1 Funktionsuntersuchung /38

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x+2\ ;x\in\mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. **/7**

1.3 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f. **/15**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $\left[-4,5;4\right]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. Berechnen Sie auch die Funktionswerte am Rand des Intervalls. **/5**

Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.5 Verschiebt man den Graphen der Funktion f um eine Längeneinheit in Richtung *y*-Achse nach oben, erhält man den Graphen der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x+3;\ x\in\mathbb{R}$. **/7**

Eine Nullstelle der Funktion g wird im Intervall $\left[-5;-4\right]$ vermutet.

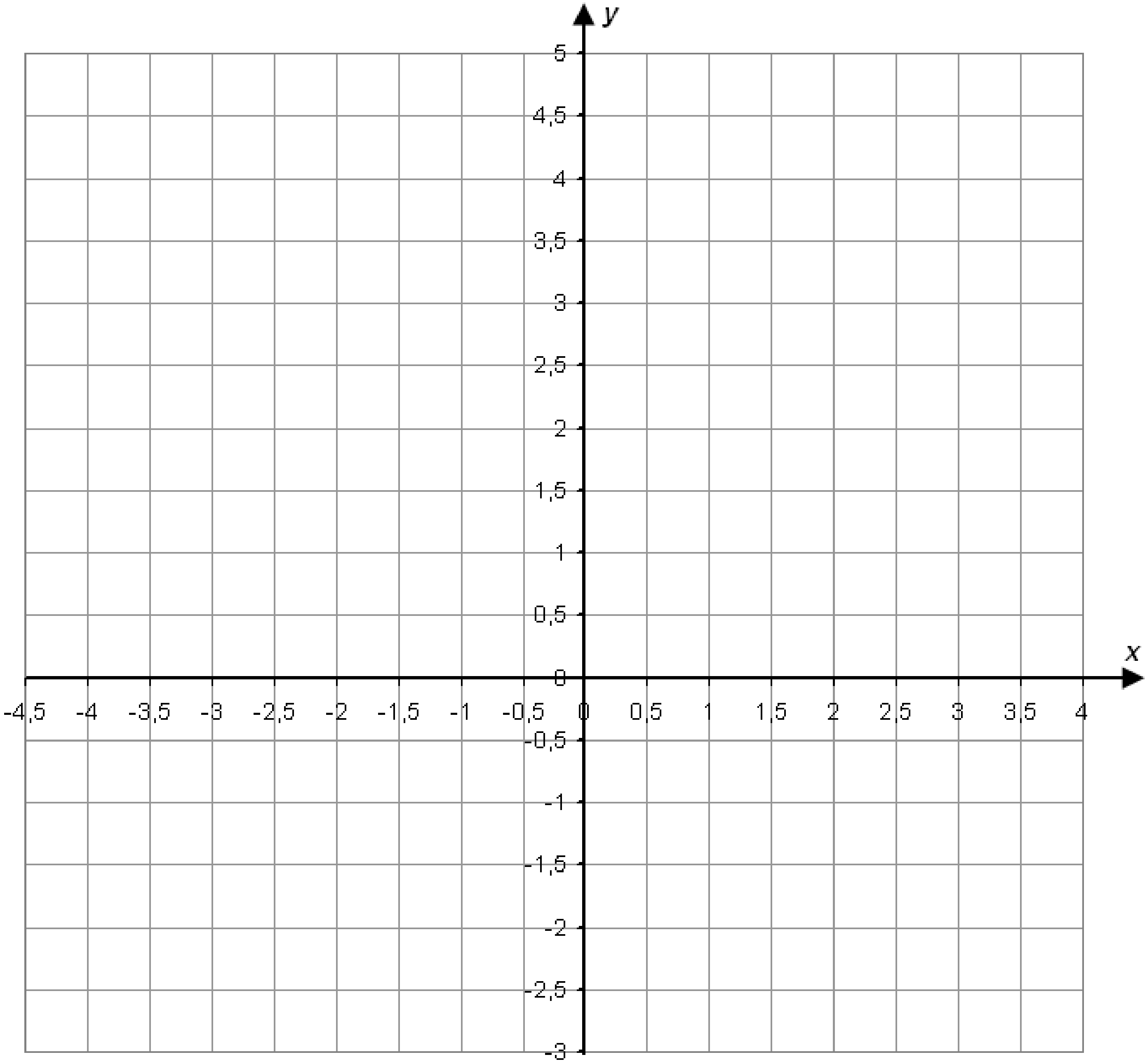
Weisen Sie nach, dass in diesem Intervall wirklich eine Nullstelle liegt.

