## 1 Kurvendiskussion **/40**

Gegeben ist eine Funktion $f$ mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2; \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

**1.1** Untersuchen Sie den Graphen von $f$ auf mögliche Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

**1.2** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von $f$ im Unendlichen. **/3**

**1.3** Berechnen Sie die Nullstellen von $f$. **/8**

**1.4** Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen von $f$ mit der $y$-Achse. **/1**

**1.5** Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von $f$. Geben Sie die Ergebnisse auf drei relevante Stellen nach dem Komma an. **/15**

**1.6** Zeichnen Sie den Graphen von $f$ im Intervall $[-3{,}5\,;1]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**

**1.7** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente des Graphen von $f$ im Punkt $P(-2 \mid f(-2))$ und zeichnen Sie diese in das unter 1.6 erstellte Koordinatensystem ein. **/5**

## 2 Rekonstruktion von Funktionen /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion $f$ dritten Grades verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Funktion hat bei $x_E = -1$ eine Extremstelle und bei $x = -2$ liegt eine Wendestelle vor. Die zugehörige Wendetangente hat die Steigung $m_W = -4$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f$ durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktion. (Es handelt sich zwar um ein anderes Gleichungssystem als das, das sich aus den obigen Bedingungen ergibt, führt aber zum selben Ergebnis für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
6a & - & 4b & + & 2c & & & = & 0 \\
18a & - & 3b & + & c & & & = & 12 \\
-18a & + & 6b & - & \frac{3}{2}c & & & = & 6 \\
 & & & & & & d & = & 0
\end{array}$$

## 3 Extremalproblem /15

Es sind zwei Parabeln durch ihre Funktionsgleichungen gegeben:

$$f(x) = 2x^2 - 4\,;\ x \in \mathbb{R} \text{ und } g(x) = -x^2 + 8\,;\ x \in \mathbb{R}\,.$$

**3.1** Geben Sie die Scheitelpunkte der Parabeln an und berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabeln. **/3**

**3.2** Skizzieren Sie beide Parabeln mit den Ergebnissen von 3.1 in ein Koordinatensystem. **/3**

Zeichnen Sie ein achsenparalleles Rechteck ein, von dem zwei Eckpunkte auf dem Graphen von $f$ und die anderen beiden auf dem Graphen von $g$ liegen.

**3.3** Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks, das einen maximalen Flächeninhalt hat. **/9**

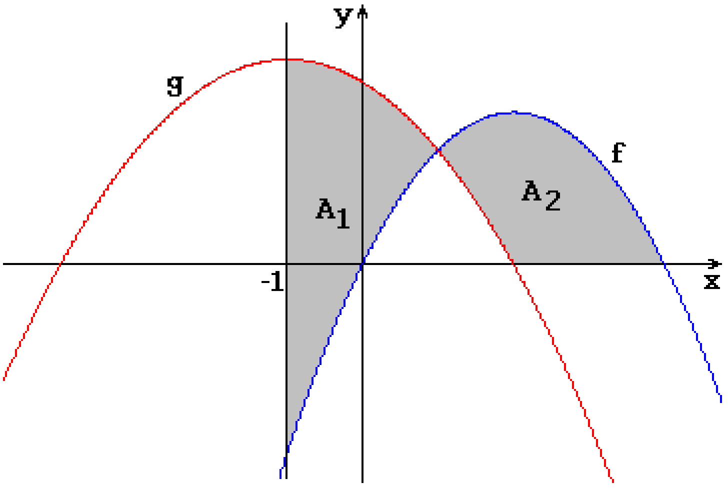
## 4 Integralrechnung /30

Gegeben seien die Funktionen $f$ und $g$ mit:

$f(x) = -0,5x^2 + 2x\,;\; x \in \mathbb{R}$

bzw.

