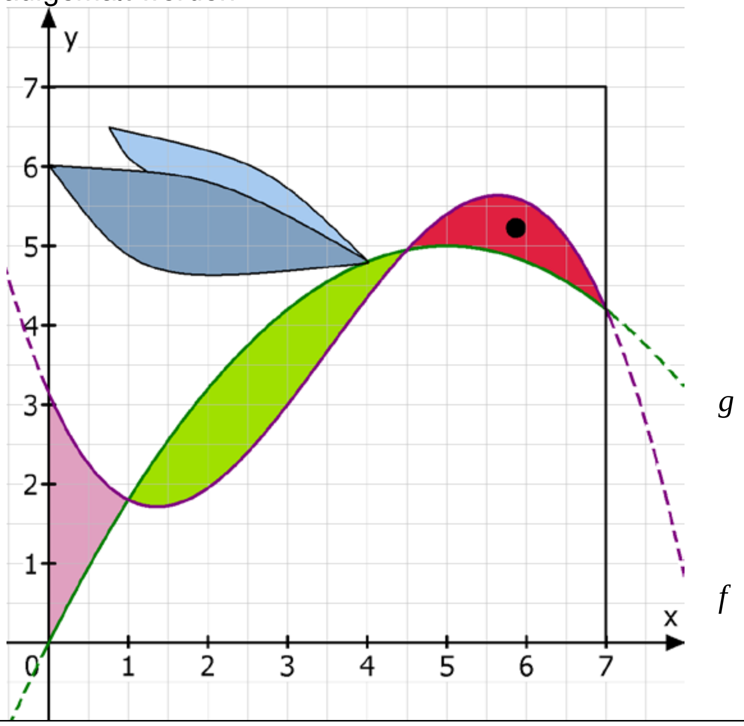
4 /30

Die Fassade des Vogelhauses eines Zoos soll ein Fenster in Gestalt eines stilisierten Vogels erhalten. Die Wand hat eine quadratische Grundfläche von 7 m Kantenlänge, die Konturen von Kopf, Rumpf und Schwanz des Vogels werden durch die Graphen der Funktionen f und g mit:

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}05x^2 - 2{,}3x + 3{,}15 \;;\; x \in \mathrm{IR}$$

$$g(x) = -0{,}2x^2 + 2x \;;\; x \in \mathrm{IR}$$

beschrieben (s. Skizze). Die Flügel gehören nicht zur Fensterfläche, sie sollen wie das Auge nachträglich aufgemalt werden.



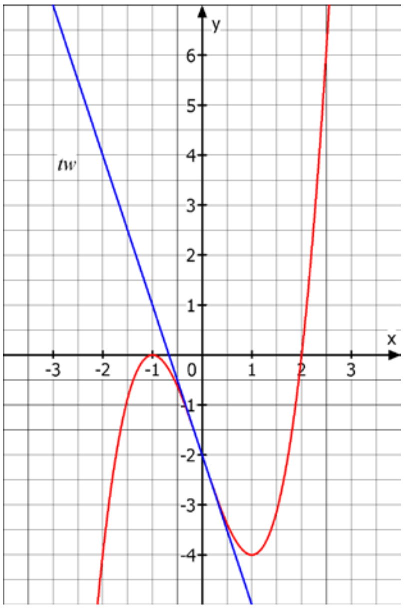
4.1 Berechnen Sie die Schnittstellen der Graphen von f und g. **/6**

4.2 Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der Glasflächen von Schwanz, Rumpf und Kopf. **/10**

4.3 Ermitteln Sie, wie groß der prozentuale Anteil der Fensterfläche an der Gesamtfläche der Fassade ist. **/3**

4.4 Unterhalb des Vogels soll die Wand bis auf 3 m Höhe mit Anti-Graffiti-Farbe gestrichen werden. Diese Farbe wird in 1 Liter-Gebinden angeboten, ein Eimer kostet € 44,00 und reicht für etwa 6,25 m² Wandfläche. Schraffieren Sie den zu behandelnden Bereich und zeigen Sie, dass der Graph von f durch den Punkt $P(3\,|\,3)$ verläuft. Berechnen Sie die benötigte Menge Farbe sowie die Kosten dieses Vorhabens. **/11**

