Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Prüfung der allgemeinen Fachhochschulreife an den

Fachoberschulen im Schuljahr 2007 / 2008

Name, Vorname:		**Klasse:**
Prüfungsfach:	Mathematik (Vorschlag 1)	
Prüfungstag:	16. November 2007	
Prüfungszeit:	10.00 –14.00 (4 Zeitstunden)	
Zugelassene Hilfsmittel:	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Grafikdisplay, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.	
Allgemeine Arbeitshinweise:	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Denken Sie an eine übersichtliche, saubere und fehlerfreie Wiedergabe, da es sonst Punktabzüge geben kann. **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**	
Spezielle Arbeitshinweise:	**Der Aufgabensatz Mathematik besteht aus 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen.** Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.** Besonders gute sprachliche und grafische Darstellungen, Übersichtlichkeit und Sauberkeit bei der Bearbeitung der Prüfungsaufgaben können zu einem Sonderpunkt führen (Bonusregelung). Grobe Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder Übersichtlichkeit und Sauberkeit können zu einem Punktabzug von einem Punkt führen (Malusregelung).	

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: ________ Blätter

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte				
Aufgabe Nr.:	Soll	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)	
1	40 BE			
2	19 BE			
3	15 BE			
4	26 BE			
Summe:	100 BE			Durch die / den Prüfungsvorsitzende/n festgelegt:
Notenpunkte:	15	___ Punkte	___ Punkte	
Bonus / Maluspunkt:	+1/-1	___ Punkt	___ Punkt	
Insgesamt:		___ Punkte	___ Punkte	**__ Punkte**
Name / Kurzzeichen:				

Aufgabe 1: Kurvendiskussion **Bewertungseinheiten: 40**

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f\ (x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2} \quad ; \; x \in \mathrm{IR}$$

1.1. Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f .

1.2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.

1.3. Bestimmen Sie die Nullstellen von f .

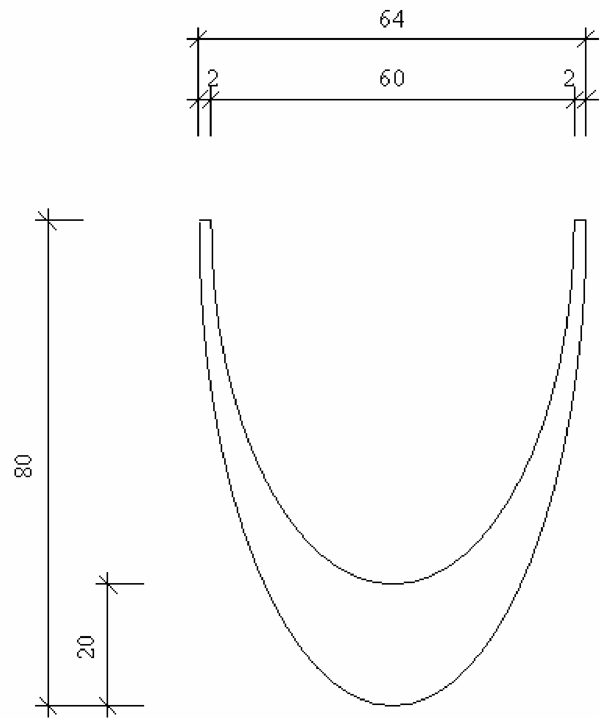
1.4. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Extrem - und Wendepunkte.

1.5. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-5;5]$.

1.6. Ermitteln Sie die zugehörigen Tangenten in den Punkten $\mathrm{P}\left(-2 \middle| f\,(-2)\right)$ und $\mathrm{Q}\left(2 \middle| f\,(2)\right)$ und bestimmen Sie deren Schnittpunkt.

Aufgabe 2: Rekonstruktion von Funktionen **Bewertungseinheiten: 19**

In der Darstellung sehen Sie die Schnittzeichnung des Kelches eines Glases. Die Angaben sind in Millimeter. Sowohl die äußere als auch die innere Begrenzung des Glases sind darstellbar in der Form $y = f\left(x\right) = ax^2 + c$.