Berechnen Sie einen Näherungswert für diese Nullstelle durch ein geeignetes Verfahren. Brechen Sie die Berechnung nach drei Iterationsschritten ab.

Beurteilen Sie die Genauigkeit des von Ihnen berechneten Näherungswertes.

Fortsetzung auf der folgenden Seite →

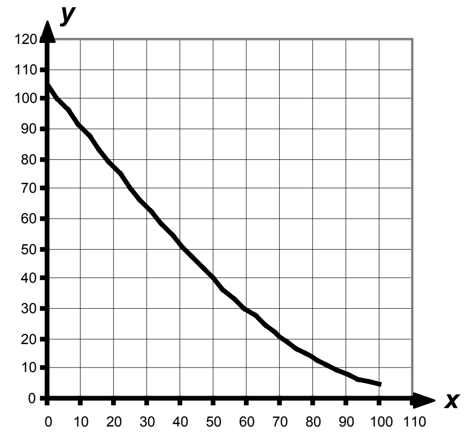
Koordinatensystem zu Aufgabe 1: Funktionsuntersuchung



2 Skisprungschanze /16

Der Anlauf einer Skisprungschanze (siehe Abbildung) soll durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden, so dass der Startpunkt S(0|105) ein Wendepunkt ist und die Tangente im Absprungpunkt A(100|5) die Steigung –0,2 hat.

Dieses Problem ist eindeutig lösbar.



2.1 Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten dieser Funktion auf. **/7**

Zur Kontrolle:

$$\begin{array}{rrrrcr} & & & d & = & 105 \\ & 2\,b & & & = & 0 \\ 1\,000\,000\,a & +\,10\,000\,b & +100\,c & +\,d & = & 5 \\ 30\,000\,a & +\,200\,b & +\,1\,c & & = & -0{,}2 \end{array}$$

2.2 Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung mithilfe des obigen Gleichungssystems. **/6**

Bemerkung: Die Variablen a, b, c, d sind die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion 3. Grades in absteigender Reihenfolge.

2.3 Der Schüler Felix hat eine Abschrift der Aufgabenstellung (s. o.) bekommen, in der das Wort „dritten“ unleserlich ist. Trotzdem erkennt er aus den geforderten Eigenschaften, dass es eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein muss, wenn man zu einer eindeutigen Lösung kommen möchte. **/3**

Erläutern Sie, welche mathematischen Überlegungen ihm zu dieser Erkenntnis verhelfen.

3 Pelletspeicher /15

Ein Speicher für Holzpellets (Holzkügelchen als Brennstoff) hat die Form eines Zylinders mit einer aufgesetzten Halbkugel.

Der Radius des Zylinders sowie der Radius der Halbkugel ist r, die Höhe des Zylinders ist h.

Der Speicher besitzt ein Fassungsvermögen (Volumen) von $12\ \text{m}^3$. Er ist so konstruiert, dass die Oberfläche des Speichers, bestehend aus der Grund- und Mantelfläche des Zylinders sowie der Oberfläche der Halbkugel (ohne Grundkreis), eine minimale Größe annimmt.

3.1 Skizzieren Sie den Körper und zeichnen Sie die Radien r sowie die Höhe h ein. **/2**

3.2 Die Oberfläche A des Speichers kann durch einen Funktionsterm mit der Variablen r wie folgt beschrieben werden: $A(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{24}{r} = \frac{5}{3}\pi r^2 + 24 r^{-1}$ **/7**

Leiten Sie diesen Funktionsterm her.