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	$f(x) \neq f(-x) \wedge f(x) \neq -f(-x)$ oder die Exponenten von x sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse, noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.	2		
1.2	Verhalten im Unendlichen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$		1 1	
1.3	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f(x)=0$ $x^3-3x-2=0$ *Polynomdivision* $x_1=-1$ (*durch Ausprobieren*) $(x^3-3x-2):(x+1)=x^2-x-2$ $x_2=2 \wedge x_3=-1$ *Schnittpunkte mit der* $x-$*Achse*: $N_{1/3}(-1\|0),\ N_2(2\|0)$ $f(0)=-2$ *Schnittpunkt mit der* $y-$*Achse*: $P_y(0\|-2)$	1 1 1	1 1	
1.4	Bestimmung der Extrempunkte: $f(x)=x^3-3x-2$ $f'(x)=3x^2-3$ $f''(x)=6x$ $f'(x)=0$ $3x^2-3=0$ $3x^2=3$ $x^2=1;\quad x_{E1}=1 \wedge x_{E2}=-1$ $f''(1)=6>0 \Rightarrow$ *lokales Minimum* $f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ *lokales Maximum* $f(1)=-4;\ E_{\min}(1\|-4)$ $f(-1)=0;\ E_{\max}(-1\|0)$	1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1	
1.5	Berechnung der Wendepunkte:			

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$f''(x)=6x$ $f''(x)=0$ $6x=0\,;\,x_W=0$ $f'''(0)=6$ $f'(0)=-3 \Rightarrow$ *kein Sattelpunkt* $f(0)=-2\,;\,W(0\,\|\,-2)$ Bestimmung der Tangentengleichung: $f'(x_W)=m$ $f'(0)=-3$ $t: y=mx+n$ $-2=-3\cdot 0+n$ $n=-2 \Rightarrow y=-3x-2$ (*Tangentengleichung*)	1 1 1 1 1	1 1 2	2
1.6	Bestimmung des Winkels: $m=\tan\alpha \Rightarrow \alpha=71{,}6°$		2	
1.7	Graphen der Funktionen f und t_w 	4	2	
	Summe	18	20	2
	mögliche BE	40		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Ansatz:
$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
$f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$
$f''(x)=6a_3x+2a_2$

Bedingungsgefüge:
1. $f(0)=0$ (Graph geht durch den Ursprung)
2. $f'(2)=0$ (Steigung der Tangente an der Stelle $x=2$)
3. $f'(4)=-4$ (Steigung im Wendepunkt)
4. $f''(4)=0$ (Wendepunkt bei $W(4\mid y_W)$)</td><td>1
1
1

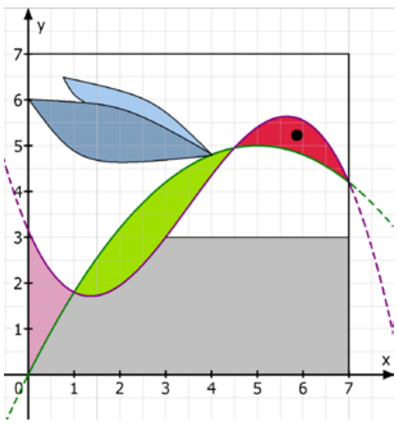
1</td><td>1
1
1
1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gleichungssystem:
<table>
<tr><td>I.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_0</td></tr>
<tr><td>II.</td><td>0</td><td>=</td><td>$12a_3$</td><td>+</td><td>$4a_2$</td><td>+</td><td>a_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III.</td><td>-4</td><td>=</td><td>$48a_3$</td><td>+</td><td>$8a_2$</td><td>+</td><td>a_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV.</td><td>0</td><td>=</td><td>$24a_3$</td><td>+</td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösen des Gleichungssystems
(ebenso Ersatz-LGS)

Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):
$a_3=\frac{1}{3};\quad a_2=-4;\quad a_1=12;\quad a_0=0$</td><td>