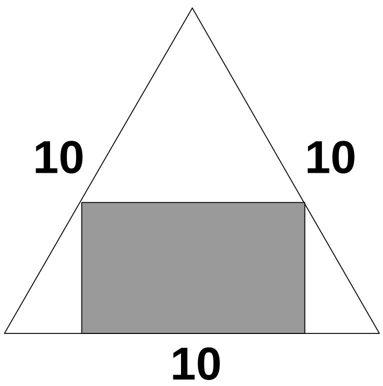
2.1. Legen Sie die Zeichnung in ein geeignetes Koordinatensystem.

2.2. Erstellen Sie beide Funktionsgleichungen.

2.3. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche des Glaskelches.

Aufgabe 3: Extremwertaufgabe **Bewertungseinheiten: 15**

Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 10 cm soll ein Rechteck einbeschrieben werden. Wie lang müssen die Rechteckseiten sein, damit der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird?



3.1 Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks bei maximalem Flächeninhalt.

3.2 Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 4: Integralrechnung **Bewertungseinheiten: 26**

Es sind die drei Funktionen *f*, *g* und *h* durch ihre Funktionsgleichungen gegeben:

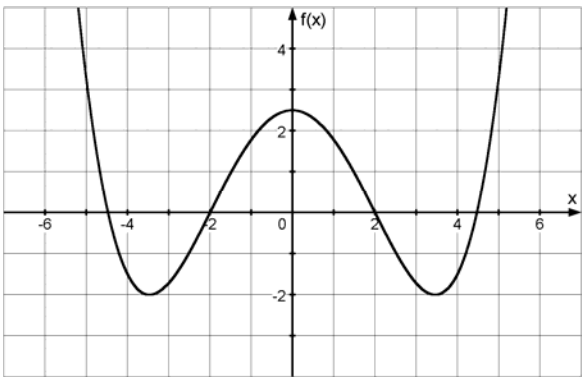
$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \,;\, x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = -x^2 + 2x + 4 \,;\, x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = -x + 6 \,;\, x \in \mathbb{R}$$

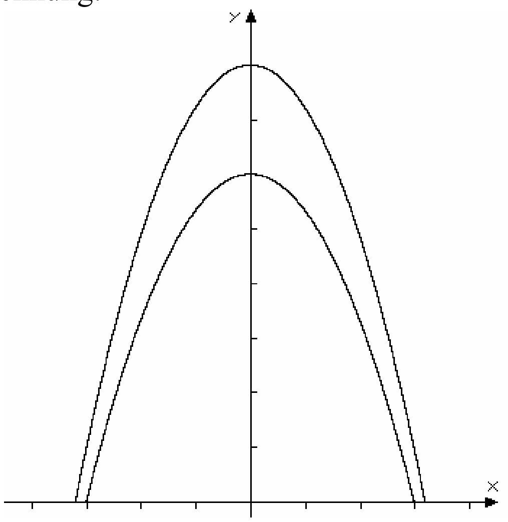
4.1. Ermitteln Sie die Scheitel der Parabeln und ihre Schnittpunkte.

4.2. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* im ersten Quadranten und schraffieren Sie die von allen drei Graphen eingeschlossene Fläche.

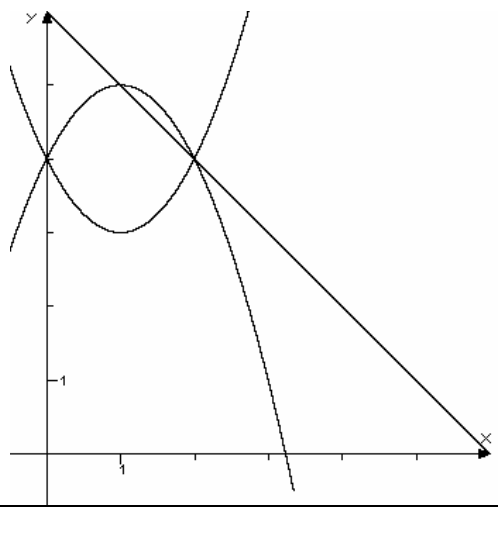
4.3. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Ab hier nicht für die Hand der Schülerin / des Schülers