$g(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 2,4\,;\; x \in \mathbb{R}.$



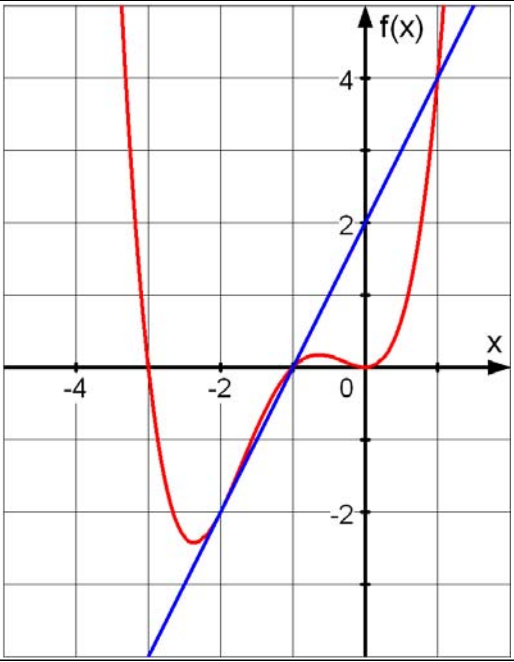

**4.1** Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von $f$ und $g$ mit der $x$-Achse. **/8**

**4.2** Bestimmen Sie die $x$-Koordinaten der Schnittpunkte der in der obigen Skizze zu sehenden Graphen von $f$ und $g$. (Es gibt noch einen weiteren Schnittpunkt, der aber nicht auf der Skizze erscheint.) **/7**

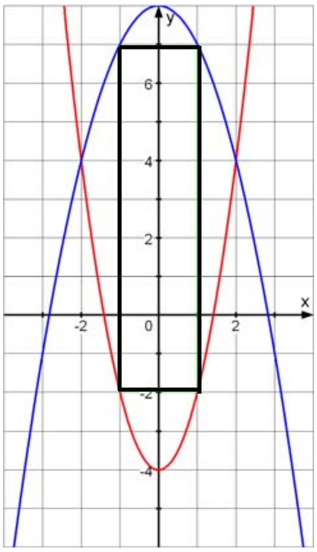
**4.3** Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der dunkel markierten Flächen $A_1$ und $A_2$ sowie die Summe dieser beiden Flächeninhalte. **/15**

| Teil-aufgaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB | | | Erbrachte Teilleistung | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III | BE | Begutachtung |
| 1 | | | | | | |
| 1.1 | Da weder $f(x)=f(-x)$ noch $f(-x)=-f(x)$ - bzw. gerade und ungerade Exponenten von $x$ auftreten- ist der Funktionsgraph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. | 2 | | | | |
| 1.2 | Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von $f$ ist 4.<br>Da $a_4$ im Summand $a_4x^4$ positiv ist, ergibt sich:<br>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$. | 3 | | | | |
| 1.3 | Nullstellen:<br>$f(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2=0$<br>$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2(x^2+4x+3)=0$<br>$\Leftrightarrow \quad x=0 \vee x^2+4x+3=0$<br>$x^2+4x+3=0$<br>$\Leftrightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-3}$<br>$x_{N1}=-3,\; x_{N2}=-1,$<br>$x_{N3}=0\;(doppelteNullstelle)$ | 4 | 4 | | | |
| 1.4 | $f(0)=0;\; S_y(0\,\vert\,0)$ | 1 | | | | |
| 1.5 | Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung<br>$f'(x)=2x^3+6x^2+3x$<br>$f''(x)=6x^2+12x+3$<br>$f'(x_E)=0$<br>$2x^3+6x^2+3x=0$<br>$x=0 \vee x^2+3x+\frac{3}{2}=0$<br>$x_{E2/3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}}$<br>$x_{E2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-2{,}366$<br>$x_{E3}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-0{,}634$ | 5 | | | | |