1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Für die Funktionsgleichung gilt:
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>6</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Bestimmung der Zielfunktion:			
	$A(u,v) = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad$ Hauptbedingung	1		
	$u = 40 - x$		1	
	$v = f(x) = 20 + x \quad \Rightarrow$ Nebenbedingung		1	
	daraus folgt A(x):			
	$A(x) = (40-x)(20+x)$		1	
	$= 40x + 800 - x^2 - 20x$			
	$= -x^2 + 20x + 800$	1		
3.2	Bestimmung von *u* und *v*:			
	$A'(x) = -2x + 20$		1	
	$A''(x) = -2$		1	
	$A'(x) = 0$	1		
	$-2x + 20 = 0$	1		
	$x = 10$			
	$A''(10) = -2 < 0$; *lok. Maximum*	1		
	$u = 40 - x = 30cm$	1		
	$v = x + 20 = 30cm$	1		
		1		
3.3	Bestimmung des maximalen Flächeninhalts:			
	$A(u,v) = u \cdot v$	1		
	$= 30cm \cdot 30cm = 900cm^2$	1		
	Summe	10	5	0
	mögliche BE	15		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Ansatz $f(x_S) = g(x_S)$, Umformen liefert die Differenzfunktion $h(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15 = 0$ Durch Ablesen/Einsetzen erhält man die erste Schnittstelle $x_1 = 1$. Division durch $-0{,}1$ und Polynomdivision mit $(x^3 - 12{,}5x^2 + 43x - 31{,}5):(x-1) = x^2 - 11{,}5x + 31{,}5$ liefert die weiteren Schnittstellen $x_2 = 4{,}5$ und $x_3 = 7$.	1 2	1 2	
4.2	Zu berechnen sind drei Integrale über die Differenzfunktion $h(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15$ Mit der Stammfunktion $H(x) = -\frac{1}{40}x^4 + \frac{5}{12}x^3 - \frac{43}{20}x^2 + 3{,}15x$ $A_{Schwanz} = \int_0^1 h(x)dx \approx 1{,}39m^2$ $A_{Rumpf} = \left\lvert \int_1^{4,5} h(x)dx \right\rvert \approx \lvert -3{,}04 \rvert = 3{,}04m^2$ $A_{Kopf} = \int_{4,5}^{7} h(x)dx \approx 1{,}24m^2$	1	1 2 2	2 2
4.3	Der Flächeninhalt der gesamten Fassade beträgt $7 \cdot 7 = 49m^2$, der Gesamtinhalt der Fensterfläche ist $A_{Schwanz} + A_{Rumpf} + A_{Kopf} = 1{,}39m^2 + 3{,}04m^2 + 1{,}24m^2$ $= 5{,}67m^2$ Per Dreisatz errechnet man $5{,}67 \cdot 100 : 49 = 11{,}57\%$.	1 1	1	
4.4	Schraffur:  Zu zeigen ist außerdem $f(3) = 3$, somit ist die obere Grenze für die zweite Teilfläche 3. Zu berechnen sind wiederum drei Teilflächen:	1 1	2	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$A_1 = \int_0^1 (-0,2x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{1}{15}x^3 + x^2\right]_0^1 \approx 0,93m^2$		2	
	$A_2 = \int_1^3 (-0,1x^3 + 1,05x^2 - 2,3x + 3,15)dx$		2	
	$= \left[-\frac{1}{40}x^4 + \frac{7}{20}x^3 - \frac{23}{20}x^2 + 3,15x\right]_1^3 = 4,2m^2$		1	
	$A_3 = 4 \cdot 3 = 12m^2$			
	Die zu streichende Gesamtfläche ist $A_{ges} = 0,93 + 4,2 + 12 = 17,13m^2$.		1	
	Bei einer Ergiebigkeit von $6,25m^2$ pro Liter benötigt man $17,13 : 6,25 \approx 2,74l$ von der Farbe. Man muss also drei Eimer kaufen, die Kosten betragen demnach $3 \cdot 44,- = 132,-$ €.		1	
	Summe	8	18	4
	mögliche BE	30		