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE	Erbrachte Leistungen	
		Soll	BE	Begutachtung
	Aufgabe 1: Kurvendiskusion			
1.1	Da $f(x) = f(-x)$ (bzw. alle Exponenten von x gerade) ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse.	2		
1.2	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 4. Da a_4 im Summand a_4x^4 positiv ist, ergibt sich: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.	3		
1.3	Nullstellen: $x_{N1/2} = \pm 2,\ x_{N3/4} = \pm\sqrt{20}$	8		
1.4	Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung $HP(0 \mid \frac{5}{2}), TP_1(\sqrt{12} \mid -2), TP_2(-\sqrt{12} \mid -2)$ Wendepunkte, notw. Und hinr. Bedingung $WP_1(2 \mid 0), WP_2(-2 \mid 0)$	15		
1.5		6		
1.6	$f(-2) = f(2) = 0$ $f'(-2) = 2;\ f'(2) = -2$ $y_{T1} = 2x + 4;\ y_{T2} = -2x + 4$ $Schnittpunkt: y_{T1} = y_{T2}$ $x_S = 0\,;\ S(0 \mid 4)$	6		

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufga-
benteil</th><th rowspan="2">Erwartete Leistung</th><th>BE</th><th colspan="2">Erbrachte Leistungen</th></tr>
<tr><th>Soll</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td colspan="5">Aufgabe 2: Rekonstruktion von Funktionen</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Zeichnung:

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>äußere Begrenzung:
$f_a(x) = y = ax^2 + 80 \quad P(32|0)$
$0 = a \cdot 1024 + 80 \rightarrow a = -\frac{80}{1024} = -\frac{5}{64}$
$f_a(x) = -\frac{5}{64}x^2 + 80$
innere Begrenzung:
$f_i(x) = y = ax^2 + 60 \quad P(30|0)$
$0 = a \cdot 900 + 60 \rightarrow a = -\frac{1}{15}$
$f_i(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 60$</td><td>6

6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>Schnittfläche:
$A = 2\int_0^{32}\left(-\frac{5}{64}x^2 + 80\right)dx - 2\int_0^{30}\left(-\frac{1}{15}x^2 + 60\right)dx$
$A = 2\left[-\frac{5}{192}x^3 + 80x\right]_0^{32} - 2\left[-\frac{1}{45}x^3 + 60x\right]_0^{30}$
$A = 2(1706{,}67) - 2(1200)$
$A = 1013{,}3\,mm^2 = 10{,}13cm^2$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Aufgabe 3: Extremwertaufgabe</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Hauptbedingung:
A = b·h
Nebenbedingungen:
$(5 - b/2) / 5 = h / h_{Dreieck}$
$h_{Dreieck} = 5\sqrt{3}$
$h = 5\sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot b/2$</td><td>13</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE Soll	Erbrachte Leistungen BE	Erbrachte Leistungen Begutachtung
	Zielfunktion: NB in HB eingesetzt und vereinfacht $A(b) = 5\sqrt{3}\cdot b - \sqrt{3}\cdot b^2/2$ Ableitungen: $A'(b) = 5\sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot b$ $A''(b) = -\sqrt{3}$ Notwendige Bedingung für Extremstellen $A'(x) = 0$ führt auf die Lösung $b_{max} = 5$. Testen mit der 2. Ableitung: $A''(5) < 0 \Rightarrow$ rel. Maximum Berechnen der zweiten Variablen: $h_{max} \approx 4{,}33$ Abmessungen: $b_{max} = 5$ cm ; $h_{max} \approx 4{,}33$ cm			
3.2	$A_{max} \approx 21{,}65$ cm²	2		
	Aufgabe 4: Integralrechnung			
4.1	Scheitel der Parabeln: $f: S(1\|3) \qquad g: S(1\|5)$ Schnittpunkte: $x^2 - 2x + 4 = -x^2 + 2x + 4$ $x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$ $y_1 = 4 \qquad y_2 = 4$	4		
4.2		6		

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE Soll	Erbrachte Leistungen BE	Begutachtung
4.3	Fläche: $A_1 = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right)dx$ $A_1 = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \left(-\tfrac{16}{3} + 8\right)$ $A_1 = \frac{8}{3} FE$ $A_2 = \int_1^2 \left[g(x) - h(x)\right]\,dx$ $= \int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right)\,dx$ $A_2 = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$ $= \left(-\tfrac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 2\right)$ $A_2 = \frac{1}{6} FE$ $A_{ges} = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{2} = \underline{\underline{2{,}5\,FE}}$	16		