| Teil-aufgaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III | Erbrachte Teilleistung BE | Begutachtung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f''(-2{,}366) \approx 8{,}196 > 0$<br>$\Rightarrow Minimum_1;\ f(-2{,}366) = -2{,}424$<br>$f''(-0{,}634) \approx -2{,}196 < 0$<br>$\Rightarrow Maximum;\ f(-0{,}634) = 0{,}174)$<br>$f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow Minimum_2;\ f(0) = 0$<br>$TP_1(-2{,}366 \mid -2{,}424)$<br>$TP_2(0 \mid 0)$<br>$HP(-0{,}634 \mid 0{,}174)$<br><br>Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung<br>$f'''(x) = 12x + 12$<br>$f''(x) = 0$<br>$6x^2 + 12x + 3 = 0$<br>$x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$<br>$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$<br>$x_1 \approx -1{,}707$<br>$x_2 \approx -0{,}293$<br>$f'''(-1{,}707) \approx -8{,}485 \neq 0$<br>$f'''(-0{,}293) \approx 8{,}485 \neq 0$<br>$W_1(-1{,}707 \mid -1{,}332)$<br>$W_2(-0{,}293 \mid 0{,}082)$ | | 10 | | | |

| Teil-auf-gaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III | Erbrachte Teilleistung BE | Begutachtung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.6 |  | | 6 | | | |
| 1.7 | $m_T = f'(-2) = 2$<br>$f(-2) = -2$<br>$y_T = m_T x + b$<br>$b = 2$<br>$y_T = 2x + 2$ | | 5 | | | |
| | Summe | 15 | 25 | 0 | | |
| | mögliche BE | | 40 | | erreichte BE | |

| Teil-auf-gaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III | Erbrachte Teilleistung BE | Begutachtung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | | | |
| | Ansatz:<br>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$<br>$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$<br>$f''(x) = 6ax + 2b$ | 3 | | | | |
| | Bedingungsgefüge:<br>1. $f''(-2) = 0$ (Wendestelle bei $x_W$ =-2)<br>2. $f(0) = 0$ (Graph geht durch $P(0\|0)$)<br>3. $f'(-2) = -4$ (Anstieg im Wendepunkt ist $-4$)<br>4. $f'(-1) = 0$ (Extremum bei $x_E = -1$) | | | 4 | | |
| | Gleichungssystem:<br>I: 0 = -12a +2b<br>II: 0 = d<br>III: -4 = 12a -4b + c<br>IV: 0 = 3a -2b + c<br>Lösen des Gleichungssystems<br>(ebenso Ersatz-LGS)<br>Daraus ergibt sich:<br>$a = \frac{4}{3}, \quad b = 8, \quad c = 12, \quad d = 0$ | | 5 | | | |
| | Und für den Funktionsterm:<br>$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 12x$ | 3 | | | | |
| | Summe | 6 | 5 | 4 | | |
| | mögliche BE | | 15 | | | erreichte BE |

| Teil-auf-gaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III | Erbrachte Teilleistung BE | Begutachtung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | | |
| 3.1 | Scheitelpunkte:<br>$S_f(0\|-4)$<br>$S_g(0\|8)$<br>Schnittpunkte:<br>$S_1(2\|4)$<br>$S_2(-2\|4)$ | 3 | | | | |
| 3.2 | Zeichnung:<br><br> | | 3 | | | |
| 3.3 | Hauptbedingung:<br>$A(x,h)=2x\cdot h$<br>Nebenbedingung:<br>$h=g(x)-f(x)$<br>Bestimmung der Zielfunktion:<br>$A(x)=2x\left(g(x)-f(x)\right)$<br>$A(x)=2x\left(-3x^2+12\right)$<br>$A(x)=-6x^3+24x$<br>$A'(x)=-18x^2+24$<br>$A''(x)=-36x$<br>notwendige Bedingung:<br>$A'(x)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}15LE$<br>hinreichende Bedingung:<br>für $x=+1{,}15$ ist $A''(x)<0\Rightarrow Max$ | 3 | 3 | 3 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Damit sind die Abmessungen des Rechtecks: $2x = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 2{,}31LE$ $g(x) - f(x) = -3x^2 + 12 = 8LE$ | | | | | |
| | Summe | 6 | 6 | 3 | | |
| | mögliche BE | 15 | | | erreichte BE | |

