

Prüfung der allgemeinen Fachhochschulreife an den Fachoberschulen im Schuljahr 2007 / 2008

Name, Vorname:		Klasse:
Prüfungsfach:	Mathematik (Vorschlag 2)	
Prüfungstag:	16. November 2007	
Prüfungszeit:	10.00 –14.00 (4 Zeitstunden)	
Zugelassene Hilfsmittel:	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Grafikdisplay, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.	
Allgemeine Arbeitshinweise:	<p>Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede Aufgabe ist ein neuer gekennzeichnete Bogen zu beginnen. Denken Sie an eine übersichtliche, saubere und fehlerfreie Wiedergabe, da es sonst Punktabzüge geben kann.</p> <p>Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!</p>	
Spezielle Arbeitshinweise:	<p>Der Aufgabensatz Mathematik besteht aus 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt. Besonders gute sprachliche und grafische Darstellungen, Übersichtlichkeit und Sauberkeit bei der Bearbeitung der Prüfungsaufgaben können zu einem Sonderpunkt führen (Bonusregelung). Grobe Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder Übersichtlichkeit und Sauberkeit können zu einem Punktabzug von einem Punkt führen (Malusregelung).</p>	

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter: _____ Blätter

Bewertungseinheiten, Gesamtpunkte			
Aufgabe Nr.:	Soll	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40 BE		
2	15 BE		
3	15 BE		
4	30 BE		
Summe:	100 BE		
Notenpunkte:	15	___ Punkte	___ Punkte
Bonus / Maluspunkt:	+1/-1	___ Punkt	___ Punkt
Insgesamt:		___ Punkte	___ Punkte
Name / Kurzzeichen:			___ Punkte

Durch die / den
Prüfungsvorsitzende/n
festgelegt:

Aufgabe 1: Kurvendiskussion**Bewertungseinheiten: 40**

Gegeben ist eine Funktion f durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$; $x \in \mathbb{R}$.

- 1.1. Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f .
- 1.2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.
- 1.3. Bestimmen Sie die Nullstellen von f .
- 1.4. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Extrem- und Wendepunkte.
- 1.5. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2,5; 2,5]$.
- 1.6. Bestimmen Sie die Gleichung der Normale im Punkt $P\left(\frac{1}{3} \mid f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Aufgabe 2: Rekonstruktion von Funktionen**Bewertungseinheiten: 15**

Von dem Graphen einer ganzrationalen Funktion f sei bekannt:

- Der Graph ist bezüglich der y -Achse symmetrisch und hat im Punkt $W(2 \mid 0)$ einen Wendepunkt.
- Des Weiteren liegt der Punkt $P(4 \mid -3)$ auf dem Graphen der Funktion.

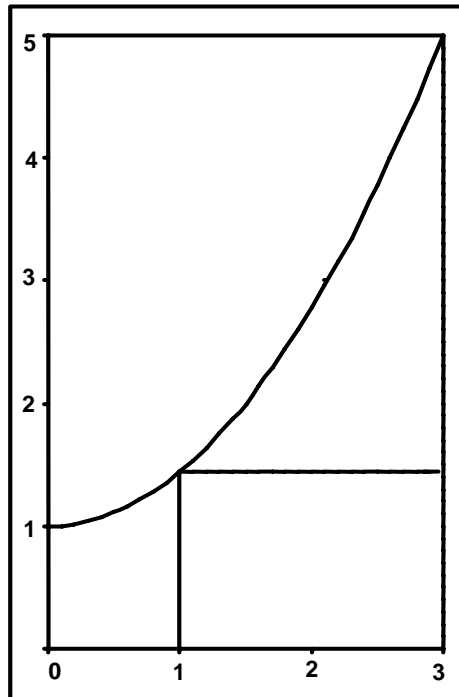
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion 4. Grades, deren Graph die Bedingungen erfüllt.

Sollten Sie das zur Bestimmung der Koeffizienten des Funktionsterms benötigte Gleichungssystem nicht oder nicht vollständig aufgestellt haben, berechnen Sie mit dem folgenden alternativen Gleichungssystem a , b und c :

- I. $64a + 16b + 4c = 0$
- II. $512a + 32b + 2c = -6$
- III. $24a + b = 0$

Aufgabe 3: Extremwertaufgabe**Bewertungseinheiten: 15**

Eine 3m x 5m große Schaufensterscheibe ist zersprungen. Die Bruchlinie entspricht dem Graphen einer Funktion 2. Grades. Die Bruchlinie kann mit Hilfe der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{4}{9}x^2 + 1$ relativ gut angenähert werden.



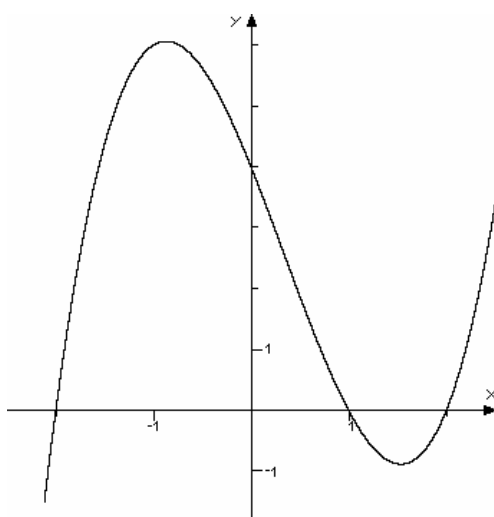
Aus dem unteren Bruchstück soll eine möglichst große rechteckige Fläche ausgeschnitten werden. Wie sind die Maße zu wählen und wie groß ist der Inhalt der maximalen Rechteckfläche?