3.3 Bestimmen Sie den Radius r sowie die Höhe h des Speichers mit minimaler Oberfläche. **/6**

Berechnen Sie die Oberfläche dieses Speichers.

4 Augenklinik /31

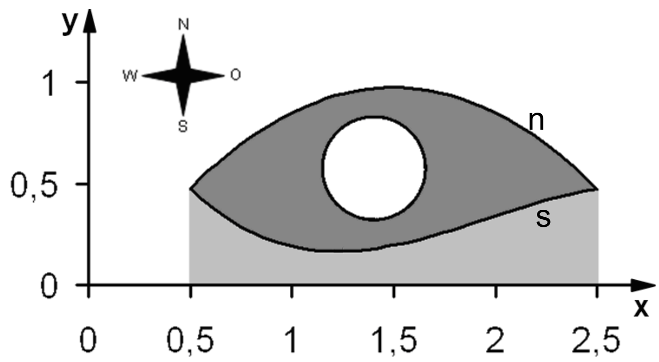
Ein Architekt plant auf einem rechteckigen Grundstück den Bau einer Augenklinik mit einem kreisförmigen Innenhof. Von oben sieht das Gebäude wie ein riesiges Auge aus (siehe Abbildung).

Das verwendete Koordinatensystem benutzt die südwestliche Ecke des Grundstücks als Koordinatenursprung. Eine Längeneinheit entspricht 100 Metern. Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung und die y-Achse in Süd-Nord-Richtung.

In diesem Koordinatensystem lassen sich der nördliche und südliche Rand des Gebäudes durch folgende Funktionsgleichungen beschreiben:

$n(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x - 0{,}15$ und

$s(x) = -0{,}2x^3 + 1{,}18x^2 - 1{,}99x + 1{,}2$.



1 LE = 100 m

4.1 Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte der Randfunktionen an den Stellen 0,5 und 2,5 liegen und geben Sie die Schnittpunkte an. **/4**

4.2 Zwischen dem Gebäude und der südlichen Grundstücksgrenze soll eine Grünfläche angelegt werden, die in der Abbildung hellgrau gefärbt ist. Die östliche und die westliche Grenze der Grünfläche sollen parallel zur *y*-Achse verlaufen. **/6**

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Grünfläche und geben Sie das Ergebnis in Quadratmetern an.

4.3 Das Gebäude erhält ein Flachdach, das in der Abbildung dunkelgrau gefärbt ist. **/7**

Der Durchmesser des Innenhofs (weiße Kreisfläche) beträgt 50 Meter.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Daches und geben Sie das Ergebnis in Quadratmetern an.

4.4 Begründen Sie, ohne den Wert des Integrals zu berechnen, dass gilt: **/2**

$$\int_1^2 \left(s(x) - n(x)\right) dx < 0.$$

Dazu benötigte Informationen können der Abbildung entnommen werden.

4.5 Zeigen Sie, dass für $b = 2$ die Gleichung $\int_1^b n(x)\,dx = \frac{14}{15}$ erfüllt ist. **/12**

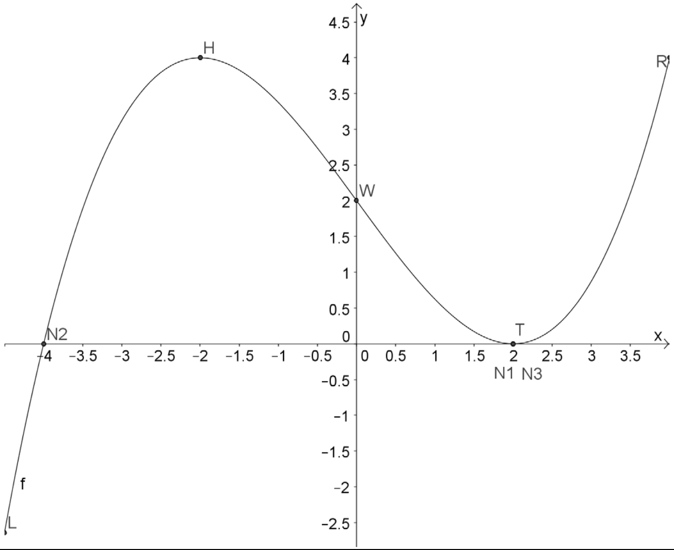
Berechnen Sie die anderen Lösungen dieser Gleichung.