| Teil-auf-gaben | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III | Erbrachte Teilleistung BE | Begutachtung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | | | |
| 4.1 | <u>Nullstellen von f:</u><br>setze $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x = 0$<br>$x(-0{,}5x + 2) = 0$<br>$\underline{x_1 = 0}$ oder $-0{,}5x + 2 = 0 \mid -2$<br>$-0{,}5x = -2 \mid :(-0{,}5)$<br>$\underline{x_2 = 4}$<br>$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N_1(0\mid 0)}} \quad \underline{\underline{N_2(4\mid 0)}}$<br><br><u>Nullstellen von g:</u><br>setze<br>$f(x) = -0{,}3x^2 - 0{,}6x + 2{,}4 = 0 \mid :(-0{,}3)$<br>$x^2 + 2x - 8 = 0$<br>$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$<br>$\underline{x_3 = -4} \quad \underline{x_4 = 2}$<br>$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N_3(-4\mid 0)}} \quad \underline{\underline{N_4(2\mid 0)}}$ | 2<br><br>2 | 2<br><br>2 | | | |
| 4.2 | setze $f(x) = g(x)$<br>$-0{,}5x^2 + 2x = -0{,}3x^2 - 0{,}6x + 2{,}4$<br>$\mid +0{,}3x^2 + 0{,}6x - 2{,}4$<br>$-0{,}2x^2 + 2{,}6x - 2{,}4 = 0 \mid :(-0{,}2)$<br>$x^2 - 13x + 12 = 0$<br>$x_{5,6} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 12} =$<br>$= 6{,}5 \pm \sqrt{30{,}25} = 6{,}5 \pm 5{,}5$<br>$\underline{\underline{x_5 = 1}} \quad \underline{\underline{x_6 = 12}}$ | 3 | 4 | | | |
| 4.3 | $A_1 = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)dx$<br>$= \int_{-1}^{1} -0{,}2x^2 + 2{,}6x - 2{,}4dx =$<br>$= \left\| -\frac{1}{15}x^3 + 1{,}3x^2 - 2{,}4x \right\|_{-1}^{1} =$<br>$= -\frac{1}{15} + 1{,}3 - 2{,}4 - (\frac{1}{15} + 1{,}3 + 2{,}4) = \underline{\underline{4{,}9\overline{3}FE}}$ | 3 | 3 | 3 | | |

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$A_2 = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$<br>$= \int_1^4 -0,5x^2 + 2xdx - \int_1^2 -0,3x^2 - 0,6x + 2,4dx$<br>$= \left| -\frac{1}{6}x^3 + x^2 \right|_1^4 - \left| -0,1x^3 - 0,3x^2 + 2,4x \right|_1^2$<br>$= \left| -\frac{1}{6}\cdot 4^3 + 4^2 - (-\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 1^2) \right|$<br>$- \left| \begin{array}{l} -0,1\cdot 2^3 - 0,3\cdot 2^2 + 2,4\cdot 2 \\ -(-0,1\cdot 1^3 - 0,3\cdot 1^2 + 2,4\cdot 1) \end{array} \right|$<br>$= \left| -10,\overline{6} + 16 + 0,1\overline{6} - 1 \right|$<br>$- \left| \begin{array}{l} -0,8 \\ -1,2 + 4,8 + 0,1 + 0,3 - 2,4 \end{array} \right|$<br>$= 4,5 - 0,8 = \underline{\underline{3,7FE}}$<br>$A_{ges} = A_1 + A_2 = 4,9\overline{3} + 3,7 = \underline{\underline{8,6\overline{3}FE}}$</td>
<td>3</td>
<td>3</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summe</td>
<td>13</td>
<td>14</td>
<td>3</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>mögliche BE</td>
<td colspan="3">30</td>
<td colspan="2">erreichte BE</td>
</tr>
</table>