Aufgabe 4: Integralrechnung**Bewertungseinheiten: 30**

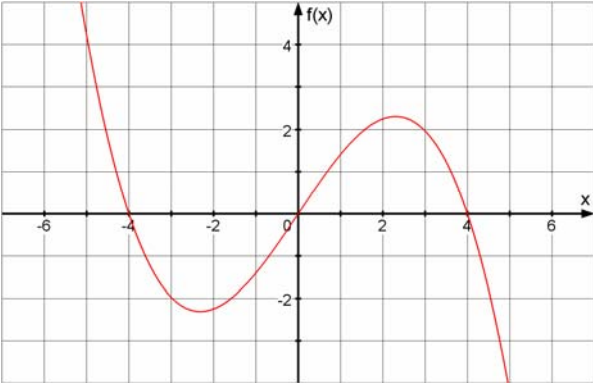
Gegeben ist die Funktionenschar g_a durch $g_a(x) = -\frac{3}{32}x^3 + ax$; $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

- 4.1. Die x -Achse und der Graph der Funktion $g_{\frac{3}{2}}$ (d.h. $a = \frac{3}{2}$) begrenzen im I. Quadranten eine Fläche A vollständig. Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
- 4.2. Durch die Gerade, die durch den Punkt $P(3|0)$ geht und parallel zur y -Achse verläuft, wird diese Fläche in zwei Teile zerlegt. Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der Teilflächen.
- 4.3. Welchen Wert müsste a annehmen, damit die Fläche zwischen dem Graphen von g_a und der x -Achse im Intervall $[0; 2]$ den Inhalt 4 FE hat?

Ab hier nicht für die Hand der Schülerin / des Schülers

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE	Erbrachte Leistungen	
		Soll	BE	Begutachtung
Aufgabe 1: Kurvendiskussion				
1.1	Da weder $f(x) = f(-x)$ noch $f(-x) = -f(x)$ -bzw. gerade und ungerade Exponenten von x auftreten- ist der Funktionsgraph weder achsensymmetrisch zur y -Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.	2		
1.2	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 3. Da a_3 im Summand a_3x^3 positiv ist, ergibt sich: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.	3		
1.3	Nullstellen: $x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$	8		
1.4	Extrempunkte: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$ $MIN(1,5 -0,9)$ $f''(x) = 6x - 2$ $MAX(-0,9 6,1)$ Wendepunkt: $f'''(x) = 6$ $P_w(\frac{1}{3} 2,6)$	15		
1.5	Zeichnung: 	6		
1.6	Es handelt sich um den Wendepunkt $P_w(\frac{1}{3} 2,6)$. $f'(\frac{1}{3}) = -\frac{13}{3} = m_{Tangente}$ Damit $m_{Normale} = \frac{3}{13}$ und $y = \frac{3}{13}x + 2,52$.	6		

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	Erbrachte Leistungen		
		BE	Erbrachte Leistungen	
		Soll	BE	Begutachtung
Aufgabe 2: Rekonstruktion von Funktionen				
2.	<p>Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$</p> <p>Ableitungen: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2b$</p> <p>Aufstellen der Bedingungen: I) $f(2) = 0$ II) $f(4) = -3$ III) $f''(2) = 0$</p> <p>Die Bedingungen I) bis III) führen auf das Gleichungssystem: $16a + 4b + c = 0$ $256a + 16b + c = -3$ $48a + 2b = 0$</p> <p>Lösungen (auch beim Ersatzgleichungssystem): $a = 1/16; b = -3/2; c = 5$</p> <p>Funktionsgleichung: $f(x) = 1/16 x^4 - 3/2 x^2 + 5$</p>	7		
		7		
		1		
Aufgabe 3: Extremwertaufgabe				
3	<p>Hauptbedingung: $A = b \cdot h$</p> <p>Nebenbedingungen: $b = 3 - x$ $h = 4/9 \cdot x^2 + 1$</p> <p>Zielfunktion: NB in HB eingesetzt und vereinfacht $A(x) = -4/9 \cdot x^3 + 4/3 \cdot x^2 - x + 3$</p> <p>Ableitungen: $A'(x) = -4/3 \cdot x^2 + 8/3 \cdot x - 1$ $A''(x) = -8/3 \cdot x + 8/3$</p> <p>Notwendige Bedingung für Extremstellen $A'(x) = 0$ führt auf die Lösungen $x_1 = 1,5$ und $x_2 = 0,5$. Testen mit der 2. Ableitung: $A''(1,5) < 0$ \Rightarrow rel. Maximum $A''(0,5) > 0$ \Rightarrow rel. Minimum</p> <p>Abmessungen: $b_{\max} = 1,5 \text{ m}$; $h_{\max} = 2 \text{ m}$ $A_{\max} = 3 \text{ m}^2$</p>	15		

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	Erbrachte Leistungen		
		BE Soll	BE	Begutachtung
Aufgabe 4: Integralrechnung				
4.1	Nullstellen: $x_{N1} = 0, x_{N2} = 4, x_{N3} = -4$ $A = 6 \text{ FE}$; I. Quadranten beachten 	12		
4.2	$A_1 = \left \int_0^3 f_{3/2}(x) dx \right \approx 4,85, A_2 = A - A_1 \approx 1,15$ $\frac{A_1}{A_2} \approx 4,22$ bzw. $\frac{A_2}{A_1} \approx 0,24$	10		
4.3	$A = \left \int_0^2 f_a(x) dx \right = 4; a = \frac{35}{16}$	8		