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich.
Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist der korrigierenden Lehrkraft überlassen.

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
1.1	Die Exponenten von *x* sind sowohl gerade als auch ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur *y*-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. oder $f(x) \neq f(-x)\,,\, f(-x) \neq -f(x)$	2				
	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 3. Da a_3 im Summand a_3x^3 positiv ist, verläuft der Graph von „minus unendlich“ nach „plus unendlich“ oder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.		2			
1.2	Nullstellen: $f(x)=0$ $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 12x + 16 = 0$ Erste Lösung $x_{N1} = 2$ durch Probieren $(x^3 - 12x + 16):(x-2) = x^2 + 2x - 8$ Polynomdivision $x^2 - 2x - 8 = 0$ p-q-Formel $x_{N2} = -4;\; x_{N3} = 2$ weitere Nullstellen $x_{N1} = 2;\; x_{N3} = 2$ doppeltzählende Nullstelle		6			
	Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 2;\, S_y(0\,\|\,2)$	1				

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.3	$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0$ notwendige Bedingung $x_{E1}=2\ ; x_{E2}=-2$ p-q-Formel, mögliche Extremstellen $f''(x)=\frac{3}{4}x\neq 0$ hinreichende Bedingung $f''(2)=\frac{3}{2}>0$ Minimum bei $x_{E1}=2$ $f''(x)=\frac{3}{4}x<0$ Maximum bei $x_{E2}=-2$ $f(2)=0$ Tiefpunkt $T(2\|0)$ $f(-2)=4$ Hochpunkt $H(-2\|4)$ Wendepunkt $f''(x)=\frac{3}{4}x=0$ notwendige Bedingung $x_w=0$ $f'''(x)=\frac{3}{4}$ hinreichende Bedingung $f'''(0)=\frac{3}{4}>0$ Rechts-Links-Wendepunkt bei $x_w=0$ $f(0)=2$ Wendepunkt $W(0\|2)$	2 1	7 5			
1.4 ↓	$x_{N1}=2$; $x_{N2}=-4$; $x_{N3}=2$; $T(2\|0)$; $H(-2\|4)$; $W(0\|2)$ s.o. $f(-4,5)=-2,64$ linker Randpunkt $L(-4,5\|-2,64)$ $f(4)=4$ rechter Randpunkt $R(4\|4)$					

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
↓ 1.4		5				
1.5	$g(-5)=-5{,}125$; $g(-4)=1$ Wegen $g(-5)\cdot g(-4)=-5{,}125<0$ liegt Nst. im Intervall $\left[-5;-4\right]$ $x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$ Newtonsches Näherungsverfahren $g(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x+3$, $g'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$ Startwert wählen; Berechnung Algorithmus kennen und anwenden (Bem.: Mögliche Lösungen sind unten aufgeführt, auch andere Lösungsansätze sind denkbar.) Je nach Verfahren und Startwert der Berechnung wird eine begründete Aussage darüber getroffen, wie viele Nachkommastellen sich nicht mehr verändern und mit welcher Genauigkeit die Nullstelle deshalb bestimmt wurde.		2 3	2		
	Summe Aufgabe 1:	11	25	2		

Anlage zum Erwartungshorizont von Aufgabe 1:

Beispielrechnungen für verschiedene Startwerte zur Kontrolle

Beispielrechnung für Startwert -5

xs - erste Näherung: -5

	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
xs	-5	-5,125	7,875
x1	-4,34920635	-0,75966918	5,59334845
x2	-4,21338982	-0,0297716	5,15724516
x3	-4,20761705	-5,263E-05	5,13901545
x4	-4,20760681	-1,6549E-10	5,13898314

Beispielrechnung für Startwert -4

xs - erste Näherung: -4

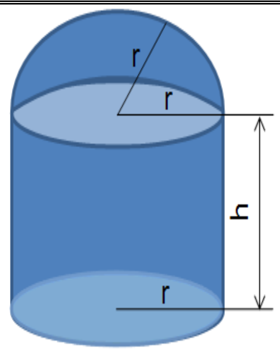
	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
xs	-4	1	4,5
x1	-4,22222222	-0,07544582	5,18518519
x2	-4,20767196	-0,00033482	5,13918874
x3	-4,20760681	-6,6975E-09	5,13898314
x4	-4,20760681	0	5,13898314

Beispielrechnung für Startwert -4,5

xs - erste Näherung: -4,5

	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
xs	-4,5	-1,640625	6,09375
x1	-4,23076923	-0,11987938	5,21227811
x2	-4,20776981	-0,00083772	5,13949754
x3	-4,20760681	-4,1921E-08	5,13898316
x4	-4,20760681	0	5,13898314

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2.1	**Ansatz:** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	1				
	Information — **Bedingung** (1) Punkt (0|105) — $f(0) = 105$ (2) Wendestelle 0 — $f''(0) = 0$ (3) Punkt (100|5) — $f(100) = 5$ (4) Steigung -0,2 an der Stelle 100 — $f'(100) = -0{,}2$		4			
	Gleichungssystem (1) $d = 105$ (2) $2b = 0$ (3) $1\,000\,000\,a + 10\,000\,b + 100\,c + d = 5$ (4) $30\,000a + 200b + c = -0{,}2$	2				
2.2	**Lösen des Gleichungssystems** $a = 0{,}00004$; $b = 0$; $c = -1{,}4$; $d = 105$ $f(x) = 0{,}00004x^3 - 1{,}4x + 105$		6			
2.3	Es muss eine ganzrationale Funktion 3. Grades sein, weil dann die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten (= 4) mit der Anzahl der Bestimmungsgleichungen (= 4) übereinstimmt.			3		
	Summe Aufgabe 2:	3	10	3		

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1		2				
3.2	Herleitung zum Nachweis der Zielfunktion Hauptbedingung: $A(r,h)=\frac{1}{2}A_{Kugel}+A_{Zylinder}-A_{GrundflächeZylinder}$ $A(r,h)=2\pi r^2+2\pi r^2+2\pi rh-\pi r^2=3\pi r^2+2\pi rh$		2			
	Nebenbedingung: $V=\frac{1}{2}V_{Kugel}+V_{Zylinder}$ $V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$ $h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r=\frac{12}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r$			2		
	Zielfunktion: $A(r)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=3\pi r^2+\frac{2V}{r}-\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}$ $A(r)=\frac{5}{3}\pi r^2+2Vr^{-1}=\frac{5}{3}\pi r^2+24r^{-1}$			3		

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.3	Notw. Bedingung für Extremstellen: $A'(r)=\frac{10}{3}\pi r-24r^{-2}=0$ $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}=\sqrt[3]{\frac{36}{5\pi}}\approx 1{,}318$ Hinr. Bedingung für Extremstellen: $A''(r)=\frac{10}{3}\pi+48r^{-3}\neq 0$ $A''(1{,}318)=\frac{10}{3}\pi+48\cdot 1{,}318^{-3}\approx 31{,}437>0$ Minimum bei $r=1{,}318$ $h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r=\frac{12}{\pi\cdot 1{,}318^2}-\frac{2}{3}\cdot 1{,}318\approx 1{,}320$ $r=1{,}318\,\mathrm{m}$; $h=1{,}320\,\mathrm{m}$		5			
	$A(r,h)=3\pi\cdot 1{,}318^2+2\pi\cdot 1{,}318\cdot 1{,}320\approx 27{,}303$ Der Speicher hat eine minimale Oberfläche von $27{,}303\,\mathrm{m}^2$.	1				
	Summe Aufgabe 3:	3	7	5		

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg. 4</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Gutachten</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>$n(0,5)=0,475=s(0,5)$ und $n(2,5)=0,475=s(2,5)$
Die Schnittpunkte sind $(0,5|0,475)$ und $(2,5|0,475)$</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Ansatz:
$A_1=\left|\int_{0,5}^{2,5} s(x)\,dx\right|=\left|S(2,5)-S(0,5)\right|$
Stammfunktion: $S(x)\approx -0,05x^4+\frac{59}{150}x^3-0,995x^2+1,2x$
$S(0,5)\approx 0,39729;\ S(2,5)=0,97396$
Flächeninhalt: $A_1=0,57667$
Ergebnis: Die Grünfläche ist $5767\,\mathrm{m}^2$ groß.</td><td>2

4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td><u>Rechenweg 1</u> Differenzfunktion
$d(x)=n(x)-s(x)=0,2x^3-1,68x^2+3,49x-1,35$
Ansatz:
$I_1=\int_{0,5}^{2,5} d(x)\,dx=D(2,5)-D(0,5)=1,04001$
Stammfunktion: $D(x)=0,05x^4-0,56x^3+1,745x^2-1,35x$
$D(0,5)=-0,30563;\ D(2,5)=0,73438$
Kreisfläche: $A_K\approx 0,19635$
Flächeninhalt: $A_2=I_1-A_K=0,84366$
Ergebnis: Die Dachfläche ist $8437\,\mathrm{m}^2$ groß.</td><td>1</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Rechenweg 2</u> Ansatz:
$I_2=\int_{0,5}^{2,5} n(x)\,dx=N(2,5)-N(0,5)=1,61666$
Stammfunktion: $N(x)=-\frac{1}{6}x^3+0,75x^2-1,5x$
$N(0,5)\approx 0,09167;\ N(2,5)\approx 1,70833$
Kreisfläche: $A_K\approx 0,19635$
Flächeninhalt: $A_2=I_2-A_1-A_k=0,84364$
Ergebnis: Die Dachfläche ist $8436\,\mathrm{m}^2$ groß.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Übertrag:</td><td>11</td><td>6</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Gutachten
	Übertrag	11	6	0	0	
4.4	Laut Abb. gilt für alle $x \in [1;2]: n(x) > s(x) \Rightarrow s(x) - n(x) < 0$ $\Rightarrow \int_1^2 (s(x) - n(x))\,dx < 0$			2		
4.5	$\int_1^2 n(x)\,dx = N(2) - N(1) = \frac{14}{15}$; denn	3				
	$N(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{20}x \Rightarrow N(1) = \frac{13}{30}; N(2) = \frac{41}{30}$		3			
	$\int_1^b n(x)\,dx = \frac{14}{15} \Leftrightarrow N(b) - N(1) = \frac{14}{15} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}b^3 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{20}b - \frac{13}{30} = \frac{14}{15}$ $\Leftrightarrow -10b^3 + 45b^2 - 9b - 82 = 0$		2			

	Horner-Schema
	    -10 45 -9 -82
	    0 -20 50 82
	2 -10 25 41 0 (Lösung $b_1 = 2$)
	Ansatz für weitere Lösungen:
	$-10x^2 \quad +25x \quad +41 \quad = 0$
	$1x^2 \quad -2{,}5x \quad 4{,}1 \quad = 1$
	$x_{2,3} = \quad 1{,}25 \quad \pm \quad 2{,}3796 \quad \Rightarrow b_2 = -1{,}1296$
	$\Rightarrow b_3 = 3{,}6296$
			4			

	Summe Aufgabe 4:	14	15	2		